Definindo os parâmetros adimensionais:

$$\boxed{\beta \equiv \frac{M}{\delta M}\delta\lambda} \text{ Função beta} \qquad \text{(eq. 193.1)}$$

$$\boxed{\gamma \equiv -\frac{M}{\delta M}\delta\eta} \text{ Função gama} \qquad \text{(eq. 193.2)}$$

Temos:

$$\left(\frac{\partial G^{(n)}}{\partial M}\delta M + \frac{\partial G^{(n)}}{\partial \lambda}\delta\lambda - n\delta\eta\, G^{(n)} = 0\right) \times \frac{M}{\delta M}$$

$$M\frac{\partial G^{(n)}}{\partial M} + \underbrace{\frac{M}{\delta M}\delta\lambda}_{\beta}\frac{\partial G^{(n)}}{\partial \lambda} - n\underbrace{\frac{M}{\delta M}\delta\eta}_{-\gamma}\, G^{(n)} = 0$$

$$\left[M\frac{\partial}{\partial M} + \beta\frac{\partial}{\partial\lambda} + n\gamma\right]G^{(n)}(x_1,\dots,x_n; M, \lambda) = 0$$

Pensemos sobre β e γ:

são os mesmo para qualquer n

são adimensionais, e não há qualquer outro parâmetro com dimensão de massa

$$\begin{matrix}\beta \\ \gamma\end{matrix}(\cancel{n}, \cancel{M}, \lambda) \Rightarrow \beta = \beta(\lambda) \qquad \gamma = \gamma(\lambda)$$

$$\boxed{\left[M\frac{\partial}{\partial M} + \beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda} + n\gamma(\lambda)\right]G^{(n)}(x_1,\dots,x_n; M, \lambda) = 0}$$

Equação de Callan- Symanzik (eq. 193.3)

$\beta(\lambda) \longleftrightarrow$ ligada a mudança na constante de acoplamento

$\gamma(\lambda) \longleftrightarrow$ ligada a mudança no campo (field strength)

Esta equação nos diz que a mudança em M será sempre acompanhada e compensada pelas outras duas.

Podemos generalizar o argumento acima para outras teorias renormalizáveis (com acoplamentos adimensionais). Haverá uma função γ para cada campo e uma função β para cada acoplamento. No caso da QED (sem massa, $m_e = 0$) (n é o número de elétrons e m o de fótons):

$$\boxed{\left[M\frac{\partial}{\partial M} + \beta(e)\frac{\partial}{\partial e} + n\,\gamma_2(e) + m\,\gamma_3(e)\right]G^{(n,m)}(x_1 \dots x_{n+m}; M, e) = 0}$$

(eq. 193.4)

Calculando as funções β e γ

Mais uma vez, fiquemos na teoria $\lambda\phi^4$ sem massa. Como estas funções não dependem de qual função de Green usamos na equação de Callan-Symanzik (CS), podemos escolher as mais simples:

sabemos que daqui só saem contribuições para δm

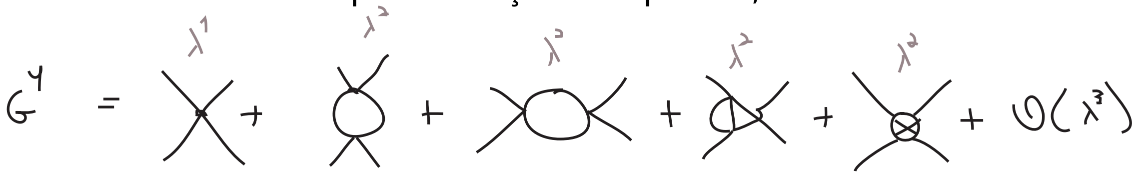
Como o cáculo de dois loops é trabalhoso, acaba sendo mais simples usar a função de 4 pontos. No entanto podemos obter alguma informação sobre γ daqui: como não há correções a $G^{(2)}$ em ordem λ, só introduzimos a dependência em M e λ em $G^{(2)}$ em ordem λ^2. Assim a equação de CS para $G^{(2)}$ fica:

$$\left[M \cancel{\frac{d}{dM}} + \beta(\lambda)\cancel{\frac{d}{d\lambda}} + 2\gamma(\lambda)\right] G^{(2)}(p) = 0$$

$$\mathcal{O}(\lambda) \longrightarrow 0 \qquad 0$$

$$\gamma(\lambda) = 0 + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

Passando então para a função de 4 pontos, temos:



$$\left[M \frac{d}{dM} + \beta(\lambda)\frac{d}{d\lambda} + 4\gamma(\lambda)\right] G^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) = 0$$

