

É possível mostrar que este cancelamento ocorre para todas as ordens de perturbação (Peskin sec 6.5), neste caso a seção de choque medida é:

$$\frac{d\sigma_{\text{Exp}}}{d\Omega} = \frac{d\sigma_0}{d\Omega} \text{EXP} \left[-\frac{\alpha}{\pi} \ln(q^2) L_N \left(-\frac{q^2}{E_e^2} \right) \right]$$

Auto-energia do elétron

(Peskin 7.1)

Resta tratar a divergência ultravioleta do vértice elétron-elétron-fóton, veremos agora que ela está ligada às correções radiativas do propagador do elétron. Vamos a elas:

Primeiramente vale lembrar o resultado obtido na pag 92:

$$\int d^4x e^{iPx} \langle \Omega | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(0) | \Omega \rangle = i \frac{Z_2 (\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \dots$$

$$\langle \Omega | \psi(0) | p, s \rangle = \sqrt{Z_2} u^s(p)$$

\downarrow $m^2 = m_0^2 + \delta m^2$
 \downarrow $1 + \delta Z_2$

Nosso objetivo é agora obter as contribuições perturbativas para Z_2 e m

$$\langle \Omega | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(y) \} | \Omega \rangle = \underbrace{\text{---} \text{---}}_p + \underbrace{\text{---} \text{---} \text{---}}_{k \quad p-k \quad p} + \dots$$

$$\frac{i(\not{p} + m_0)}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} + \frac{i(\not{p} + m_0)}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} \left[-i \Sigma_2(p) \right] \frac{i(\not{p} + m_0)}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon}$$

basicamente é a contribuição de ordem e^2 para um objeto análogo ao que chamamos de M^2 na pág 100

$$-i \Sigma_2(p) = (-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma^\mu \frac{i(\not{k} + m_0)}{k^2 - m_0^2 + i\epsilon} \gamma_\mu \frac{-i}{(p-k)^2 - \mu^2 + i\epsilon}$$

"massa" do fóton no fim faremos: $\mu^2 \rightarrow 0$

\rightarrow ordem perturbativa

Temos, novamente, que usar o maquinário desenvolvido para o cálculo de loops. A parametrização de Feynman fornece (já integrando em y com o uso da delta):

$$\frac{1}{k^2 - m_0^2 + i\epsilon} \frac{1}{(p-k)^2 - \mu^2 + i\epsilon} = \int_0^1 dx \frac{1}{[k^2 - 2xkp + x^2 p^2 - x\mu^2 - (1-x)m_0^2 + i\epsilon]^2}$$

o termo linear em ℓ no numerador já foi cancelado

$$l = k - x p$$

$$-i \Sigma_2(p) = -e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{-2x \not{p} + 4 m_0}{[\ell^2 - \Delta_\nu + i\epsilon]^2}$$

$$\Delta_\nu = -x(1-x)p^2 + x\nu^2 + (1-x)m_0^2$$

Podemos usar a regularização de Pauli-Villars:

$$\frac{1}{(p-k)^2 - \nu^2 + i\epsilon} \rightarrow \frac{1}{(p-k)^2 - \nu^2 + i\epsilon} - \frac{1}{(p-k)^2 - \Lambda^2 + i\epsilon}$$

$$-i \Sigma_2(p) = -e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{-2x \not{p} + 4 m_0}{[\ell^2 - \Delta_\nu + i\epsilon]^2} - e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{-2x \not{p} + 4 m_0}{[\ell^2 - \Delta_\Lambda + i\epsilon]^2}$$

E fazendo a rotação de Wick:

$$\int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{\ell^2 - \Delta_\nu} - \frac{1}{\ell^2 - \Delta_\Lambda} \right] = \frac{i}{(4\pi)^2} \text{Ln} \left(\frac{\Delta_\Lambda}{\Delta_\nu} \right)$$

$$\Delta_\Lambda \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} x \Lambda^2$$

$$\Sigma_2(p) = \frac{x}{2\pi} \int_0^1 dx (2m_0 - x \not{p}) \text{Ln} \left(\frac{x \Lambda^2}{(1-x)m_0^2 + x\nu^2 - x(1-x)p^2} \right)$$

(eq. 132.1)

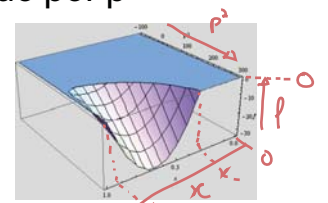
Podemos entender a estrutura analítica desta correção. A função Ln tem uma ramificação a partir do ponto em que seu argumento fica negativo, como o numerador é positivo a condição é:

$$f(x, p^2) = (1-x)m_0^2 + x\nu^2 - x(1-x)p^2 < 0$$

$0 < x < 1 \Rightarrow (> 0) \quad (> 0) \quad \hookrightarrow$ só será possível acima de algum valor mínimo de $p^2 > 0$

