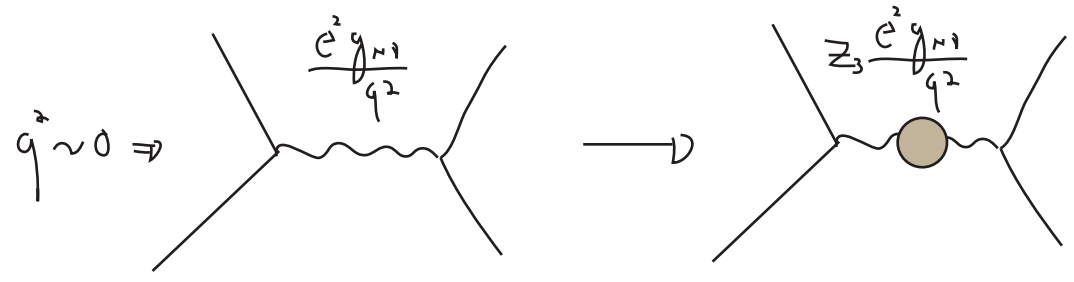
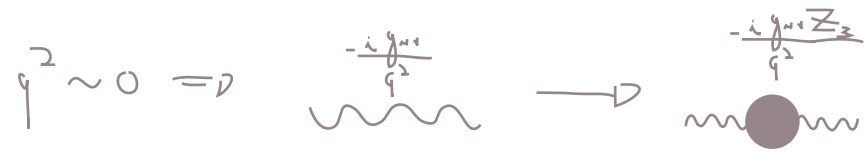


O resíduo do polo em  $q^2 = 0$  é basicamente dado por:

$$Z_3 = \frac{1}{1 - \Pi(0)}$$

Qualquer espalhamento "soft" (com baixa troca de energia e momento) entre dois elétrons será modificado justamente por este fator:



Como temos um  $e^2$  acompanhando este fator  $Z_3$  podemos vê-lo como uma redefinição da carga:

$$e_r = \sqrt{Z_3} e$$

⇓ mudamos a notação (assim como fizemos com a massa)

$$e = \sqrt{Z_3} e_0$$

⇓ carga que aparece na lagrangeana (carga "nua")  
 ↙ carga vestida ou física (o que medimos)

Mais uma vez temos a condição advinda da série perturbativa:

$$\begin{cases} e = e_0 + \mathcal{O}(\alpha) \\ Z_3 = 1 + \mathcal{O}(\alpha) \end{cases}$$

$\Pi(q^2)$  tem outro efeito:

$$q^2 \neq 0 \Rightarrow \frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2} \frac{e^2}{(1 - \Pi(q^2))} \approx \frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2} \frac{e^2 (1 - \Pi_2(0))}{(1 - \Pi_2(q^2))} \approx \frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2} \frac{e^2}{1 + \kappa}$$

$\frac{1}{1 + \kappa} \approx 1 - \kappa + \kappa^2 + \dots$   
 $\frac{1}{1 - \kappa} \approx 1 + \kappa + \kappa^2 + \dots$

$$e_0^2 = \frac{e^2}{Z_3} = e^2 (1 - \Pi(0)) \approx e^2 (1 - \Pi_2(0))$$

$$\approx \frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2} \frac{e^2}{(1 - \Pi_2(q^2))(1 + \Pi_2(0))} \approx \frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2} \frac{e^2}{[1 - (\Pi_2(q^2) - \Pi_2(0))]}$$

$\Pi_2(q^2) - \Pi_2(0) \sim \mathcal{O}(\alpha^2)$

esta grandeza funciona como uma carga elétrica dependente do momento

Em suma, o efeito das correções ao propagador do fóton é o de mudar o acomplamento da teoria e torná-lo dependente de energia (passa a ser um running coupling):

$$\alpha_0 \rightarrow \alpha_{\text{EFF}}(q^2) = \frac{e_0^2/4\pi}{1 - \Pi(q^2)} \stackrel{\text{O}(\alpha)}{\approx} \frac{\alpha}{[1 - (\Pi_2(q^2) - \Pi_2(0))]} \quad \alpha$$

(eq. 143.1)

$$\alpha_{\text{EFF}}(0) \equiv \alpha$$

Calculemos rapidamente  $\Pi(q^2)$ :

$$i\Pi_2^{NN}(q) = -(-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[ \gamma^\mu \frac{i}{k-m} \gamma^\nu \frac{i}{k+q-m} \right]$$

rigorosamente teríamos que usar  $e_0$  e  $m_0$ , mas trocar por  $e$  e  $m$  só introduz um erro de ordem  $\alpha^2$

$$e = e_0(1 + \mathcal{O}(\alpha)) \Rightarrow (e - e_0)^2 = \mathcal{O}(\alpha^2)$$

