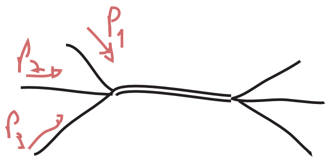
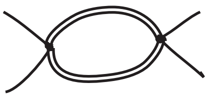
Este procedimento gera contribuições não só a ϕ^2 e ϕ^4, mas também a ordens superiores. O termo $\phi^3\hat{\phi}$ por exemplo:



$$\sim \frac{\lambda_0^2}{(p_1+p_2+p_3)^2}\,\Theta(p_1+p_2+p_3)$$

Obtemos acoplamentos com derivadas também. Para o diagrama abaixo por exemplo, desprezamos o momento das linhas extrenas. Se ao invés disso fizermos uma expansão para o momento externo pequeno, o próximo termo seria:



$$= -\frac{1}{4!}\int d^dx\, \zeta\, \phi^4 - \frac{1}{4}\int d^dx\, \eta\, \phi^2(\partial_\mu\phi)^2 + \dots$$

De forma geral obteremos todas as interações possíveis (de potências arbitratiamente altas) entre o campo ϕ e suas derivadas. Temos diversas contribuições desconectadas que acabam sendo eliminadas pela normalização de qualquer correlator, então podemos finalmente escrever

$$Z = \frac{1}{N}\int [D\phi]_{b\Lambda}\, e^{-\int d^dx\, \mathcal{L}_{EFF}}$$

$$\mathcal{L}_{EFF} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{1}{2}m_0\phi^2 + \frac{1}{4!}\lambda_0\phi^4 + \left(\text{contribuições conectadas de } \hat{\phi}\right) \qquad \text{(eq. 96.1)}$$

Este processo de excluir um campo das linhas externas da teoria fazendo seu momento (ou massa) muito grande comparado com as outras é chamado de "integrate out" o campo (não conheço uma tradução para o português melhor do que "integrar" o campo). Façamos então uma comparação entre a lagrangiana original e a que obtivemos após a integração

$$k' = k/b \qquad x' = x\,b$$

$$0 < k < b\Lambda \rightarrow 0 < |k'| < \Lambda$$

$$\int d^dx\, \mathcal{L}_{EFF} = \int d^dx \Big[\frac{1}{2}(1+\Delta Z)(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{1}{2}(m_0^2+\Delta m^2)\phi^2 + \frac{1}{4}(\lambda_0+\Delta\lambda)\phi^4 +$$
$$+ \Delta C(\partial_\mu\phi)^4 + \Delta D\,\phi^6 + \dots \Big]$$

contribuições da "out-integration" de $\hat{\phi}$

$x \longrightarrow x'$

$$= \int d^dx'\, b^{-d}\Big[\frac{1}{2}(1+\Delta Z)b^2(\partial'_\mu\phi)^2 + \frac{1}{2}(m_0^2+\Delta m^2)\phi^2 + \frac{1}{4}(\lambda_0+\Delta\lambda)\phi^4 + \Delta C\, b^4(\partial'_\mu\phi)^4 + \dots$$

Podemos voltar a uma forma muito parecida com a lagrangeana original fazendo as seguintes definições:

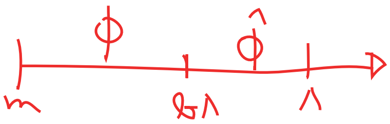
$$\boxed{\begin{aligned}
\phi' &= \left[b^{2-d}(1+\Delta z)\right]^{1/2}\phi \\
m'^2 &= (m_0^2+\Delta m^2)(1+\Delta z)^{-1}\, b^{-2} \\
\lambda' &= (\lambda_0+\Delta\lambda)(1+\Delta z)^{-2}\, b^{d-4} \\
C' &= (\underbrace{C_0}_{=0}+\Delta C)(1+\Delta z)^{-2}\, b^{d} \\
D' &= (\underbrace{D_0}_{=0}+\Delta D)(1+\Delta z)^{-3}\, b^{2d-6} \\
&\vdots
\end{aligned}}$$

(eq. 184.1)

$$\int d^dx\, \mathcal{L}_{EFF} = \int d^dx' \left[\frac{1}{2}(\partial'_\mu\phi')^2 + \frac{1}{2}m'^2\phi'^2 + \frac{1}{4}\lambda'\phi'^4 + C'(\partial'_\mu\phi')^4 + D'\phi'^6 + \dots\right]$$

Pensando em todo o processo, o que fizemos foi:

$$\mathcal{L}(\phi) = \mathcal{L}(\phi, \hat{\phi}) \xrightarrow[\substack{\text{rescaling} \\ k' = k/b \quad x' = xb}]{\text{integrate out } \hat{\phi}} \underline{\mathcal{L}_{EFF}(\phi')}$$



muito parecida com a original (mudam os parâmetros)

