

Note que a dimensão do operador é (veja pg 160):

$$Dim [\hat{O}_{N,m}] = N \left( \frac{d-2}{2} \right) + M = d_{N,m}$$

↳ dimensão do campo escalar
↳ cada derivada aumenta a dimensão em 1

Como a lagrangeana deve ter dimensão d, a dimensão do coeficiente deste operador deve ter dimensão:

$$Dim [C_{N,m}] \equiv D_c = d - d_{N,m} = d - \left[ N \left( \frac{d-2}{2} \right) + M \right]$$

que é justamente o que aparece no expoente de b (com sinal trocado). Comparando isto com o resultado da página 161 (eq 161.1), vemos que operadores **relevantes** ( $D_c > 0$ ) equivalem a interações **super-renormalizáveis**, operadores **marginais** ( $D_c = 0$ ) equivalem a interações **renormalizáveis** e os **irrelevantes** ( $D_c < 0$ ) equivalem a interações **não-renormalizáveis**.

Uma outra forma de relacionar o comportamento dos coeficientes com a dimensão do operador consiste em pensar que o coeficiente é naturalmente da ordem de:

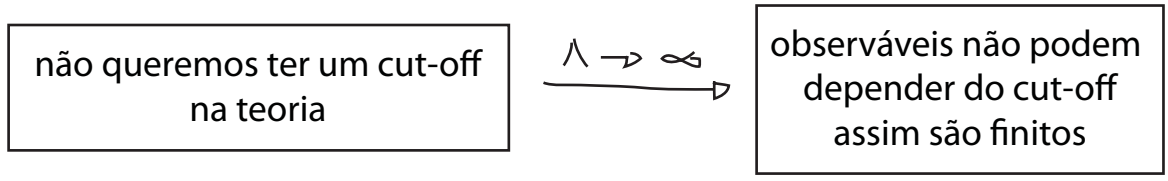
$$C_{OEF.} \sim (massa)^{d - d_{N,m}} \sim (\Lambda)^{d - d_{N,m}}$$

$$d < d_{N,m} \Rightarrow C_{OEF.} \sim \frac{1}{\Lambda^{|d - d_{N,m}|}} \left\{ \begin{array}{l} \text{irrelevante para momentos pequenos} \\ |p| \ll \Lambda \Rightarrow \left( \frac{|p|}{\Lambda} \right)^{d_{N,m} - d} \sim 0 \end{array} \right.$$

$$d > d_{N,m} \Rightarrow C_{OEF.} \sim \Lambda^{|d - d_{N,m}|} \quad \text{importante mesmo em pequenos momentos porque } \Lambda \text{ é grande}$$

Este é um resultado importante porque nos diz que, pelo menos em regiões próximas ao ponto fixo da lagrangeana livre, qualquer lagrangeana, não importa o quão complicada, acabará se tornando uma lagrangeana com um numero finito de interações renormalizáveis.

Isto muda um pouco nosso ponto de vista sobre teorias renormalizáveis, anteriormente seguimos o seguinte raciocínio:

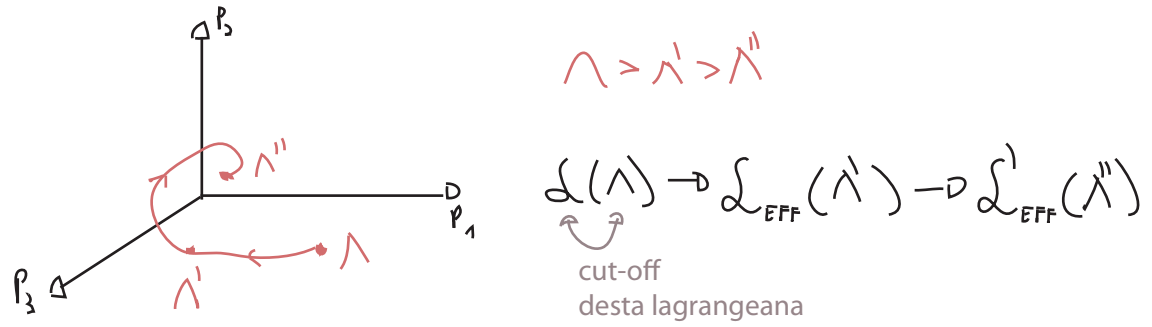


Só consigo uma teoria preditiva se não houver termos não-renormalizáveis

↳ Só teorias renormalizáveis são boas (é uma "sorte" que a QED o seja)

sorte no sentido que, nesta visão, não há motivo para uma teoria independente do cut-off ter sido realizada na natureza ↴

Agora temos uma outra perspectiva, suponha que qualquer teoria de campo tenha um cut-off - mesmo que não saibamos onde ele fica ou qual teoria começa ali (gravidade quântica?) - e que ele esteja bem acima do nosso alcance experimental. O que fazemos é usar as transformações do RG para "trazer" o cut-off para perto da escala em que estamos calculando o espalhamento, e incluímos os efeitos das altas energias na lagrangeana efetiva.