Já calculamos esta função de Green (na verdade a versão amputada dela, pgs 164-165):

$$G^4 = \left[-i\lambda + (-i\lambda)^2\left[i\,V(s) + i\,V(t) + i\,V(u)\right] - i\,\delta_\lambda\right] \cdot \underbrace{\prod_{i=1}^{4} \frac{i}{p_i^2}}$$

$V(s)$ definido na eq. 164.3

propagadores da pernas externas
(que tem correções $\sim \lambda^2$ conforme vimos na pg 166)

Nossa condição de renormalização agora exige que as correções a λ se cancelem em:

$$s = t = u = -M^2$$

O que nos dá um contratermo:

$$\delta_\lambda = (-i\lambda)^2 \cdot 3V(-M^2) = \frac{3\lambda^2}{2(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \, \frac{\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)}{\left(x(1-x)M^2\right)^{2-d/2}}$$

$$d \to 4: \quad \delta_\lambda = \frac{3\lambda^2}{2(4\pi)^2}\left[\frac{1}{2-\frac{d}{2}} - \ln(M^2) + \underbrace{\dots}_{\text{indep de M e finito}}\right]$$

Temos então:

$$M\frac{d}{dM}G^{(4)} \underbrace{=}_{\mathcal{O}(\lambda^2)\ \text{(vem tudo de } \delta_\lambda)} \frac{3i\lambda^2}{(4\pi)^2}\prod_{i=1}^{4}\frac{i}{p_i^2} \qquad \frac{d}{d\lambda}G^{(4)} = \left(-i + \mathcal{O}(\lambda)\right)\prod_{i=1}^{4}\frac{i}{p_i^2}$$

$$\delta_\lambda \sim \mathcal{O}(\lambda^2)$$

$$\left[M\frac{d}{dM} + \beta(\lambda)\frac{d}{d\lambda} + 4\underbrace{\gamma(\lambda)}_{\mathcal{O}(\lambda^2)}\right]G^{(4)} = 0$$

$$\frac{3i\lambda^2}{(4\pi)^2}\prod\frac{i}{p_i^2} + \beta(\lambda)\left(-i + \mathcal{O}(\lambda)\right)\prod\frac{i}{p_i^2} + \overbrace{4\gamma(\lambda)G^{(4)}}^{\mathcal{O}(\lambda^3)} = 0$$

tem que ter no mínimo de ordem λ^2

$$\Rightarrow \boxed{\beta = \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^2} + \mathcal{O}(\lambda^3)} \qquad \text{(eq. 195.1)}$$

$\beta(\lambda) = A + B\lambda + C\lambda^2 + \dots$

$(\lambda^0) \Rightarrow \boxed{-iA = 0}$

$(\lambda^1) \Rightarrow A - iB = 0 \Rightarrow \boxed{B = 0}$

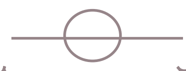
$(\lambda^2) \Rightarrow \frac{3i}{(4\pi)^2} - iC = 0 \quad \boxed{C = \frac{3}{(4\pi)^2}}$

Com este resultado, podemos voltar na equação de CS para a função de dois pontos e obter a primeira contribuição à função γ:

$$\left[M\frac{d}{dM} + \underbrace{\beta(\lambda)}_{\mathcal{O}(\lambda^2)}\frac{d}{d\lambda} + 2\underbrace{\gamma(\lambda)}_{\mathcal{O}(\lambda^2)}\right]\underbrace{G^{(2)}}_{A + B\lambda^2 + f_2(M)\lambda^2 + \mathcal{O}(\lambda^3)} = 0 \qquad \beta(\lambda)\frac{d}{d\lambda}G^{(2)} \sim \mathcal{O}(\lambda^3)$$

$$(\lambda^2) \Rightarrow \lambda^2 M\frac{df_2(M)}{dM} + 2\gamma(\lambda)A = 0 \Rightarrow \boxed{\gamma(\lambda) = -\frac{\lambda^2}{2A} M\frac{df_2(M)}{dM}} \qquad \text{(eq. 195.2)}$$

que pode ser obtido calculando



De uma forma mais geral (qualquer teoria escalar renormalizável sem massa), teremos sempre:

$$G^{(\lambda)}(p) = \text{———} + \underbrace{(\text{LEAD. LOOP})}_{\text{contribuição não-nula com o menor número de loops}} + \text{———}\otimes\text{———} + \dots$$