Em termos de x, a função f é uma parábola cujo mínimo é determinado por p^2

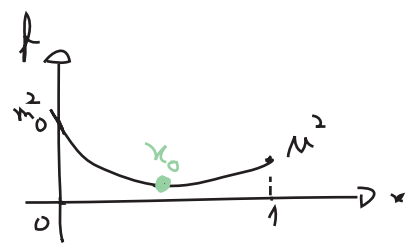
$$f(x, p^2) = p^2 x^2 + (\nu^2 - p^2 - m_0^2) x + m_0^2$$



$$\frac{d}{dx} f(x, p^2) = 2x p^2 + m_0^2 - p^2 - m_0^2 = 0$$

$$\hookrightarrow x_0 = \frac{m_0^2 + p^2 - \mu^2}{2p^2}$$

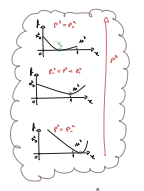
$$f(x_0, p^2) = -\frac{(m_0^2 - \mu^2)^2}{4p^2} + \frac{1}{2}(m_0^2 + \mu^2) - \frac{1}{4}p^2$$



O mínimo passa para baixo de zero em:

$$f(x_0, p^2) = 0 \rightarrow p_{\pm}^2 = (m_0 \pm \mu)^2$$

$$f < 0 \leftrightarrow \begin{cases} p^2 > p_+^2 \\ p^2 < p_-^2 \end{cases}$$



$$x_0(p_-^2) = \frac{m_0}{m_0 - \mu} \Rightarrow x = \frac{m_0}{m_0 - \mu} > 1$$

$$x_0(p_+^2) = \frac{m_0}{m_0 + \mu} \Rightarrow x = \frac{m_0}{m_0 + \mu} < 1$$

como $f(1, p^2) = \mu^2 > 0 \forall p^2$ não há como uma região negativa passar de $x > 1$ para $x < 1$

Logo, para $0 < x < 1$ temos uma ramificação que em: $p^2 \geq (m_0 + \mu)^2$

o que está de acordo com o que vimos na pg 92 - temos uma ramificação a partir da energia em que podemos produzir duas partículas reais (nessa caso um elétron de massa m_0 e um fóton de massa μ)

Também é possível encontrar o polo, basta seguir o mesmo procedimento que usamos no caso do campo escalar para somar as contribuições 1PI (pg 100)

$$-i \Sigma(p) = -i \bar{\Sigma}(p) = \text{1PI} = \dots = 0$$

$\text{com } \langle \Omega | T \{ \bar{\psi}(x) \psi(x) \} | \Omega \rangle = \langle \Omega | T \{ j(x) \} | \Omega \rangle$

$$= \text{---} + \underbrace{\text{---} + \text{---}}_{-i \Sigma_x} + \underbrace{\text{---} + \text{---}}_{-i \Sigma_y} + \dots =$$

$$\int d^4x \langle \Omega | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(0) \} | \Omega \rangle e^{i p x} = \text{---} \rightarrow \text{---} =$$

$$= \text{---} + \text{---} \text{1PI} + \text{---} \text{1PI} \text{1PI} + \text{---} \text{1PI} \text{1PI} \text{1PI} + \dots =$$

$$= \frac{i}{\not{p} - m_0 - \Sigma(p)} \rightarrow$$

A massa física é dada por:

$$\left[\not{p} - m_0 - \Sigma(p) \right]_{\not{p} = m} = 0 \quad (\text{eq. 133.1})$$

$$\delta m = m - m_0 = \sum (\not{p} = m)$$

Bem perto do polo vale:

$$\not{p} - m_0 - \Sigma(\not{p}) \approx (\not{p} - m) \cdot \left(1 - \left. \frac{d\Sigma}{d\not{p}} \right|_{\not{p}=m} \right) + \mathcal{O}((\not{p} - m)^2)$$

$$\int d^4x \langle \Omega | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(0) \} | \Omega \rangle e^{i p x} = \frac{i \left(1 - \left. \frac{d\Sigma}{d\not{p}} \right|_{\not{p}=m} \right)^{-1}}{\not{p} - m} = \frac{i (\not{p} + m) \left(1 - \left. \frac{d\Sigma}{d\not{p}} \right|_{\not{p}} \right)^{-1}}{p^2 - m^2}$$

Comparando com o resultado obtido para o propagador completo (pg 92):

$$\int d^4x \langle \Omega | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(0) \} | \Omega \rangle e^{i p x} = \frac{i Z_2 (\not{p} + m)}{p^2 - m^2}$$

$$Z_2^{-1} = 1 - \left. \frac{d\Sigma}{d\not{p}} \right|_{\not{p}=m} \quad (\text{eq. 134.1})$$

rigorosamente seria m , mas a diferença entre m e m_0 é proporcional a α , o que já é uma correção superior (uma vez que já temos α na frente de tudo)

