

Contagem de Divergências Ultravioleta - Campo Escalar  $\lambda\phi^n$

(Peskin 10.1, Ryder 9.1 ~ 9.5)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\nu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{n!} \phi^n \quad (\text{EM } d \text{ DIMENSÕES})$$

$n \geq 3$

- $N$  = número de linhas externas
- $V$  = número de vértices
- $P$  = número de propagadores
- $L$  = número de loops

Assim como antes (eq. 154.1):  $L = P - V + 1$

De cada vértice saem  $n$  linhas, então 154.2 fica:  $V = \frac{N + 2P}{n}$

$$D = dL - 2P =$$

$$= d(P - V + 1) - 2P = d + \left[ n \left( \frac{d-2}{2} \right) - d \right] V - \left( \frac{d-2}{2} \right) N$$

(eq. 159.1)

$\left. \begin{array}{l} \text{Não-Renormalizável} \\ \text{Renormalizável} \\ \text{Super-Renormalizável} \end{array} \right\} \begin{array}{l} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} n > \frac{2d}{d-2} \\ n = \frac{2d}{d-2} \\ n < \frac{2d}{d-2} \end{array}$

$d \leq 2 \Rightarrow \forall$  Teoria é Super-Renormalizável

$d=4 \left\{ \begin{array}{l} \lambda\phi^4 \text{ renormalizável} \\ \lambda\phi^6 \text{ não-renormalizável} \end{array} \right.$	$d=3 \left\{ \begin{array}{l} \lambda\phi^4 \text{ super-renormalizável} \\ \lambda\phi^6 \text{ renormalizável} \end{array} \right.$
$\frac{2d}{d-2} = 4$	$\frac{2d}{d-2} = 6$

Outra forma de chegar a 159.1 é analisando a dimensão da lagrangeana. Em unidades naturais a ação tem que ser adimensional:

$Dim[S] = 0 \dots 0$  GeV<sup>0</sup>

$S = \int d^d x \mathcal{L} \Rightarrow \underbrace{Dim[d^d x]}_{\text{GeV}^{-d}} + Dim[\mathcal{L}] = 0$

$\therefore Dim[\mathcal{L}] = d$

Voltando a lagrangeana do campo escalar podemos ver que:

$$\text{Dim} \left[ \frac{1}{2} (\partial_\nu \phi)^2 \right] = d = 2 \underbrace{\text{Dim}[\partial_\nu \phi]}_{\text{Dim}[\phi] + 1}$$

$$\boxed{\text{Dim}[\phi] = \frac{d-2}{2}} \quad (\text{eq. 160.1})$$

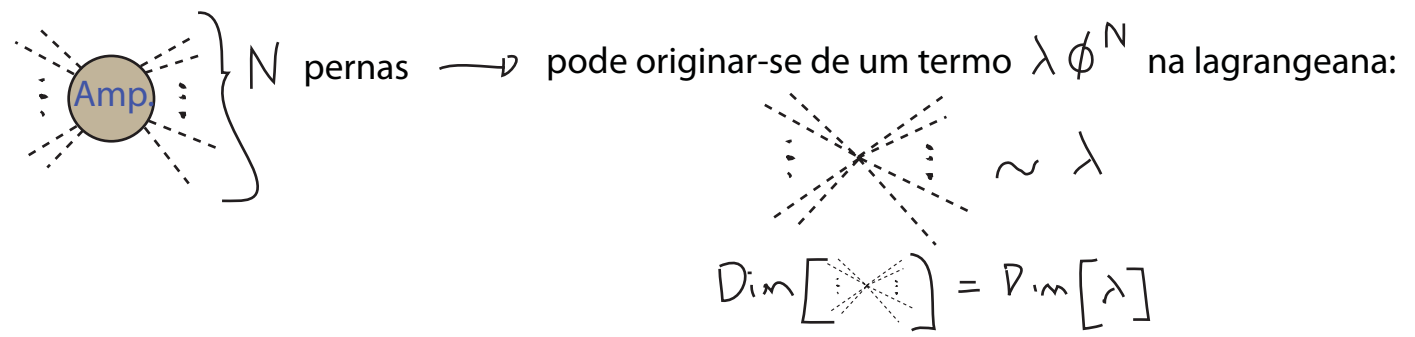
$$\text{Dim}[m^2 \phi^2] = d = 2 \text{Dim}[m] + 2 \underbrace{\text{Dim}[\phi]}_{d-2}$$