$$= \frac{i}{p^2} + \frac{i}{p^2}\left[\cancel{-i}\,\cancel{p^2} A \underbrace{\ln\left(\frac{\Lambda^2}{-p^2}\right)}_{\text{conforme mostramos na pág. 105 (divergências em } \delta Z \text{ são Logs)}} + \text{termos finitos}\right]\frac{\cancel{i}}{\cancel{p^2}} + \frac{i}{p^2}(ip^2\delta z)\frac{i}{p^2} + \dots$$

$$\frac{\partial G^{(\lambda)}}{\partial M} = -\frac{i}{p^2}\frac{\partial}{\partial M}\delta z$$

depende da teoria

$$A \sim \mathcal{O}(\lambda^n) \begin{cases} G \sim \underline{\underline{\text{CONST.}}} + \mathcal{O}(\lambda^n) \\ \dfrac{\partial G}{\partial \lambda} \sim \mathcal{O}(\lambda^{n-1}) \end{cases}$$

$$\Bigg[M\frac{\partial}{\partial M}G^{(\lambda)} + \underbrace{\underbrace{\beta(\lambda)}_{\mathcal{O}(\lambda)}\underbrace{\frac{\partial}{\partial\lambda}G^{(\lambda)}}_{\mathcal{O}(\lambda^{n-1})}}_{\mathcal{O}(\lambda^n)} + \underbrace{\underbrace{2\gamma(\lambda)}_{\mathcal{O}(\lambda)}\underbrace{G^{(\lambda)}}_{\text{CONST.}+\mathcal{O}(\lambda^n)}}_{\mathcal{O}(\lambda)}\Bigg] = 0$$

$n > 1 \Rightarrow$ A contribuição do termo envolvendo β vai ser sempre de ordem superior a que envolve γ

$$-\frac{i}{p^2}M\frac{\partial}{\partial M}\delta z + 2\gamma(\lambda)\frac{i}{p^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\gamma = \frac{1}{2}M\frac{\partial}{\partial M}\delta z} \qquad \text{(eq. 196.1)}$$

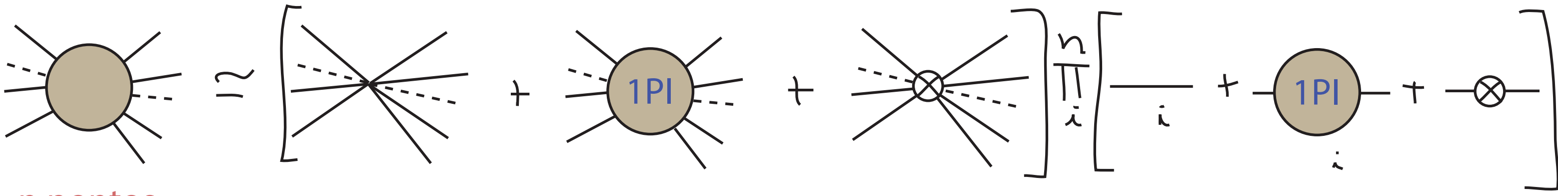
Se lembrarmos que δz tem que cancelar a divergência dos loops em alguma escala $-p^2 = M$, concluímos que:

$$\left\{\frac{i}{p^2}\left[A\ln\left(\frac{\Lambda^2}{-p^2}\right)\right] + \frac{i}{p^2}(ip^2\delta z)\frac{i}{p^2}\right\}_{p^2=-M^2} = 0$$

$$\delta z = A\ln\left(\frac{\Lambda^2}{M^2}\right) \Rightarrow \gamma = \frac{1}{2}M\cdot A\cdot\left(-\frac{2}{M}\right) = \underline{-A}$$

coeficiente do logaritmo divergente
que contribuí para δz
(o mesmo ocorre na QED ou Yukawa)

Podemos obter algo análogo para a função β. Pensemos numa teoria com um acoplamento g de um vértice com n linhas, a função de n pontos será dada por:



n pontos

$P(M)$

$\frac{i}{p_i^2} + \frac{i}{p_i^2}\left[A_i \ln\left(\frac{\Lambda^2}{-p_i^2}\right)\right] - \frac{i}{p_i^2}\delta z_i$

$$G^{(n)} \simeq \left(\prod_i \frac{i}{p_i^2}\right)\left[-ig - iB\ln\left[\frac{\Lambda^2}{-p^2}\right] - i\delta_g - ig\sum_i^n\left(A_i\ln\left(\frac{\Lambda^2}{-p_i^2}\right) - \delta z_i\right)\right]$$