Podemos pensar nisso como uma transformação na lagrangiana

Podemos, de fato, repetir o processo para uma nova "fatia" do espaço de momentos ($cb\Lambda < |k| < b\Lambda$). Cada transformação sucessiva resulta em uma nova transformação dos coeficientes dos termos na lagrangeana (como em 97.1). Se fizermos todos os parâmetros desta transformação (b,c,...) infinitesimalmente próximos de 1 (o que equivale a fazer as "fatias" tenderem a zero) temos uma transformação contínua. Neste caso vemos que podemos descrever o resultado de integrar sobre os graus de liberdade com momentos grandes como uma trajetória ou caminho (em inglês é comum usar "flow") sobre o espaço das possíveis lagrangeanas. O conjunto destas transformações é chamado de Grupo de Renormalização (RG) (embora não formem verdadeiramente um grupo, pois não são inversíveis).

Notem que temos então duas formas de atacar o mesmo problema. Suponha que estejamos interessados em um processo qualquer em que os momentos típicos (da partículas reais) sejam muito menores que uma escala qualquer Λ (usemos a teoria escalar para ilustrar):

Método 1: $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{1}{2}m_0^2\phi^2 + \frac{\lambda_0\phi^4}{4!}$

Calculamos a função de n-pontos

Surgem divergências assim que consideramos loops (porque é neles que entra a dinâmica de altas energias)

Renormalização

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + \text{contratermos}$$

$$m^2 = m_0^2 Z - \delta m$$
$$\lambda = \lambda_0 Z^2 - \delta\lambda$$

as divergências aqui (nos δ's) nos forçam assumir que os parâmetros nús (m_0, λ_0) eram infinitos, o que parece criar problemas para a série perturbativa

resultados finitos

Método 2: $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{1}{2}m_0^2\phi^2 + \frac{\lambda_0\phi^4}{4!}$

Diversas transformações sucessivas em que "integramos" os modos de alto momento, embutindo o seu efeito de volta na lagrangeana. Em cada passo temos só integrais finitas e os parâmetros da lagrangeana são também sempre assumidos pequenos.

$(m_0 << \Lambda)$ $(\lambda$ perturbativo$)$

há de se tomar cuidado, pois λ vai mudando e por enquanto assumimos que ele nunca vai ficar forte o bastante para invalidar a teoria de perturbação.

m_0, λ_0 finitos!

$$\mathcal{L}_{EFF} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{\lambda\phi^4}{4!} + \text{todos os termos possíveis (de qualquer dim.)}$$

resultados finitos (o campo que sobra é zero para qualquer momento um pouco acima dos momentos externos considerados)

Os dois métodos devem nos fornecer os mesmos resultados, mas o segundo deixa diversas idéias mais claras. Para começar a teoria de perturbação é válida em qualquer ponto do cálculo, desde que a constante de acoplamento não evolua para valores grandes (o que de fato acontece em algumas teorias). Além disso fica claro que todas as grandezas vão depender da escala que estamos considerando (aquela que sobra no final, depois de integrarmos tudo acima dela).

Vejamos como a lagrangeana tende a variar sobre as transformações do grupo de renormalização. As lagrangeanas são definidas no espaço dos coeficientes de seus termos (que são operadores compostos dos campos), no caso escalar, por exemplo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi'^4 + C(\partial_\mu\phi)^4 + D\phi^6 + \dots$$

parâmetros que definem o espaço de lagrangeanas escalares

da forma que definimos as transformações do RG este termo fica sempre igual.

O ponto $\{m^2, \lambda, C, D, \dots\} = \{0, 0, 0, 0, \dots\}$ é o que chamamos de ponto fixo para as transformações do RG, uma vez que nele temos apenas:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2$$

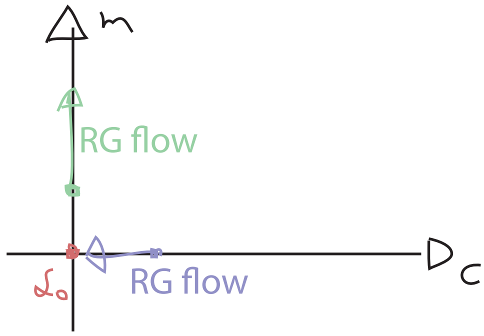
e portanto não há interações que vão corrigir os outros parâmetros e tirá-los de zero. Perto deste ponto podemos ignorar as correções superiores na perturbação e simplificar as transformações 184.1:

(eq. 184.1)

$$\left.\begin{aligned} m'^2 &= (m_0^2 + \Delta m^2)(1+\Delta Z)^{-1} b^{-2} \\ \lambda' &= (\lambda_0 + \Delta\lambda)(1+\Delta Z)^{-2} b^{d-4} \\ C' &= (C + \Delta C)(1 + \Delta Z)^{-2} b^{d} \\ D' &= (D + \Delta D)(1+\Delta Z)^{-3} b^{2d-6} \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} m'^2 &\simeq m_0^2 b^{-2} + \mathcal{O}(\Delta\dots) \\ \lambda'^2 &\simeq \lambda_0 b^{d-4} + \mathcal{O}(\Delta\dots) \\ C' &\simeq C b^{d} + \mathcal{O}(\Delta\dots) \\ D' &\simeq D b^{2d-6} + \mathcal{O}(\Delta\dots) \\ &\vdots \end{aligned}\right.$$

$\{m^2, \lambda, C, D, \dots\} \sim \{0, 0, 0, 0, \dots\}$

Como $b < 1$, os parâmetros com potências negativas de b crescem, e os com potências positivas de b diminuem quando aplicamos a transformação.



Os operadores cujos coeficientes crescem com as transformações sucessivas são chamados de relevantes e os que desaparecem são chamados de irrelevantes. Os operadores cuja potência em b é zero são chamados de marginais, e precisamos das correções perturbativas de ordem mais alta para saber se eles crescem ou descrescem.

no caso escalar: ϕ^2 é relevante sempre (independentemente do numero de dimensões)

$$\phi^4 \begin{cases} d < 4 & \text{relevante} \\ d = 4 & \text{marginal} \\ d > 4 & \text{irrelevante} \end{cases}$$

De uma forma geral, o coeficiente de um operador com N potências de ϕ (escalar) e M derivadas vai se transformar conforme (veja pg 183-184, note que queremos manter o termo cinético normalizado):

$$\boxed{C'_{N,M} = \underbrace{b^{-d}}_{\text{scaling da integral}} \underbrace{b^{\left(\frac{d-2}{2}\right)N}}_{\text{transf. do campo (eq. 97.1)}} \underbrace{b^{M}}_{\text{scaling das derivadas}} C_{N,M} = b^{N\left(\frac{d}{2}-1\right)+M-d} C_{N,M}}$$

(eq. 186.1)

Note que a dimensão do operador é (veja pg 160):

$$Dim\left[\hat{O}_{N,m}\right] = \underbrace{N\left(\frac{d-2}{2}\right)}_{\text{dimensão do campo escalar}} + \underbrace{m}_{\text{cada derivada aumenta a dimensão em 1}} = d_{N,m}$$

Como a lagrangeana deve ter dimensão d, a dimensão do coeficiente deste operador deve ter dimensão:

$$Dim\left[C_{N,m}\right] \equiv D_c = d - d_{N,m} = d - \left[N\left(\frac{d-2}{2}\right) + m\right]$$

que é justamente o que aparece no expoente de b (com sinal trocado). Comparando isto com o resultado da página 161 (eq 161.1), vemos que operadores relevantes ($D_c > 0$) equivalem a interações super-renormalizáveis, operadores marginais ($D_c = 0$) equivalem a interações renormalizáveis e os irrelevantes ($D_c < 0$) equivalem a interações não-renormalizáveis.

Uma outra forma de relacionar o comportamento dos coeficientes com a dimensão do operador consiste em pensar que o coeficiente é naturalmente da ordem de:

$$\text{Coef.} \sim (\text{massa})^{d - d_{N,m}} \sim (\Lambda)^{d-d_{N,m}}$$

$$d < d_{N,N} \Rightarrow \text{Coef.} \sim \frac{1}{\Lambda^{|d-d_{N,m}|}}$$

irrelevante para momentos pequenos

$$|p| << \Lambda \Rightarrow \left(\frac{|p|}{\Lambda}\right)^{d_{N,m}-d} \sim 0$$

$$d > d_{N,N} \Rightarrow \text{Coef} \sim \Lambda^{|d-d_{N,m}|}$$

importante mesmo em pequenos momentos porque Λ é grande

Este é um resultado importante porque nos diz que, pelo menos em regiões próximas ao ponto fixo da lagrangeana livre, qualquer lagrangeana, não importa o quão complicada, acabará se tornando uma lagrangeana com um numero finito de interações renormalizáveis.

Isto muda um pouco nosso ponto de vista sobre teorias renormalizáveis, anteriormente seguimos o seguinte raciocínio:

$$\underbrace{\boxed{\text{não queremos ter um cut-off na teoria}} \xrightarrow{\Lambda \to \infty} \boxed{\text{observáveis não podem depender do cut-off assim são finitos}}}_{\text{Só consigo uma teoria preditiva se não houver termos não-renormalizáveis}}$$

Só consigo uma teoria preditiva se não houver termos não-renormalizáveis

$\hookrightarrow$ Só teorias renormalizáveis são boas (é uma "sorte" que a QED o seja)

sorte no sentido que, nesta visão, não há motivo para uma teoria independente do cut-off ter sido realizada na natureza