$$\text{Dim}[m] = 1 \quad (\text{para nossa sorte! 😊})$$

$$\text{Dim} \left[ \frac{\lambda}{n!} \phi^n \right] = d = \text{Dim}[\lambda] + n \text{Dim}[\phi]$$

$$\boxed{\text{Dim}[\lambda] = d - \frac{n(d-2)}{2}} \quad (\text{eq. 160.2})$$

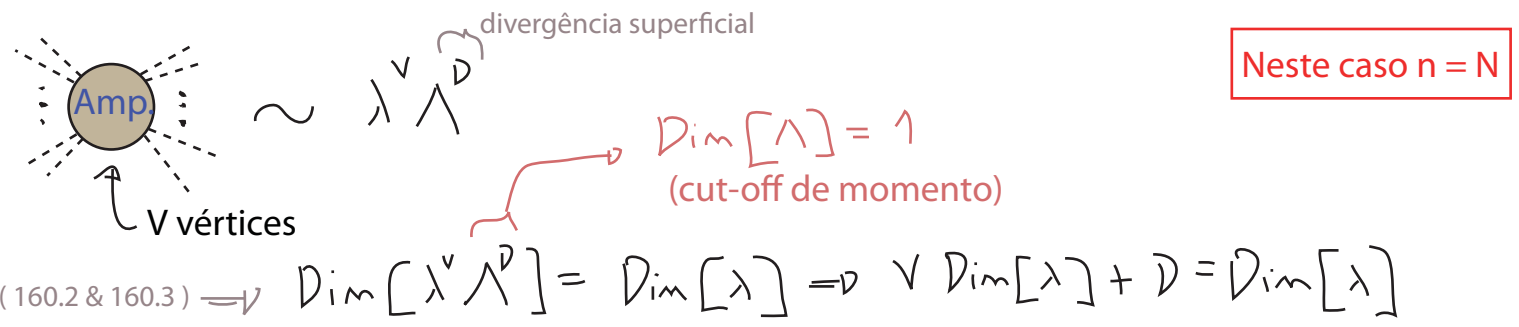
Suponha agora o seguinte diagrama:



Como devo somar sobre todas as possibilidades, qualquer diagrama com N linhas externas terá:

$$\boxed{\text{Dim} \left[ \text{diagram with N lines} \right] = d - \frac{N(d-2)}{2}} \quad (\text{eq. 160.3})$$

Em uma teoria apenas com o vértice  $\lambda \phi^N$  um diagrama com V vértices será proporcional a:



$$(160.2 \ \& \ 160.3) \Rightarrow \text{Dim}[\lambda^V \Lambda^D] = \text{Dim}[\lambda] \Rightarrow V \text{Dim}[\lambda] + D = \text{Dim}[\lambda]$$

$$\boxed{V \left( d - \frac{N(d-2)}{2} \right) + D = d - \frac{N(d-2)}{2}} \quad \begin{matrix} (\text{que concorda com 159.1} \\ \text{para } n = N) \\ (\text{eq. 160.4}) \end{matrix}$$

Aqui fica claro que o que multiplica  $V$  é  $-\text{Dim}[\lambda]$ :

$$D = -\text{Dim}[\lambda] V + \text{Dim}[\lambda]$$

podemos então dizer que:

$$\begin{aligned} \text{Dim}[\lambda] > 0 &\Rightarrow \text{Super-Renormalizável} \\ \text{Dim}[\lambda] = 0 &\Rightarrow \text{Renormalizável} \\ \text{Dim}[\lambda] < 0 &\Rightarrow \text{Não-Renormalizável} \end{aligned}$$

(161.1)

Esta análise poderia ter sido feita também para a QED ou qualquer outra teoria, com a mesma conclusão.

### Teoria Perturbativa Renormalizada

(Peskin 10.2, Ryder 9.3)

Nos preocuparemos agora em achar métodos gerais para redefinir nossa teoria em termos de grandezas observáveis e finitas. Note que no caso das correções radiativas para QED foi possível, uma vez que consideramos todos os diagramas e redefinimos as constantes, ter observáveis finitos. Essencialmente o que fizemos foi a troca:

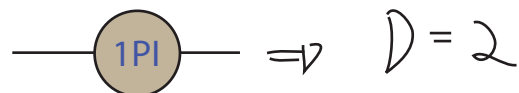


Colocando de forma simples: isto é a renormalização! Daqui para frente o que faremos é encontrar métodos práticos e confiáveis de fazer esta troca (já que até agora fomos fazendo de forma um tanto caso a caso).