Seguindo o procedimento usual (parametriz. de Feynman, rotação de Wick), chegamos a:

$$i\Pi_2^{NN}(q) = -4ie^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4l_E}{(2\pi)^4} \frac{-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} l_E^2 + g^{\mu\nu} l_E^2 - 2x(1-x)q^\mu q^\nu + g^{\mu\nu}(m^2 + x(1-x)q^2)}{(l_E^2 + \Delta)^2}$$

(eq. 143.2)

$$\Delta = m^2 - x(1-x)q^2$$

Que obviamente diverge (temos  $l^5$  no numerador). Temos que escolher algum método de regularização. Neste caso a escolha apresenta sutilezas devidas ao fato de estarmos lidando com uma função cuja forma está restrita pela identidade de WT. Se fizéssemos por exemplo a regularização por cut-off (que consiste simplesmente em não integrar no módulo do momento euclidiano até infinito, mas sim até uma escala máxima  $\Lambda$ ):

$$\int_0^\infty dl_E \rightarrow \int_0^\Lambda dl_E \Rightarrow i\Pi_2^{NN}(q) \propto e^2 \Lambda^2 g^{\mu\nu}$$

falta um termo  $-\frac{e^2 \Lambda^2}{q^2} q^\mu q^\nu$  para satisfazer WT

$$\hookrightarrow q_\mu \Pi_2^{\mu\nu} \sim e^2 \Lambda^2 q^\nu \neq 0$$

Este resultado viola a identidade de Ward e daria uma massa para o fóton

De fato não é a divergência em si que está violando a invariância de gauge (as id. WT.) mas sim a forma como escolhemos regularizá-la, a prova disso é que podemos encontrar outras regularizações que preservam as identidades de WT. De uma forma geral, o resultado deve independer da regularização escolhida e quando duas regularizações dão resultados diferentes é porque uma delas (ou as duas) está violando alguma(s) das simetrias da teoria. Se elevarmos as simetrias a categoria de axiomas da teoria, então temos um critério para escolher a regularização correta.

Dentro desta lógica concluímos que a regularização por cut-off feita acima não é boa. Uma outra opção é usar Pauli-Villars, como fizemos nas pgs 34-35, o que preservaria WT mas é um tanto complicado. Felizmente temos uma outra opção, a **regularização dimensional**.

A idéia da **regularização dimensional** é calcular os diagramas como função do número  $d$  de dimensões do espaço tempo. Para  $d$  suficientemente pequeno as integrais são finitas, e então voltamos para o mundo real fazendo  $d \rightarrow 4$

Um exemplo:

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} = \int \frac{d\mathcal{L}_d}{(2\pi)^d} \int_0^\infty dl_E \frac{l_E^{d-1}}{(l_E^2 + \Delta)^2}$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{\pi})^d &= \left( \int dx e^{-x^2} \right)^d = \int d^d x e^{-\sum_{i=1}^d x_i^2} = \int d\mathcal{L}_d \int_0^\infty dx x^{d-1} e^{-x^2} \\ &= \left( \int d\mathcal{L}_d \right) \frac{1}{2} \int_0^\infty d(x^2) (x^2)^{\frac{d}{2}-1} e^{-x^2} = \left( \int d\mathcal{L}_d \right) \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \end{aligned}$$

$x^{d-2} = (x^2)^{\frac{d}{2}-1}$

$\int d\mathcal{L}_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$

 (eq. 144.1)

$$x = \frac{\Delta}{(l_E^2 + \Delta)} \quad dx = -\frac{\Delta}{(l_E^2 + \Delta)^2} dl_E^2$$

$$\int_0^\infty dl_E \frac{l_E^{d-1}}{(l_E^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{2} \int_0^\infty d(l_E^2) \frac{(l_E^2)^{\frac{d}{2}-1}}{(l_E^2 + \Delta)^2} = -\frac{1}{2} \int_1^0 dx \frac{x^{1-\frac{d}{2}} (1-x)^{\frac{d}{2}-1}}{\Delta^{2-\frac{d}{2}}}$$

$$(l_E^2)^{\frac{d}{2}-1} = \left( \frac{\Delta - \Delta x}{x} \right)^{\frac{d}{2}-1} = x^{1-\frac{d}{2}} \Delta^{\frac{d}{2}-1} (1-x)^{\frac{d}{2}-1}$$