Se neste processo as interações não-renormalizáveis forem suprimidas, então as equações do RG nos dão **uma razão para que a QED seja renormalizável**: qualquer teoria com acoplamentos suficientemente fracos se comportará como uma teoria renormalizável em baixas energias.

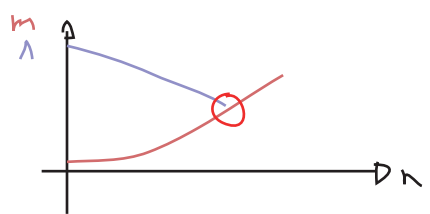
É claro que temos que tomar cuidado com os casos em que os acoplamentos crescem, ou que estamos um pouco mais longe do ponto fixo, vamos ver isso com um pouco mais de detalhe:

$\lambda \phi^4$   
 $\mathcal{L} \sim \mathcal{L}_0$   
 $d > 4$

Apenas o termo de massa é relevante, começamos com  $m_0 \ll \Lambda_0$

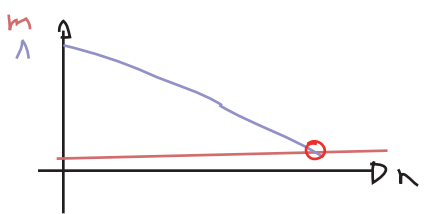
$$m_0^2 \xrightarrow{n \text{ integrações}} m'^2 = m_0^2 e^{-2n}$$

$$\Lambda_0 \longrightarrow \Lambda'$$



Em algum ponto  $m'^2 \sim \Lambda'^2$  e temos que parar aí. Exigir que m' seja uma massa "pequena" significa exigir que a massa:

(a) comece perto do ponto fixo da teoria livre e mude muito pouco com as transformações do RG, e somente o cut-off é que vai baixando;



ou: (b) se ela começar longe de  $\mathcal{L}_0$ , então ela flue para lá e então se comporta como em (a)

A situação (a) exige que a m passe extremamente perto do ponto fixo, e para conseguir (b) precisamos escolher o ponto onde começa a trajetória com muita precisão. Caso consigamos fazer isso, então a previsão é de que mesmo lagrangeanas com operadores altamente não lineares (longe de  $\mathcal{L}_0$ ) terão correlatores a baixas energias que se comportam como teorias praticamente livres de escalares leves. No caso de sistemas magnéticos (onde podemos de fato ajustar as "condições iniciais") este comportamento aparece em modelos com mais de 4 dimensões. Perto da transição de fase de segunda ordem destes modelos temos exatamente esta situação.

$\lambda\phi^4$   
 $d \sim d_0$   
 $d = 4$

Neste caso temos que ficar atentos ao operador  $\phi^4$

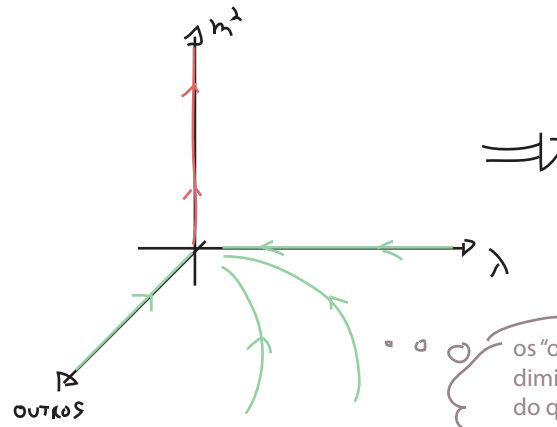
$$\lambda' = (\lambda + \Delta\lambda)(1 + \Delta z)^{-d} \phi^{d-1}$$

eq. 182.1

$\Delta z \sim \frac{1}{\Lambda^2} + \mathcal{O}(\lambda^2)$   
 só corrige a massa (veja pg 167, eq. 167.1)

$$\lambda' \approx \lambda - \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \ln\left(\frac{1}{\Lambda}\right)$$

$\lambda' \rightarrow \lambda'$  diminui lentamente conforme "integramos"



isso quer dizer que  $\lambda\phi^4$  acaba sempre se tornando livre muito longe do cut-off (ou quando fazemos o cut-off ir para infinito). Esta é a trivialidade de  $\lambda\phi^4$  sem cut-off (é claro que a teoria continua útil se temos um cut-off)

os "outros" coeficientes diminuem mais rápido do que  $\lambda$

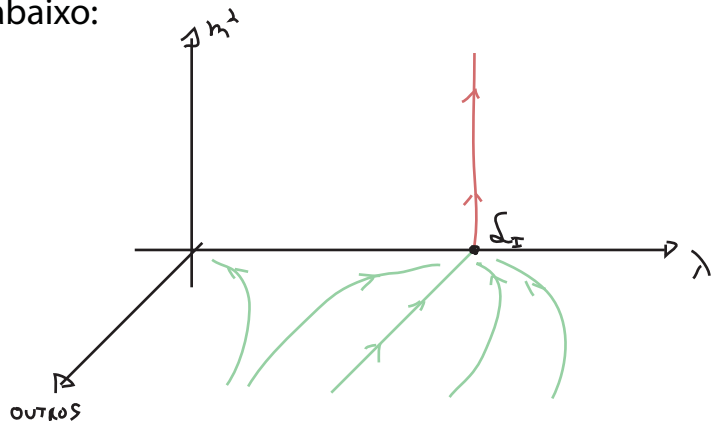
$\lambda\phi^4$   
 $d \sim d_0$   
 $d < 4$

O operador  $\phi^4$  agora é relevante. Mesmo que comecemos perto da teoria livre o valor de  $\lambda$  vai fluir para valores maiores. Assim que nos afastamos da origem, temos que considerar as correções de ordem  $\lambda$  (da eq. 182.1). Para  $d < 4$  temos:

$$\lambda' = \left( \lambda - \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(d/2)} \frac{(1 - b^{d-4}) \Lambda^{d-4}}{d-4} \right) b^{d-4}$$

$\lambda' \sim \lambda b^{d-4}$

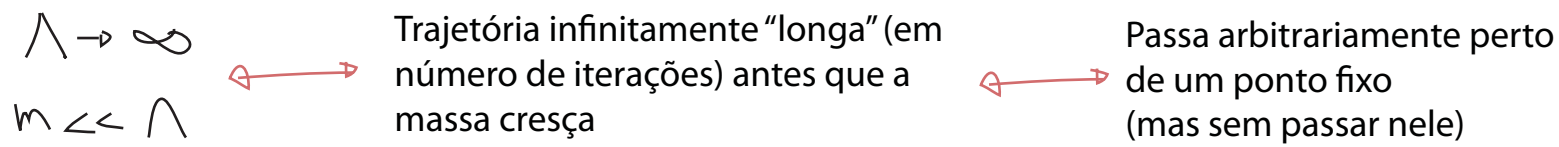
este sinal sugere que em algum ponto o crescimento causado pelo scaling vai ser cancelado pela contribuição do termo não-linear, neste ponto  $\lambda$  pára de mudar - há um segundo ponto fixo. Este ponto se funde como o ponto da lagrangeana livre se fazemos  $d \rightarrow 4$ , e os dois vão ter a mesma propriedade em relação ao crescimento da massa. Então, perto de  $d = 4$  temos o diagrama abaixo:



## A equação de Callan-Symanzik

(Peskin 12.2, Ryder 9.4)

Embora o tratamento que fizemos para o campo escalar seja bastante claro do ponto de vista físico ele pode se tornar bastante difícil tecnicamente se formos tratar teorias mais complicadas do que o campo escalar (sabemos, por exemplo, que a QED tem problemas com regularização por cut-off). Vamos então tentar achar formas mais gerais de encontrar as equações que estabelecem o fluxo dos parâmetros da lagrangeana. Para isso voltaremos ao formalismo das teorias renormalizadas (em que fizemos  $\Lambda \rightarrow \infty$  e inserimos os contratermos)



Perto do ponto fixo, cada iteração a mais move a massa muito pouco, mas vai desaparecendo com todos os operadores irrelevantes. Acabamos com uma teoria que só tem operadores relevantes (os termos originais + contratermos) mas com coeficientes que foram corrigidos uma infinidade de vezes (os  $\delta$ 's são divergentes). Fica claro que as lagrangeanas que estão nestas trajetórias são um subconjunto de todas as lagrangeanas possíveis.

- ▶ toda informação sobre o fluxo dos coeficientes irrelevantes foi jogado fora
- ▶ ainda podemos estudar os relevantes e marginais, mas não em função de  $\Lambda$  e  $b\Lambda$

Neste caso usamos as **condições de renormalização** que são definidas em uma **escala de renormalização** (na pg 163, por exemplo, esta escala foi escolhida como  $p^2 = 0$ ). Vendo como os coeficientes dependem desta escala  $\mu$ , podemos recuperar a informação do fluxo.

Começemos com uma teoria escalar sem massa (o termo  $m^2$  renormalizado é exatamente zero). As condições da página 133 não servem mais (o  $\delta\lambda$  obtido destas condições, por exemplo, tem singularidades para  $m^2 = 0$ , veja pgs 133-134). Usaremos então uma escala arbitrária  $M$ :

$p^2 = -M^2$

$= -i\lambda$

$(p_1 + p_2)^2 = (p_1 + p_3)^2 = (p_1 + p_4)^2 = -M^2$

ficando na região  $p^2 < 0$  temos uma análise análoga ao que faríamos no espaço euclidiano, onde tudo é mais simples. O comportamento para  $p^2 > 0$  é mais complicado pois temos que tomar cuidado com singularidades advindas de estados ligados e ramificações

Com estas novas condições:

$$\langle \Omega | \phi(p) \phi(-p) | \Omega \rangle = \frac{i}{p^2} \quad / \quad p^2 = -m^2$$

$$\phi = Z^{-1/2} \phi_0$$

$$\hookrightarrow \langle \Omega | \phi_0(p) \phi_0(-p) | \Omega \rangle = \frac{iZ}{p^2} \quad / \quad p^2 = -m^2$$

(Z não é mais o resíduo do polo da função de dois pontos)

Para ver o efeito destas condições, considere que a teoria tem uma interação de Yukawa, das pgs. 80-81 temos:

$$\text{Loop Diagram} = \frac{4i\gamma^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx (d-1) \frac{\Gamma(1-d/2)}{\Delta^{1-d/2}}$$

$\Delta = m_f^2 - x(1-x)p^2$

$$m_f^2 = 0 \Rightarrow \Delta \propto p^2$$

$$\text{1PI Circle} = \text{Loop} + \text{Tadpole}$$

$$\text{1PI Circle} = \frac{4i\gamma^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 \frac{dx}{[-x(1-x)p^2]^{1-d/2}} (d-1) \Gamma(1-d/2) - (p^2 \delta Z - \delta m)$$

$$\underbrace{\frac{4i\gamma^2}{(4\pi)^{d/2}} \left[ \frac{2}{\epsilon} - 2 - \gamma - \text{Ln}(-p^2) + \text{Ln}(4\pi) \right]}_{d \sim 2} \int_0^1 \frac{dx}{[x(1-x)]^{1-d/2}}$$

↳ a parte que diverge não depende de  $p^2$  portanto será cancelada por algo equivalente em  $\delta m$ .

$$d \sim 4 \Rightarrow \frac{12i\gamma^2}{(4\pi)^2} \left[ \underbrace{-p^2 \left( \frac{1}{2-\frac{d}{2}} + \text{Loc}(\pi\pi) - \gamma + 1 \right)}_3 - \text{Ln}(-p^2) \right] \int_0^1 \frac{dx}{x(x-1)}$$

↳ não contribui para  $\delta m$ , apenas para  $\delta z$ .

$$\rightarrow -p^2 \left( \frac{1}{2-\frac{d}{2}} + \text{Ln} \left( \frac{1}{-p^2} \right) + C \right)$$

Se fizermos esta regularização por cut-off, as contribuições para  $\delta z$  e  $\delta m$ , se misturam e não fica tão fácil ver que a massa não sai de zero, por isso continuaremos usando reg. dimensional. No entanto, para deixar claro o papel do cut-off, faremos a troca:

$$-\rho^2 \left( \frac{1}{2-d/2} + \text{LN} \left( \frac{1}{-\rho^2} \right) + C \right) \xrightarrow{\text{EQ.}} -\rho^2 \left( \text{LN} \left( \frac{\Lambda^2}{-\rho^2} \right) + C \right)$$

se comportam da mesma forma são diferentes, mas não nos importam

O mesmo seria válido para  $\lambda\phi^4$ , mas teríamos que ir até dois loops para ver a primeira correção em  $\delta Z$ . Essa separação nos permite esquecer totalmente da massa e analisar o acoplamento. Nos diz que (como só temos polos em  $d = 4$ ) as divergências de  $\delta Z$  (e  $\delta\lambda$ ) serão logarítmicas.

Note que poderíamos ter escolhido outra escala de renormalização,  $M'$  para a mesma teoria. As funções de Green da teoria dependem apenas de  $m_0$ ,  $\lambda_0$  e  $\Lambda$ .  $M$  só aparece quando fazemos a troca:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_0 \\ \phi_0 \\ \Lambda \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda \\ \phi \\ M \end{array} \right.$$

$$\underbrace{\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \dots \phi(x_n) \} | \Omega \rangle}_{G^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n)} = Z^{-n/2} \underbrace{\langle \Omega | T \{ \phi_0(x_1) \phi_0(x_2) \dots \phi_0(x_n) \} | \Omega \rangle}_{G_0^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

O que acontece se fizermos uma pequena mudança em  $M$ ?

$$M \rightarrow M + \delta M$$

$$\lambda \rightarrow \lambda + \delta \lambda$$

$$\phi \rightarrow (1 + \delta\eta) \phi \quad \dots \quad 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi = Z^{-1/2} \phi_0 \\ \downarrow \\ \phi = Z^{-1/2} (1 + \delta\eta) \phi_0 \end{array} \right.$$

Na função de Green só importa a mudança em  $Z$  (já que  $G_0$  só depende dos parâmetros núm):

$$Z^{-1/2} \rightarrow (1 + \delta\eta) Z^{-1/2} \rightarrow Z^{-n/2} \rightarrow (1 + \delta\eta)^n Z^{-n/2} \sim (1 + n\delta\eta) Z^{-n/2}$$

$$G^{(n)} \rightarrow (1 + n\delta\eta) G^{(n)}$$

Pensando em  $G$  como uma função de  $M$  e  $\lambda$ , esta transformação é dada por:

$$dG^{(n)} = \frac{\partial G^{(n)}}{\partial M} \delta M + \frac{\partial G^{(n)}}{\partial \lambda} \delta \lambda = n\delta\eta G^{(n)} \quad (\text{eq. 192.1})$$

Definindo os parâmetros adimensionais:

$$\beta \equiv \frac{M}{\delta M} \delta \lambda \quad \text{Função beta} \quad (\text{eq. 193.1})$$

$$\gamma \equiv -\frac{M}{\delta M} \delta \eta \quad \text{Função gama} \quad (\text{eq. 193.2})$$

Temos:

$$\left( \frac{\partial G^{(n)}}{\partial M} \delta M + \frac{\partial G^{(n)}}{\partial \lambda} \delta \lambda - n \delta \eta G^{(n)} = 0 \right) \times \frac{M}{\delta M}$$

$$M \frac{\partial G^{(n)}}{\partial M} + \underbrace{\frac{M}{\delta M} \delta \lambda}_{\beta} \frac{\partial G^{(n)}}{\partial \lambda} - n \underbrace{\frac{M}{\delta M} \delta \eta}_{-\gamma} G^{(n)} = 0$$

$$\left[ M \frac{\partial}{\partial M} + \beta \frac{\partial}{\partial \lambda} + n \gamma \right] G^{(n)}(x_1, \dots, x_n; M, \lambda) = 0$$

Pensemos sobre  $\beta$  e  $\gamma$ :

→ são os mesmo para qualquer  $n$   
 → são adimensionais, e não há qualquer outro parâmetro com dimensão de massa  
 $\beta(x, M, \lambda) \Rightarrow \beta = \beta(\lambda) \quad \gamma = \gamma(\lambda)$

$$\left[ M \frac{\partial}{\partial M} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} + n \gamma(\lambda) \right] G^{(n)}(x_1, \dots, x_n; M, \lambda) = 0$$

Equação de Callan- Symanzik (eq. 193.3)

$\beta(\lambda) \leftrightarrow$  ligada a mudança na constante de acoplamento

$\gamma(\lambda) \leftrightarrow$  ligada a mudança no campo (field strength)

Esta equação nos diz que a mudança em  $M$  será sempre acompanhada e compensada pelas outras duas.

Podemos generalizar o argumento acima para outras teorias renormalizáveis (com acoplamentos adimensionais). Haverá uma função  $\gamma$  para cada campo e uma função  $\beta$  para cada acoplamento. No caso da QED (sem massa,  $m_e = 0$ ) ( $n$  é o número de elétrons e  $m$  o de fótons):

$$\left[ M \frac{\partial}{\partial M} + \beta(e) \frac{\partial}{\partial e} + n \gamma_2(e) + m \gamma_3(e) \right] G^{(n, m)}(x_1, \dots, x_{n+m}; M, e) = 0 \quad (\text{eq. 193.4})$$