Vejamos como fica a teoria  $\lambda\phi^4$ , analisando

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 - \frac{\lambda_0}{4!} \phi^4$$

Analisemos quais são os diagramas divergentes desta teoria. Como ela é simétrica por  $\phi \rightarrow -\phi$  todos os diagramas com um número ímpar de linhas externas dão zero. Segundo a eq. 159.1 (para  $d = 4$ , quando não importa o número de vértices):



$$\text{Diagram with } 1PI \text{ and a cross} \Rightarrow D = 0$$

Escrevendo uma série de Taylor (agora em  $p^2$ ) e estudando a divergência dos coeficientes (como fizemos na pg 156 para QED) obtemos:

$$\text{Diagram with } 1PI \text{ and two external lines} \sim \Lambda^2 + p^2 L_N(\Lambda) + (\text{Termos Finitos})$$

$$\text{Diagram with } 1PI \text{ and four external lines} \sim L_N(\Lambda) + (\text{Termos Finitos})$$

São três constantes divergentes que precisamos "absorver" em redefinições. Faremos isso redefinindo a constante de acoplamento, a massa e o campo em si. Lembrando que:

$$\int d^4x \langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(0) \} | \Omega \rangle e^{i p \cdot x} = \frac{i Z}{p^2 - m^2} + (\text{termos sem polo em } m^2)$$

Se quisermos obter um propagador próximo ao polo que seja parecido com o de uma partícula livre (só que com a massa física) devemos remover este Z. É possível fazer isso definindo:

$$\boxed{\phi \equiv Z^{1/2} \phi_r} \rightarrow \phi_r = Z^{-1/2} \phi \quad (\text{eq. 162.1})$$

O resultado desta substituição na dedução das pgs 89 e 90 será o de fazer sumir o fator Z em toda a conta. O mesmo ocorrerá com todos os Z's que aparecem na fórmula de LSZ (eq. 98.1).

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} Z (d_\nu \phi_r)^2 - \frac{1}{2} m_0^2 Z \phi_r^2 - \frac{\lambda_0}{4!} Z^2 \phi_r^4$$

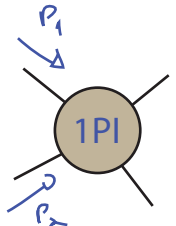
Ainda precisamos nos livrar de  $m_0$  e  $\lambda_0$ . Para tanto definamos:

$$\delta Z = Z - 1 \quad \delta m = m_0^2 Z - m^2 \quad \delta \lambda = \lambda_0 Z^2 - \lambda$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (d_\nu \phi_r)^2 + \underbrace{\delta Z \frac{1}{2} (d_\nu \phi_r)^2}_{\text{contratermos}} - \frac{m^2}{2} \phi_r^2 - \underbrace{\frac{\delta m}{2} \phi_r^2}_{\text{contratermos}} - \frac{\lambda}{4!} \phi_r^4 - \underbrace{\frac{\delta \lambda}{4!} \phi_r^4}_{\text{contratermos}}$$

Importante: note que não somamos estes novos termos, apenas re-escrevemos a lagrangeana em função de novos campos e parâmetros.

Os parâmetros físicos,  $m$  e  $\lambda$ . A massa já está bem definida como a localização do menor polo da função de dois pontos. No caso de  $\lambda$ , temos liberdade de escolha. Escolheremos definir:



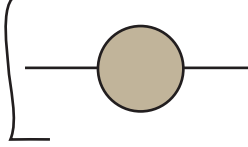
$$p = p_1 + p_2$$

$$\Rightarrow i \Gamma^{(2)}(p^2)$$

$$p^2 = 0 \Rightarrow i \Gamma^{(2)}(p^2) = -i \lambda$$

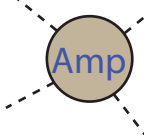
$$\lambda \equiv -\Gamma^{(2)}(p^2 = 0)$$

Essas definições podem ser resumidas em duas equações, chamadas de **condições de renormalização**:



$$\left[ \text{Diagram} = \frac{i}{p^2 - m^2} \right]_{p^2 = m^2}$$

esta equação fixa duas grandezas, a posição do polo e o seu resíduo ( $m$  e  $Z$ ).

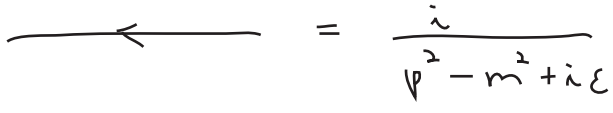


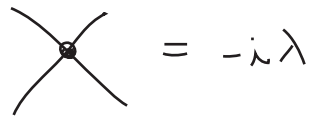
$$= -i \lambda$$

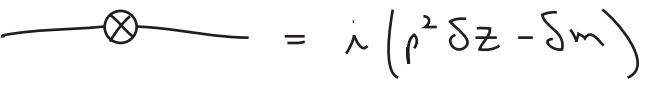
$p^2 = 0 \left\{ \begin{array}{l} s = 4m^2 \\ t = u = 0 \end{array} \right.$

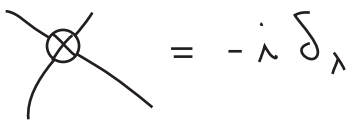
(eq. 163.1)

Esta "nova" lagrangeana tem as seguintes regras de Feynman:



$$= \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$


$$= -i \lambda$$


$$= i (p^2 \delta z - \delta m)$$


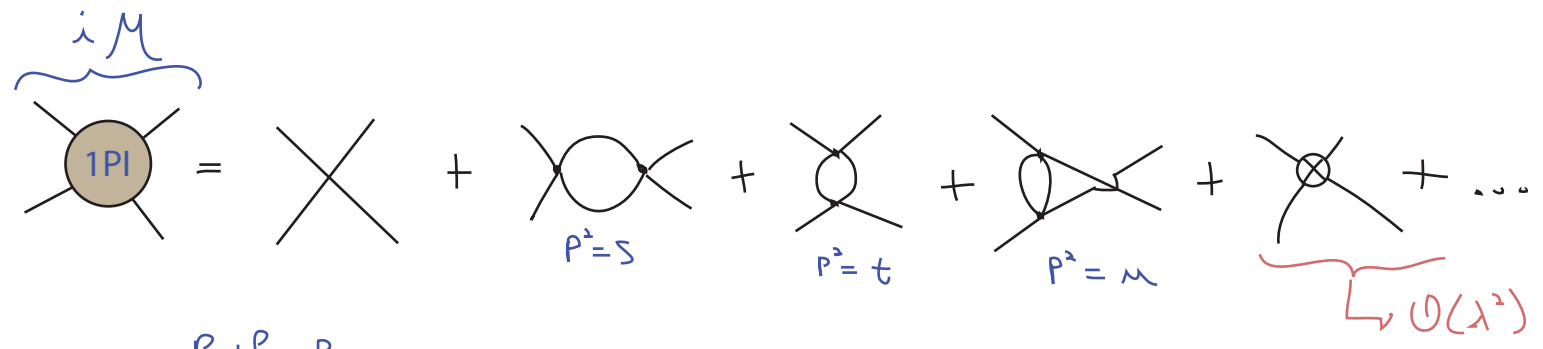
$$= -i \delta \lambda$$

(notem que tratamos os contra termos como novas interações) e a utilização desta lagrangeana com contratermos é chamada de **Teoria de Perturbação Renormalizada**.

- O procedimento a seguir é então o seguinte:
- (1) calculamos a amplitude desejada com as regras de Feynman novas
  - (2) seguimos o procedimento usual para tratar loops (parametrização de Feynman, regularizações, etc...)
  - (3) o resultado vai ser função dos parâmetros nos contratermos ( $\delta z$ ,  $\delta m$  e  $\delta \lambda$  no caso escalar)
  - (4) usamos as condições de renormalização (eq 163.1) para encontrar os parâmetros

As amplitudes resultantes devem ser finitas e independentes do regulador

Vejamos como ficam as divergências de  $\lambda\phi^4$ :