Usando então a definição da função beta:

$$\int_0^1 dx x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} = B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

$$\int_0^\infty dl_E \frac{l_E^{d-1}}{(l_E^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-d/2} \frac{\Gamma(2-d/2)\Gamma(d/2)}{\Gamma(2)} \underset{1!}{}$$

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-d/2} \Gamma(2-d/2)\Gamma(d/2)$$

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-d/2} \Gamma(2-d/2)$$

(eq. 145.1)

$\Gamma(z)$  tem polos em todos os números inteiros negativos e em zero, logo teremos polos em

$$d = 4, 6, 8, \dots$$

Como estamos interessados no comportamento perto de  $d = 4$ , podemos definir:  $\epsilon = 4 - d$

$$\Gamma(2 - \frac{d}{2}) = \Gamma(\frac{\epsilon}{2}) = \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon)$$

const. de Euler

$$-\frac{d}{2} = \frac{\epsilon}{2} - 2$$

$$\left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-d/2} = \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{\epsilon/2} = 1 + \frac{1}{2}\epsilon \ln\left(\frac{1}{\Delta}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

$$(4\pi)^{-d/2} = (4\pi)^{\frac{\epsilon-4}{2}} = (4\pi)^{-2} (4\pi)^{\frac{\epsilon}{2}} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left[ 1 + \frac{1}{2}\epsilon \ln(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right]$$

O produto das três expansões acima nos dá:

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} \underset{\substack{d \rightarrow 4 \\ \epsilon \rightarrow 0}}{\sim} \frac{1}{(4\pi)^2} \left[ \frac{2}{\epsilon} - \ln(\Delta) + \ln(4\pi) - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) \right]$$

Comparemos com o que teríamos obtido via regularização de Pauli-Villars

$$\int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{(4\pi)^2} \left[ L_N\left(\frac{\Lambda^2}{\Delta}\right) + \mathcal{O}(\Lambda^{-1}) \right]$$

Reg. Dimensional

Pauli-Villars

De onde vemos que:  $\frac{2}{\epsilon} \longleftrightarrow L_N(\Lambda^2)$

Isso também explica porque temos um logaritmo de algo com dimensão ( $\ln[\Delta]$ ), a escala deste logaritmo está escondida no  $2/\epsilon$

Podemos também provar algumas fórmulas mais gerais:

$$\int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-d/2} \frac{\Gamma(n-d/2)}{\Gamma(n)} \quad (\text{eq. 146.1})$$

$$\int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{\ell_E^2}{(\ell_E^2 + \Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{d}{2} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-d/2-1} \frac{\Gamma(n-d/2-1)}{\Gamma(n)} \quad (\text{eq. 146.2})$$

Além disso é importante lembrar que:  $\begin{cases} g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = d \\ \text{portanto a substituição nas integrais (pg 119) fica: } \ell^\mu \ell^\nu \rightarrow \frac{1}{d} \ell^2 g^{\mu\nu} \\ \delta^\mu \delta^\nu \delta_\mu = -(2-\epsilon) \delta^\nu \\ \delta^\mu \delta^\nu \delta^\rho \delta_\mu = 4 \delta^{\nu\rho} - \epsilon \delta^{\nu\rho} \\ \delta^\mu \delta^\nu \delta^\rho \delta^\sigma \delta_\mu = -2 \delta^{\rho\sigma} \delta^\nu + \epsilon \delta^{\nu\rho} \delta^\sigma \end{cases}$

Voltando ao cálculo de  $\Pi_2^{\mu\nu}(q)$  (eq. 143.2 - com pequenas mudanças para dar conta da mudança de dimensão), os termos com  $\ell^2$  no numerador nos dão:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{(1 - \frac{2}{d}) g^{\mu\nu} \ell_E^2}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} &= (1 - \frac{2}{d}) g^{\mu\nu} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{d}{2} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{1-d/2} \Gamma(1-d/2) = \\ &= - \underbrace{\left(1 - \frac{d}{2}\right) \Gamma(1-d/2)}^{\Gamma(2-d/2)} g^{\mu\nu} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-d/2} \Delta = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma(2-d/2) \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-d/2} (-\Delta g^{\mu\nu}) \end{aligned}$$

Calculando o termos restantes de 143.2 temos (fica como exercício):

$$i\tilde{\Pi}_2(q^2) = (q^2 g^{NV} - g^N g^V) i \Pi_2(q^2) \quad (\text{eq. 147.1})$$

Onde:

$$\Pi_2(q^2) = -\frac{8e^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \, x(1-x) \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-\frac{d}{2}}} \quad (\text{eq. 147.2})$$

De forma que, fazendo a regularização dimensional, obtemos exatamente a forma exigida pelas identidades de WT.

Fazendo o limite  $d \rightarrow 4$  ( $\epsilon \rightarrow 0$ ):

$$\Pi_2(q^2) \rightarrow -\frac{8e^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \, x(1-x) \left[ \frac{2}{\epsilon} - \ln(\Delta) + \ln(4\pi) - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) \right]$$

$-\frac{2\alpha}{\pi}$

a integral da parte divergente nos dá:  $-\frac{2\alpha}{\pi} \frac{1}{3\epsilon}$

Podemos obter a correção na carga:

$$\frac{e^2 - e_0^2}{e_0^2} = \frac{Z_3 e_0^2 - e_0^2}{e_0^2} = Z_3 - 1 = \frac{1}{1 - \Pi(0)} - 1 = \Pi_2(0) \approx -\frac{2\alpha}{3\pi\epsilon}$$

$\uparrow$   
 $\mathcal{O}(\epsilon)$

Temos mais uma vez uma diferença infinita entre o que observamos ( $e^2$ ) e o que aparece na lagrangeana ( $e_0^2$ ), mas essa diferença não é observável. O que é **realmente observável** é a dependência com  $q^2$  desta carga. É fácil ver que esta está livre de divergências:

$$(\text{eq 56.1}) \Rightarrow \alpha_{\text{FFF}}(q^2) = \frac{\alpha}{[1 - \underbrace{(\Pi_2(q^2) - \Pi_2(0))}_{\tilde{\Pi}_2(q^2)}]}$$

$$\Delta = m^2 - x(1-x)q^2$$

$$\tilde{\Pi}_2(q^2) = -\frac{8e^2}{2\pi} \int_0^1 dx \, x(1-x) \left[ \frac{2}{\epsilon} - \ln(\Delta) + \ln(4\pi) - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) + \right. \\ \left. -\frac{2}{\epsilon} + \ln(m^2) - \ln(4\pi) + \gamma - \mathcal{O}(\epsilon) \right]$$

$$\tilde{\Pi}_2(q^2) = -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \, x(1-x) \ln\left(\frac{m^2}{m^2 - x(1-x)q^2}\right)$$

(eq. 147.3)

Primeiro consideremos o caso em que  $q^2 < 0$



neste caso o argumento do logaritmo é positivo e  $\hat{\Pi}_2(q^2)$  é real e analítica em  $q^2$  o que está de acordo com o que assumimos na pg 140.



No caso em que  $q^2 > 0$  (canais s) a função é analítica até  $q^2 = 4 m^2$ , e depois disso desenvolve um corte de ramificação (a partir deste ponto é possível produzir um par elétron-pósitron)

Vejamos como isto afeta o potencial elétrico entre cargas opostas (no limite não relativístico):

$$V(\vec{x}) = -\frac{e_0^2}{4\pi|\vec{x}|} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \frac{-e_0^2}{|\vec{q}|^2} \rightarrow \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \frac{-e^2}{|\vec{q}|^2 [1 - \hat{\Pi}_2(-|\vec{q}|^2)]}$$

$|\vec{q}|^2 \ll m^2$  → massa do elétron



$$\hat{\Pi}_2(-|\vec{q}|^2) \approx -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \left[ -\frac{x(1-x)|\vec{q}|^2}{m^2} + O\left(\frac{|\vec{q}|^2}{m^2}\right) \right] = -\frac{2\alpha}{\pi} \left( -\frac{|\vec{q}|^2}{30m^2} \right)$$

$$V(\vec{x}) = -e^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}}{|\vec{q}|^2 \left[ 1 - \frac{\alpha|\vec{q}|^2}{15\pi m^2} \right]} \approx -e^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}}{|\vec{q}|^2} \left[ 1 + \frac{\alpha|\vec{q}|^2}{15\pi m^2} \right]$$

$$= -e^2 \left[ \frac{1}{4\pi|\vec{x}|} + \frac{\alpha}{15\pi m^2} \delta^3(\vec{x}) \right] = -\frac{\alpha}{|\vec{x}|} - \frac{4\alpha^2}{15m^2} \delta^3(\vec{x})$$

O potencial muda para pequenas distâncias

Isto muda os níveis de energia do átomo de hidrogênio:

$$\Delta E = \int d^3x |\psi(\vec{x})|^2 \left( -\frac{4\alpha^2}{15m^2} \delta^3(\vec{x}) \right) = -\frac{4\alpha^2}{15m^2} |\psi(0)|^2$$

só estados de onda s tem  $\psi(0) \neq 0$

$$\Delta E_{2s} = -1,123 \cdot 10^{-7} \text{ eV}$$

A função delta no potencial é fruto de uma aproximação um pouco grosseira (quando expandimos em  $|\vec{q}|^2/m^2$ , podemos fazer melhor escrevendo:

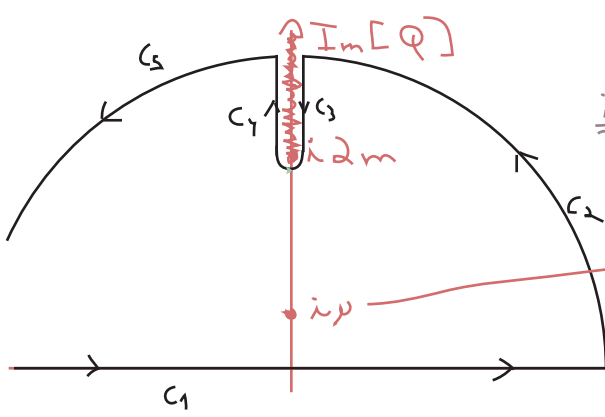
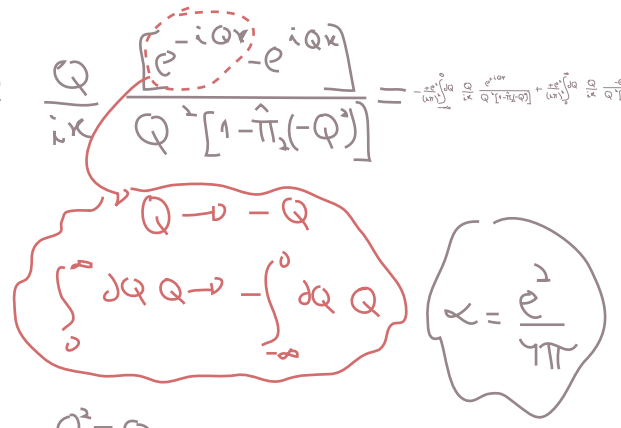
$$|\vec{q}| \equiv Q$$

$$V(\vec{x}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{-e^2 e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}}{Q^2 [1 - \hat{\pi}_2(-Q^2)]} = \frac{-e^2}{(2\pi)^2} \int_0^\pi d\theta \sin(\theta) \int_0^\infty dQ \frac{e^{iQx \cos\theta}}{Q^2 [1 - \hat{\pi}_2(-Q^2)]}$$

$$= \frac{+e^2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dQ \int_1^{-1} d(\cos\theta) \frac{e^{iQx \cos\theta}}{Q^2 [1 - \hat{\pi}_2(-Q^2)]} = \frac{+e^2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dQ \frac{Q [e^{-iQx} - e^{iQx}]}{Q^2 [1 - \hat{\pi}_2(-Q^2)]}$$

$$= \frac{i\alpha}{\pi\kappa} \int_0^\infty dQ \frac{Q e^{iQx}}{Q^2 + \mu^2} [1 + \hat{\pi}_2(-Q^2)]$$

inserido para regularizar o polo em  $Q^2=0$



$$\frac{i\alpha}{\pi\kappa} \oint = \frac{i\alpha}{\pi\kappa} 2\pi i \cdot \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow 0} [1 + \hat{\pi}_2(-iN)] = -\frac{\alpha}{\kappa}$$

contribui para a integral dando o potencial  $-\frac{\alpha}{\kappa}$

$$\oint = \int_{C_1} + \int_{C_2+C_3} + \int_{C_4} \Rightarrow \frac{i\alpha}{\pi\kappa} \int_{C_1} = -\frac{\alpha}{\kappa} - \frac{i\alpha}{\pi\kappa} \int_{C_3+C_4}$$

$\hat{\pi}_2(Q^2)$  tem um Branch Cut para  $\begin{cases} -Q^2 > 4m^2 & \text{Im}[Q] > 2m \\ Q^2 \in \mathbb{R} & \text{Re}[Q] = 0 \end{cases}$

As integrais perto do corte (curvas  $C_3$  e  $C_4$ ) nos dão a correção do potencial:

$$\int_{C_3+C_4} = \int_{i2m+\epsilon}^{i2m-\epsilon} dQ F(Q) + \int_{i\infty-\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dQ F(Q) = - \int_{i2m}^{i\infty} dQ F(Q+\epsilon) + \int_{i2m}^{i\infty} dQ F(Q-\epsilon) = 2i \text{Im} \left[ \int_{i2m}^{i\infty} dQ F(Q-\epsilon) \right]$$

$$F(Q) = \frac{Q e^{iQx}}{Q^2 + \mu^2} [1 + \hat{\pi}_2(-Q^2)]$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Re}[F(Q+\epsilon)] &= \text{Re}[F(Q-\epsilon)] \\ \text{Im}[F(Q+\epsilon)] &= -\text{Im}[F(Q-\epsilon)] \end{aligned} \right\}$$



$$SV(x) = \frac{2\alpha}{\pi\kappa} 2i \operatorname{Im} \left[ \int_{i2m}^{i\infty} dQ \frac{e^{iQx}}{Q^2 + \mu^2} \left[ 1 + \hat{\Pi}_2(-(\mathcal{Q}-\epsilon)^2) \right] \right] =$$

$q \equiv -iQ$

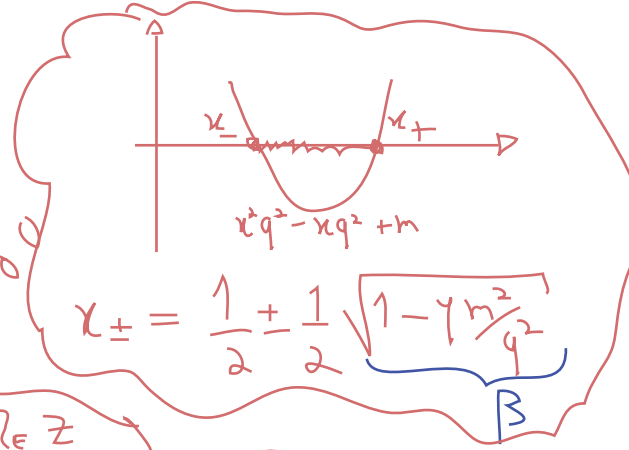
$$= \frac{2\alpha}{\pi\kappa} \operatorname{Im} \left[ \int_{2m}^{\infty} \frac{dq}{q} e^{-qx} \left[ 1 + \hat{\Pi}_2(-(\mathcal{Q}-\epsilon)^2) \right] \right] = \frac{2\alpha}{\pi\kappa} \int_{2m}^{\infty} \frac{dq}{q} e^{-qx} \operatorname{Im} \left[ \hat{\Pi}_2(q^2 + i\epsilon) \right]$$

$Q - \epsilon \sim Q$

Vamos obter a parte imaginária desta função para  $q^2 > 4m^2$  partindo de 147.3:

$$\int_0^1 dx \, x(1-x) \ln \left( \frac{m^2}{m^2 - x(1-x)q^2} \right)$$

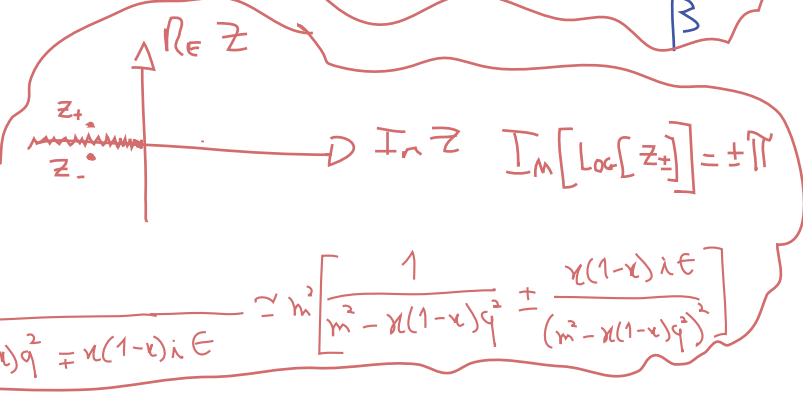
$\rho(x, q^2)$



$$\operatorname{Im}[\rho(x, q^2)] \neq 0 \iff m^2 - x(1-x)q^2 < 0$$

$x_- < x < x_+$

$\sqrt{1 - 4\frac{m^2}{q^2}} \in \mathbb{R} \quad (\forall q^2 > 4m^2)$



$$\operatorname{Im} \left[ \hat{\Pi}_2(q^2 + i\epsilon) \right] = -\frac{2\alpha}{\pi} (-\pi) \int_{x_-}^{x_+} dx (1-x)x =$$

$y \equiv x - \frac{1}{2}$

$$= +2\alpha \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dy \left( \frac{1}{4} - y^2 \right) = +\frac{2\alpha}{3} \sqrt{1 - 4\frac{m^2}{q^2}} \left( 1 + \frac{2m^2}{q^2} \right)$$

$$SV(x) = \frac{-2\alpha}{\pi\kappa} \int_{2m}^{\infty} \frac{dq}{q} e^{-qx} \frac{2\alpha}{3} \sqrt{1 - 4\frac{m^2}{q^2}} \left( 1 + \frac{2m^2}{q^2} \right)$$

Estudemos isto em duas regiões:

Ⓘ  $x \gg \frac{1}{m} \implies$  Neste caso a exponencial  $e^{-qx}$  suprime fortemente o integrando e a principal contribuição vem do limite inferior. Neste caso:  $q \approx 2m$

$$\delta V(x) = \frac{-2\alpha}{\pi x} \int_0^\infty dt \frac{e^{-(t+2m)x}}{(t+2m)} \approx \frac{\alpha}{3} \sqrt{\frac{t}{t+4m}} \frac{(t+2m)^2 + 2m^2}{(t+2m)^2}$$

$\sim \frac{4m^2 + 2m^2}{4m^2} = \frac{3}{2}$

$$t = q - 2m \quad \approx \frac{-2\alpha}{\pi x} \int_0^\infty dt \frac{e^{-(t+2m)x}}{2m} \approx \frac{\alpha}{3} \sqrt{\frac{t}{4m}} \frac{3}{2} + \mathcal{O}(t)$$

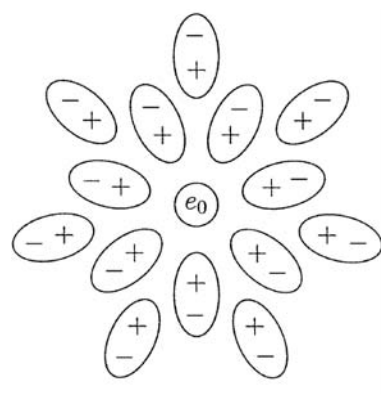
$$x \gg \frac{1}{m} \rightarrow \delta V(x) \approx -\frac{\alpha}{x} \frac{\alpha}{4\sqrt{\pi}} \frac{e^{-2mx}}{(mx)^{3/2}} \quad (\text{eq. 151.1})$$

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} \left( 1 + \frac{\alpha}{4\sqrt{\pi}} \frac{e^{-2mr}}{(mr)^{3/2}} + \dots \right)$$

Potencial de Uehling

O importante é notar que a correção é suprimida exponencialmente para grandes distâncias e a escala é dada pelo comprimento de onda Compton do elétron (de fato  $1/2m$ ). A interpretação é de que a distâncias menores que  $1/2m$  temos uma densidade considerável de pares virtuais elétron-pósitron, isto funciona como um dielétrico que esconde parte da carga.

Polarização do Vácuo:



Vejamos o que acontece quando vamos para o limite oposto:

$$\textcircled{\text{II}} \quad -q^2 \gg m^2 \Rightarrow \frac{1}{\Pi_2(q^2)} \approx -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \, x(1-x) \ln \left( \frac{m^2}{m^2 - x(1-x)q^2} \right)$$

(eq. 147.3)