Em ordem α , as correções são:

$$\delta m = \sum_2 (\not{p} = m_0) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx (2m_0 - x m_0) L_N \left(\frac{x \Lambda^2}{(1-x)m_0^2 + x \Lambda^2 - x(1-x)m_0^2} \right) =$$

$$= \frac{\alpha}{2\pi} m_0 \int_0^1 dx (2-x) L_N \left(\frac{x \Lambda^2}{(1-x)^2 m_0^2 + x \Lambda^2} \right)$$

mathematica

Integrate[(Alpha)/2/Pi*m0*(2-x)*Log[x*(Lambda^2)/(1-x)^2*m0^2+x*(Mu)^2],{x,0,1},Assumptions->{Lambda>0,m0>0,Mu>0}]

$$I_{\lambda} = \frac{1}{8 m_0^3 \pi \sqrt{4 m_0^2 - \mu^2}}$$

$$\alpha \left(2 \mu (-8 m_0^4 - 2 m_0^2 \mu^2 + \mu^4) \text{ArcTan} \left[\frac{\mu}{\sqrt{4 m_0^2 - \mu^2}} \right] - \right.$$

$$\left. 2 \mu (-8 m_0^4 - 2 m_0^2 \mu^2 + \mu^4) \text{ArcTan} \left[\frac{-2 m_0^2 + \mu^2}{\mu \sqrt{4 m_0^2 - \mu^2}} \right] + \right.$$

$$\left. \sqrt{4 m_0^2 - \mu^2} \left(3 m_0^4 + 2 m_0^2 \mu^2 - 12 m_0^4 \text{Log} \left[\frac{m_0}{\Lambda} \right] - 2 \mu^4 \text{Log} \left[\frac{\mu}{m_0} \right] \right) \right)$$

Primeiramente, notemos que não há divergência quando $\Lambda \rightarrow 0$

$$\lim_{\Lambda \rightarrow 0} \delta m = \frac{3 \alpha m_0}{8 \pi} \left(1 + 2 \log \left[\frac{\Lambda^2}{m_0^2} \right] \right) \quad \circ \circ \circ \quad \lim_{\Lambda \rightarrow 0} \tan^{-1} \left(\frac{1}{\Lambda} \right) = \frac{\pi}{2}$$

E que, de qualquer forma, a divergência ultravioleta está em um termo que independe de μ

$$\delta m \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{3 \alpha m_0}{4 \pi} \log \left[\frac{\Lambda^2}{m_0^2} \right]$$

Temos então a massa do elétron sendo corrigida por uma grandeza divergente. Isto não é novidade, classicamente temos a energia de repouso de uma partícula dada pelo potencial eletrostático da seguinte forma (carga pontual):

$$\int d^3 R \frac{1}{2} |\vec{E}|^2 = \int d^3 R \frac{1}{2} \left(\frac{e}{4 \pi R^2} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{e^2}{(4 \pi)^2} \int d\Omega \int \frac{1}{R^2} dR$$

Dim [R] = GeV⁻¹
Dim [1/R² = Λ] = GeV²

$$= \frac{\alpha}{2} \int_0^\infty \frac{1}{R^2} dR \sim \alpha \lim_{R \rightarrow 0} \left[\frac{1}{R} \right] = \alpha \Lambda$$

Nota-se de fato que a divergência quântica é menos forte que a clássica. Quanticamente temos uma divergência logarítmica com a escala de energia, classicamente ela é linear. Dá para entender que não poderia ser diferente por análise dimensional: suponha que $m_0 = 0$, pense no termo de massa:

$$\Psi = \Psi_L + \Psi_R \Rightarrow m_0 \bar{\Psi} \Psi = m_0 (\bar{\Psi}_L \Psi_R + \bar{\Psi}_R \Psi_L)$$

$$\bar{\Psi} \Psi = \bar{\Psi}_R \Psi_R + \bar{\Psi}_L \Psi_L$$

se este termo é zero, não temos mais nada na Lagrangeana que "acople" Ψ_L e Ψ_R . Com isso obtemos duas teorias separadas, uma para cada quiralidade, e não há correção radiativa que vá produzir um termo de massa.

$$\delta m \sim m_0 \quad (\text{note que isso quer dizer que um elétron de massa zero nunca ganharia massa})$$

Portanto a única dependência possível com a energia é logarítmica. Essa "pequena correção infinita" parece invalidar todo o procedimento perturbativo, mas logo veremos que podemos reescrever nossa lagrangeana em termos de parâmetros físicos finitos desde o começo, evitando assim o problema. Por enquanto assumiremos que já fizemos isso e trocar m_0 por m nas contas que seguem

No caso de Z_2 temos: