

$$Z_2 = 1 + \delta Z_2$$

$$(1-x)^{-1} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1+x+O(x^2)$$

$$\delta Z_2 = Z_2 - 1 = \left(1 - \frac{d\Sigma}{d\phi} \Big|_{\phi=m} \right)^{-1} - 1 \underset{\text{Lim } x \rightarrow 0}{\sim} \frac{d\Sigma_2}{d\phi} \Big|_{\phi=m}$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\phi} \left[\frac{x}{2\pi} \int_0^1 dx (2m-x\phi) L_v \left(\frac{x\Lambda^2}{(1-x)m^2 + x\nu^2 - x(1-x)\phi^2} \right) \right] = \\ &= \frac{x}{2\pi} \int_0^1 dx (-x) L_v \left(\frac{x\Lambda^2}{(1-x)m^2 + x\nu^2 - x(1-x)\phi^2} \right) + \frac{x}{2\pi} \int_0^1 dx (2m-x\phi) \frac{(1-x)m^2 + x\nu^2 - x(1-x)\phi^2}{x\Lambda^2} \cdot \frac{-x\Lambda^2}{[(1-x)m^2 + x\nu^2 - x(1-x)\phi^2]^2} \cdot (-2x(1-x)\phi) = \\ &= \frac{x}{2\pi} \int_0^1 dx \left[-x L_v \left(\frac{x\Lambda^2}{(1-x)m^2 + x\nu^2 - x(1-x)\phi^2} \right) + (2m-x\phi) \frac{2x(1-x)\phi}{[(1-x)m^2 + x\nu^2 - x(1-x)\phi^2]} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{d\Sigma_2}{d\phi} \Big|_{\phi=m} = \frac{x}{2\pi} \int_0^1 dx \left[-x L_v \left(\frac{x\Lambda^2}{(1-x)m^2 + x\nu^2} \right) + (2-x) \frac{2x(1-x)m^2}{[(1-x)m^2 + x\nu^2]} \right]$$

O que nos dá a primeira contribuição perturbativa à "field strength renormalization" Z_2 , do elétron. Com isso podemos, finalmente, voltar a questão da divergência ultravioleta do vértice da QED (se você já não lembra o que estamos fazendo, volte na página 131 e leia a introdução desta seção). Na pg 125 eliminamos a divergência ultravioleta do vértice fazendo uma subtração "força bruta", o que subtraímos foi:

$$\delta \bar{F}_1(0) = \left(\frac{x}{2\pi} \right) \int_0^1 dx \int_0^y dy \int_0^z dz \delta(x+y+z-1) \left\{ \ln \left[\frac{z\Lambda^2}{(1-y)^2 m^2 + z\nu^2} \right] + \frac{(1-y+z^2)m^2}{(1-y)^2 m^2 + z\nu^2} \right\} =$$

na pg 125 fizemos a subtração antes de introduzir μ , mas é mais geral pensar na introdução de μ antes

$$= \left(\frac{x}{2\pi} \right) \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \left\{ \ln \left[\frac{z\Lambda^2}{(1-y)^2 m^2 + z\nu^2} \right] + \frac{(1-y+z^2)m^2}{(1-y)^2 m^2 + z\nu^2} \right\} = \left(\frac{x}{2\pi} \right) \int_0^1 dz (1-z) \left\{ \ln \left[\frac{z\Lambda^2}{(1-z)^2 m^2 + z\nu^2} \right] + \frac{(1-y+z^2)m^2}{(1-z)^2 m^2 + z\nu^2} \right\} =$$

Calculamos a soma destas duas expressões ($x \rightarrow z$ em δZ_2):

$$\delta \bar{F}_1(0) + \delta Z_2 = \left(\frac{x}{2\pi} \right) \int_0^1 dz \left\{ (1-2z) \ln \left[\frac{z\Lambda^2}{(1-z)^2 m^2 + z\nu^2} \right] + \frac{P(z)}{(1-z)^2 m^2 + z\nu^2} \right\}$$

$$\begin{aligned} P(z) &= (2-z) 2z(1-z)m^2 + (1-z)(1-y+z^2)m^2 = \\ &= m^2(1-z)^2(z+1) \end{aligned}$$

$$\int_0^1 dz (1-2z) \ln \left[\frac{z \Lambda^2}{(1-z)^2 m^2 + z \mu^2} \right] = \int_0^1 \underbrace{dz (1-2z)}_{d\mu} \underbrace{\ln[z]}_{\mu'} +$$

$$\mu = z(1-z)$$

$$d\mu = \frac{1}{z}$$

$$d\mu = \frac{2m^2(1-z) - \mu^2}{m^2(z-1)^2 + z\mu^2}$$

$$+ \int_0^1 \underbrace{dz (1-2z)}_{d\mu} \underbrace{\ln \left[\frac{\Lambda^2}{(1-z)^2 m^2 + z \mu^2} \right]}_{\mu} =$$

$$= \underbrace{(z-z^2) \ln z} \Big|_0^1 + \underbrace{(z-z^2) \ln \left[\frac{\Lambda^2}{(1-z)^2 m^2 + z \mu^2} \right]} \Big|_0^1 - \int_0^1 dz (1-z) +$$

$$- \int_0^1 dz z(1-z) \frac{2m^2(1-z) - \mu^2}{m^2(z-1)^2 + z\mu^2} =$$

$$= - \int_0^1 dz (1-z) - \int_0^1 dz \frac{(1-z) [2m^2(1-z)z - z\mu^2] + (1-z)(1-z^2)m^2 - (1-z)(1-z^2)m^2}{m^2(z-1)^2 + z\mu^2} =$$

$$= - \int_0^1 dz (1-z) - \int_0^1 dz \frac{(1-z) [2m^2(1-z)z - \underbrace{(1-z^2)m^2}_{(1-z^2)m^2} - z\mu^2] + (1-z)(1-z^2)m^2}{m^2(z-1)^2 + z\mu^2} =$$

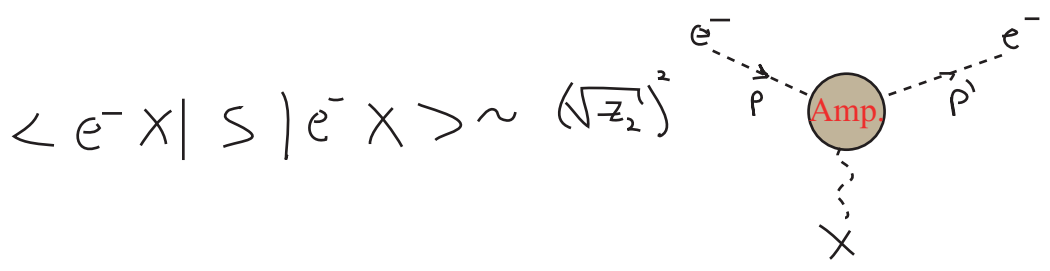
$$= - \int_0^1 dz (1-z) - \int_0^1 dz \left[(1-z)(-1) + \frac{(1-z)(1-z^2)m^2}{m^2(z-1)^2 + z\mu^2} \right] = - \int_0^1 dz \frac{(1-z)(1-z^2)m^2}{m^2(z-1)^2 + z\mu^2}$$

$$\delta F_1(0) + \delta Z_2 = \left(\frac{\mu}{2\pi} \right) \int_0^1 dz \left\{ - \frac{(1-z)(1-z^2)m^2}{m^2(z-1)^2 + z\mu^2} + \overbrace{\frac{m^2(1-z)^2(z+1)}{(1-z)^2 m^2 + z\mu^2}}^{P(z)} \right\} = 0$$

$$(1-z)^2(z+1) - (1-z)(1-z^2) = 0$$

$$\delta \bar{F}_1(0) + \delta Z_2 = 0$$

Agora, considerando a fórmula de LSZ (eq. 98.1), sabemos que:



Por isso, em qualquer espalhamento que envolva este vértice, teremos não apenas $-i e \Gamma^\mu$ mas sim:

$$-i e \Gamma^\mu \rightarrow -i e \Gamma^\mu Z_2$$

Considerando isso na definição dos fatores de forma obtemos:

$$Z_2 \Gamma^\mu = \gamma^\mu \bar{F}_1(q^2) + i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \bar{F}_2(q^2)$$

a "linha" é para indicar a nova correção, agora que consideramos Z_2
 todos os δ são em ordem α

$$1 + \gamma^\mu \delta Z_2 + \delta \Gamma^\mu + \mathcal{O}(\alpha^2) = \gamma^\mu + \gamma^\mu \delta \bar{F}_1(q^2) + i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \delta \bar{F}_2(q^2)$$

$$\gamma^\mu \delta \bar{F}_1(q^2) + \frac{i \sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \delta \bar{F}_2(q^2)$$

$$\sigma^{\mu\nu} q_\nu \Rightarrow \delta \bar{F}_2(q^2) = \delta \bar{F}_2(0) \quad (\text{nada muda para esta estrutura})$$

$$\gamma^\mu \Rightarrow \delta \bar{F}_1(q^2) = \delta \bar{F}_1(q^2) + \delta Z_2 = \delta \bar{F}_1(q^2) - \delta \bar{F}_1(0)$$

que é exatamente a subtração que fizemos na pg 125

Isto nos mostra que, apesar de termos estas divergências circulando pela teoria, pelo menos nessa grandeza observável (o fator de forma elétrico) as divergências se cancelam. É claro que, feito desta forma, parece apenas um milagre numérico com pouca chance de se sustentar em ordens superiores de α .

De uma forma mais geral, para que o fator de forma satisfaça as condições que desejamos:

$$\bar{F}_1(0) = 1$$

representa o que tínhamos antes da subtração na pg 38

podemos introduzir um novo fator Z no vértice, definido por: $\Gamma^\mu(q^2=0) \equiv Z_1^{-1} \gamma^\mu$ (eq. 138.1)

e a condição em F_1 para qualquer ordem de perturbação se torna:

$$Z_1 = Z_2$$

$$Z_2 \Gamma^N = \gamma^N F_1(q^2) + \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_2(q^2) \xrightarrow{q^2=0} Z_2 Z_1^{-1} \gamma^N = \gamma^N F_1(0) + \dots$$

$F_1(0) = Z_2 Z_1^{-1}$

Felizmente, podemos provar que isto é verdade usando as relações de Ward-Takahashi:

(eq 114.1) $\Rightarrow -i q^\mu \Gamma_{ij;N}^{QED(3)}(p_1, p_2; q) = [S_F^c(p_1+q)]^{-1} - [S_F^c(p_1)]^{-1}$

$\Gamma_{ij;N}^{QED(3)}(p_1, p_2; q) \xrightarrow{q \rightarrow 0} Z_1^{-1} \gamma^N$ $S_F(p) = \frac{i Z_2}{\not{p} - m} + \dots$

$\left. \begin{matrix} p_1, p_2 \rightarrow m \\ q_\mu \rightarrow 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow -i q_\mu \Gamma^N \simeq 0 - i \underbrace{\Gamma^N(q=0)}_{Z_1^{-1} \gamma^N} q_\mu + \mathcal{O}(q^2) \simeq -i Z_1^{-1} \not{q}$

$\Rightarrow [S_F^c(p_1+q)]^{-1} - [S_F^c(p_1)]^{-1} \simeq -i Z_2^{-1} [(p_1+q) - m - \not{p}_1 + m] = -i Z_2^{-1} \not{q}$

$Z_1 = Z_2$

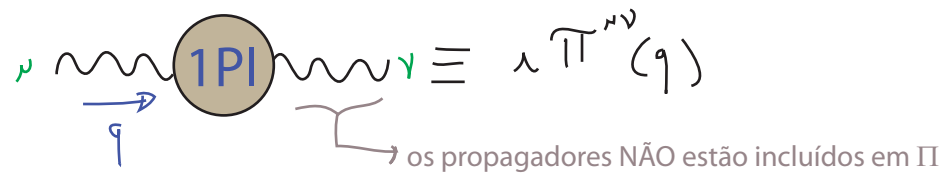
Em qualquer ordem de perturbação

Como uma nota final, note que as identidades de WT são consequência direta da simetria de gauge da teoria e garantiram o cancelamento de divergências em todas as ordens. Este é um resultado importante e bastante geral. No caso de simetrias não Abelianas trocamos as identidades de WT pelas **identidades de Slavnov-Taylor** que têm um papel central nos cancelamentos que precisam ocorrer nestas teorias. Este é mais um motivo para usarmos teorias de gauge.

Auto-energia do fóton

(Peskin 7.5)

Vamos ver agora o que ocorre com o propagador do fóton quando consideramos as correções radiativas. Começemos definindo:



A primeira correção obtida perturbativamente é:

$$= (-ie)^2 (-1) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma^\nu \frac{i}{\not{k} - m} \gamma^\nu \frac{i}{\not{k} + \not{q} - m} \right] \equiv i\Pi^{\nu\nu}(q)$$

Dada sua estrutura de Lorentz: $\Pi^{\nu\nu}(q) = \Pi_A(q^2) g^{\nu\nu} + \Pi_B(q^2) q^\nu q^\nu$

mas também sabemos que (identidade de Ward): $q_\nu \Pi^{\nu\nu}(q) = 0$

$$q_\nu \Pi^{\nu\nu}(q) = \Pi_A(q^2) q^\nu + \Pi_B(q^2) q^2 q^\nu = 0$$

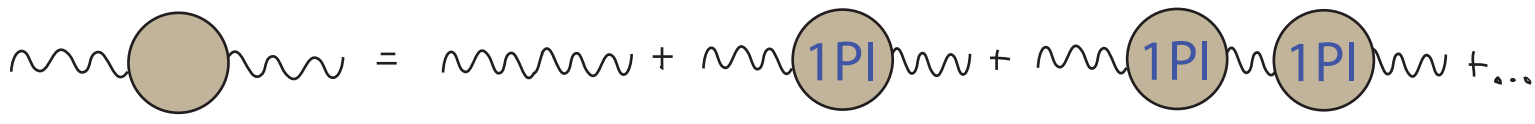
$$\Pi_A(q^2) = -\Pi_B(q^2) q^2 \equiv \Pi(q^2) q^2$$

$$\Pi^{\nu\nu}(q) = (q^2 g^{\nu\nu} - q^\nu q^\nu) \Pi(q^2)$$

 (eq. 140.1)

Não esperamos que haja um polo em $q^2 = 0$, já que a QED não tem nenhum estado de uma partícula que contribua para este diagrama, então assumiremos que $\Pi(q^2)$ é regular em $q^2 = 0$.

Podemos somar todas as contribuições 1PI para obter:



gauge de Feynman

$$= -\frac{i g^{\mu\nu}}{q^2} + -\frac{i g^{\mu\rho}}{q^2} \left[i(q^2 g^{\rho\sigma} - q^\rho q^\sigma) \Pi(q^2) \right] \frac{-i g^{\sigma\nu}}{q^2} + \dots =$$

$$\left(g^{\mu\rho} g^{\rho\sigma} \frac{g_{\sigma\nu}}{q^2} - \frac{q^\rho q^\sigma}{q^2} \right) \Pi(q^2) = \delta_\nu^\mu - \frac{q^\mu q_\nu}{q^2} \Pi(q^2) \equiv \Delta_\nu^\mu \Pi(q^2)$$

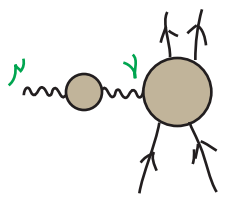
$$\Delta_\nu^\mu \Delta_\beta^\nu = \left(\delta_\nu^\mu - \frac{q^\mu q_\nu}{q^2} \right) \left(\delta_\beta^\nu - \frac{q^\nu q_\beta}{q^2} \right) = \delta_\beta^\mu - \frac{q^\mu q_\beta}{q^2} - \frac{q^\mu q_\beta}{q^2} + \frac{q^\mu q^2 q_\beta}{q^4} = \Delta_\beta^\mu$$

$$= -\frac{i g^{\mu\nu}}{q^2} - \frac{i g^{\mu\rho}}{q^2} \underbrace{\Delta_\nu^\rho}_{\Delta_\nu^\rho} \Pi(q^2) - \frac{i g^{\mu\rho}}{q^2} \Delta_\sigma^\rho \Delta_\nu^\sigma \Pi(q^2) \Pi(q^2) + \dots =$$

$$= -\frac{i g_{\mu\nu}}{q^2} - \frac{i g_{\mu\rho}}{q^2} \Delta^{\rho\nu} \left[\Pi^1(q^2) + \Pi^2(q^2) + \Pi^3(q^2) + \dots \right] =$$

$$= -\frac{i g_{\mu\nu}}{q^2} - \frac{i g_{\mu\rho}}{q^2} \left(\delta^{\rho\nu} - \frac{q^\rho q^\nu}{q^2} \right) \left(\frac{1}{1 - \Pi(q^2)} - 1 \right) = \frac{-i}{q^2(1 - \Pi(q^2))} \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) - \frac{i}{q^2} \left(\frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right)$$

Na prática, para o cálculo de elementos da matriz S, este propagador deverá estar conectado a uma linha fermiônica de um diagrama mais complicado:



$$= \frac{-i}{q^2(1 - \Pi(q^2))} \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) - \frac{i}{q^2} \left(\frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \cdot \mathcal{M}^\nu(q)$$

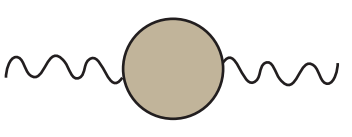
em algum lugar neste elemento de matriz temos:

$$\dots \frac{i}{\not{p}_1 + \not{q} - m} (-i e \not{\gamma}^\nu) \frac{i}{\not{p}_2 - m} \dots$$

E neste caso as identidades de WT nos garantem que: $q_\nu \mathcal{M}^\nu(q) = 0$

É fácil obter isso a partir da eq. 114.1, basta notar o que ocorre se usarmos LSZ do dois lados da equação, buscando um elemento de matriz com dois elétrons reais. Do lado esquerdo temos dois polos, mas cada termo do lado direito tem apenas um, de forma que este não contribui para o elemento de matriz. Para mais detalhes veja a seção 7.4 do Peskin.

Portanto, para fim de cálculo de elementos de matriz S:

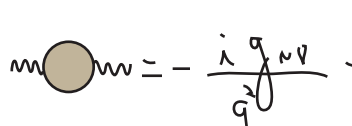


$$= \frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2 \left(1 - \frac{\Pi(q^2)}{1} \right)}$$

REGULAR EM $q^2 = 0$

Continuamos tendo um polo $q^2 = 0$, portanto a massa do fóton não muda. Note que as identidades de Ward-Takahashi (e portanto a simetria de gauge) estão por trás disso. Suponha que fosse possível ter uma correção com a forma proibida por WT, por exemplo:

$$i \Pi^{\mu\nu}(q) = i M^2 g^{\mu\nu} \left(\text{onde falta um termo } -\frac{M^2}{q^2} q^\mu q^\nu \text{ que garantiria WT} \right)$$



$$= -\frac{i g_{\mu\nu}}{q^2} + -\frac{i g_{\mu\rho}}{q^2} \left[i M^2 g^{\rho\sigma} \right] \frac{-i g_{\sigma\nu}}{q^2} + \dots =$$

$$= -\frac{i g_{\mu\nu}}{q^2} - i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \left(\frac{M^2}{q^2} \right) - i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \left(\frac{M^2}{q^2} \right)^2 =$$

$$= -i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \left(1 + \left(\frac{M^2}{q^2} \right) + \left(\frac{M^2}{q^2} \right)^2 + \dots \right) = -i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \frac{1}{1 - \frac{M^2}{q^2}} = -i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2 - M^2}$$

polo em M (desastre!)
↓