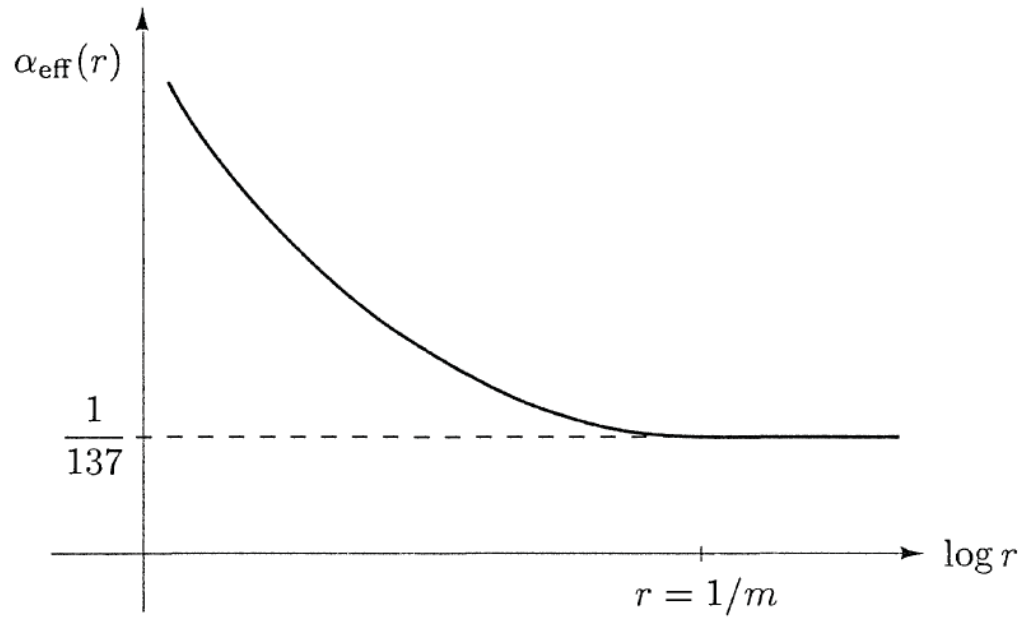
$+ \ln(m^2) - \ln(x(1-x)) - \ln(-q^2)$

$$\approx \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \, x(1-x) \left\{ \ln \left[ \frac{-q^2}{m^2} \right] + \ln(x(1-x)) \right\} = \frac{\alpha}{3\pi} \left[ \ln \left[ \frac{-q^2}{m^2} \right] - \frac{5}{3} + \mathcal{O} \left( \frac{m^2}{q^2} \right) \right]$$

O que na constante de acoplamento nos dá (eq. 143.1):

$$\alpha_{\text{EFF}}^2(q^2) = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \left[ -\frac{q^2}{m^2} e^{5/3} \right]}$$

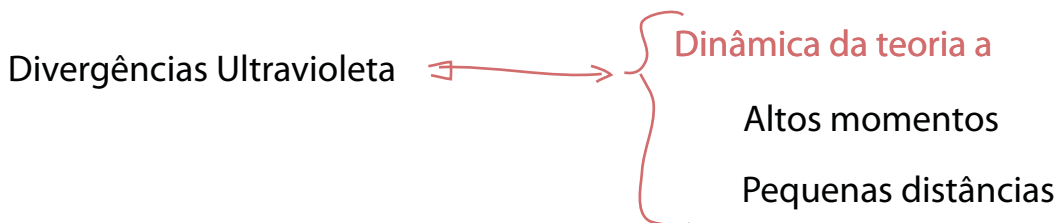
Para espalhamentos muito duros (ou seja, distância de interação pequenas),  $-q^2$  fica grande e o acoplamento efetivo aumenta. Podemos fazer uma imagem qualitativa disto fazendo  $q = 1/r$  e obtendo o gráfico abaixo:



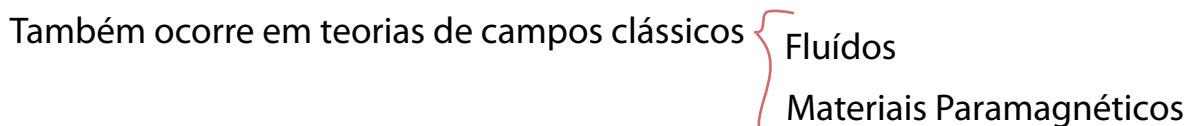
## Renormalização

(Peskin 10.1)

Vimos alguns cancelamentos de divergências no caso da QED, mas por enquanto pode parecer complicado descobrir quais diagramas temos que considerar para que estes cancelamentos ocorram. Além disso a presença de divergências põe em dúvida a validade da série perturbativa. Veremos agora como é possível modificar a teoria para escrevê-la em termos de grandezas físicas finitas desde o princípio de forma que tenhamos uma teoria que possa ser expandida perturbativamente. Começamos pensando um pouco sobre estas divergências.



deve existir um cut-off a partir do qual preciso de uma descrição mais fundamental



Posso estudar ondas sonoras (ou de spin) e fluxos

↳ Esperamos que esta descrição falhe quando chegamos a tamanhos e velocidades típicos dos átomos. Ou seja, quando a descrição contínua falha.