$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram with } p_1, p_2, k, k+p \text{ and } P^2 = s \\
 & = \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2} \frac{i}{(k+p)^2 - m^2} = (-i\lambda)^2 i V(P^2)
 \end{aligned}$$

$$i\mathcal{M} = -i\lambda + (-i\lambda)^2 [iV(s) + iV(t) + iV(u)] - i\delta_\lambda \quad (\text{eq. 164.1})$$

condição de normalização (eq. 163.1)  $\Rightarrow s = 4m^2, u = t = 0$

$$\left. \begin{aligned} & i\mathcal{M} = -i\lambda \\ & \hookrightarrow (-i\lambda)^2 [iV(4m^2) + 2iV(0)] - i\delta_\lambda = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\delta_\lambda = -\lambda^2 [V(4m^2) + 2V(0)] \quad (\text{eq. 164.2})$$

nesta ordem de perturbação

$$\begin{aligned}
 V(s) &= \frac{i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2} \frac{1}{(k+p)^2 - m^2} = \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dy \frac{1}{[m^2 - y(1-y)P^2]^{2-d/2}} \right\} = \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ -\frac{1}{32\pi^2} \int_0^1 dy \left( \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln[4\pi] - \ln[m^2 - y(1-y)s] \right) \right\} =
 \end{aligned}$$

(eq. 164.3)

$$\delta_\lambda = \frac{\lambda^2}{2} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dy \left\{ \frac{1}{[m^2 - y(1-y)4m^2]^{2-d/2}} + \frac{2}{[m^2]^{2-d/2}} \right\} =$$

$$= \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 d\gamma \left( \frac{6}{\epsilon} - 3\delta + 3L_N[4\pi] - L_N[m^2 - \gamma(1-\gamma)4m^2] - 2L_N[m^2] \right)$$

Juntando este resultado ao de 164.1, temos

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= -i\lambda \left[ \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 d\gamma \left\{ \left( \frac{2}{\epsilon} - \delta + L_N[4\pi] - L_N[m^2 - \gamma(1-\gamma)S] \right) + \left( \frac{2}{\epsilon} - \delta + L_N[4\pi] - L_N[m^2 - \gamma(1-\gamma)u] \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left( \frac{2}{\epsilon} - \delta + L_N[4\pi] - L_N[m^2 - \gamma(1-\gamma)t] \right) \right\} - i\frac{\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 d\gamma \left( \frac{6}{\epsilon} - 3\delta + 3L_N[4\pi] - L_N[m^2 - \gamma(1-\gamma)4m^2] - 2L_N[m^2] \right) \right] \\ &= -i\lambda - \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 d\gamma \left\{ L_N\left(\frac{m^2 - \gamma(1-\gamma)S}{m^2 - \gamma(1-\gamma)4m^2}\right) + L_N\left(\frac{m^2 - \gamma(1-\gamma)u}{m^2}\right) + L_N\left(\frac{m^2 - \gamma(1-\gamma)t}{m^2}\right) \right\} \end{aligned}$$

$\delta_z$  e  $\delta_m$  vêm da função de dois pontos:

$$\text{---} \circ \text{---} = -i M^2(p^2)$$

$$\begin{aligned} \text{---} \circ \text{---} &= \text{---} + \text{---} \circ \text{---} + \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} = \\ &= \frac{i}{p^2 - m^2 - M^2(p^2)} \end{aligned}$$

A condição de normalização é (163.1):

$$\left[ \text{---} \circ \text{---} = \frac{i}{p^2 - m^2} \right]_{p^2 \approx m^2}$$

portanto:

$$\left. M^2(p^2) \right|_{p^2=m^2} = 0 \quad (\text{eq. 165.1})$$

e também (expandindo o propagador em torno do polo):

$$p^2 - m^2 - M^2(p^2) = -M^2(p^2) \Big|_{p^2=m^2} + \left( 1 - \frac{dM^2(p^2)}{dp^2} \Big|_{p^2=m^2} \right) (p^2 - m^2) + \mathcal{O}(p^2 - m^2)^2$$

$$\frac{i}{p^2 - m^2 - M^2(p^2)} = \frac{i \left( 1 - \frac{dM^2(p^2)}{dp^2} \Big|_{p^2=m^2} \right)^{-1}}{p^2 - m^2} = 1 \quad \left[ \frac{dM^2(p^2)}{dp^2} \Big|_{p^2=m^2} = 0 \right] \quad (\text{eq. 165.2})$$