(só estou interessado nas correções a um loop (por isso ignoro os produtos entre contratermos e entre 1PIs)

algum invariante do tipo das variáveis de Mandelstam estamos assumindo que as condições de renorm. são para todas as variáveis deste tipo ~ $-M^2$

$$\left[M\frac{d}{dM} + \beta(g)\frac{d}{dg} + n\gamma(g)\right]G^{(n)}(P) = 0$$

$$\boxed{n\gamma(\lambda) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}M\frac{\partial}{\partial M}\delta z_i}$$

$$\left(\prod_i^n \frac{i}{p_i^2}\right)\left\{M\frac{d}{dM}\left(-i\delta_g + ig\sum_i^n \delta z_i\right) + \beta(g)\underbrace{\frac{dG^{(n)}}{dg}}_{\left[-i+\mathcal{O}(g^{\geq 1})\right]} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}M\frac{\partial}{\partial M}\delta z_i\,\underbrace{G^{(n)}}_{-ig+\mathcal{O}(g^{\geq 2})}\right\} = 0$$

Não sabemos, a priori, em que ordem de g temos a primeira contribuição a δ_g ou δz_i, mas para que β possa cancelar estas contribuições ele tem que começar a receber contribuições na mesma ordem em que δ_g ou $g\,\delta z_i$ e, em L.O., podemos ignorar <u>estes termos</u>

$$M\frac{d}{dM}\left(-i\delta_g + ig\sum_i^n \delta z_i\right) - i\beta(g) - ig\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}M\frac{\partial}{\partial M}\delta z_i = 0$$

$$\boxed{\beta(g) = M\frac{d}{dM}\left(-\delta_g + \frac{1}{2}g\sum_i^n \delta z_i\right)} \qquad \text{(eq. 197.1)}$$

Mais uma vez as condições de renormalização nos dizem quem são δg e δz

$$\delta_g = -B\ln\left(\frac{\Lambda^2}{M^2}\right) + \ldots$$

as partes finitas independem de M

$$\boxed{\beta(g) = -2B - g\sum_i A_i}$$ (eq. 198.1)

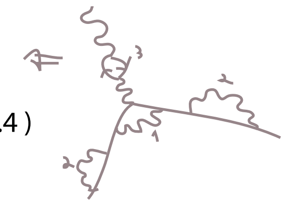
Um fato importante a ser notado é que, como não estamos interessados na parte finita (de fato somente no coeficiente da divergência) - não precisamos ser muito cuidadosos ao especificar as condições de normalização, basta fazer qualquer invariante (que fixa a escala dos logarítmos) igual a $-M^2$. É claro que isso só vale em L.O.

Argumentos semelhantes se aplicam para teorias mais complicadas. No caso da QED temos (gauge de Feynman):

$$\boxed{\gamma_2(e) = \frac{1}{2} M \frac{\partial}{\partial M}\delta_2}$$ (eq. 198.2)

$$\boxed{\gamma_3(e) = \frac{1}{2} M \frac{\partial}{\partial M}\delta_3}$$ (eq. 198.3)

$$\boxed{\beta(e) = M\frac{\partial}{\partial M}\left(-e\delta_1 + e\delta_2 + \frac{e}{2}\delta_3\right)}$$ (eq. 198.4)



Se modificarmos os δ's calculados nas páginas 171 a 173 para férmions sem massa e para a condição de renormalização em $-M^2$, temos:

$$\delta_1 = \delta_2 = -\frac{e^2}{(4\pi)^2}\frac{\Gamma(2-d/2)}{(M^2)^{2-d/2}} + \dots \sim -\frac{e^2}{(4\pi)^2}\,\mathrm{Ln}\left(\frac{\Lambda^2}{M^2}\right)$$

$$\delta_3 = -\frac{e^2}{(4\pi)^2}\frac{4}{3}\frac{\Gamma(2-d/2)}{(M^2)^{2-d/2}} + \dots \sim -\frac{e^2}{(4\pi)^2}\frac{4}{3}\,\mathrm{Ln}\left(\frac{\Lambda^2}{M^2}\right)$$

De forma que:

$$\gamma_2(e) = \frac{1}{2} M\left[-\frac{e^2}{(4\pi)^2}\left(-\frac{2}{M}\right)\right] = \frac{e^2}{(4\pi)^2}$$

$$\gamma_3(e) = \frac{e^2}{12\pi^2}$$

$$\beta(e) = \cancel{M}\frac{e}{\cancel{2}}\left[\cancel{-}\frac{e^2}{(4\pi)^2}\left(\cancel{-}\frac{\cancel{2}}{\cancel{M}}\right)\right]\frac{4}{3} = \frac{e^3}{12\pi^2}$$

Importante: a sutileza aqui é que escolhemos um gauge específico, então algumas destas funções mudam se mudarmos o gauge, outras não. δ_2 (ligada ao propagador do elétron) não é invariante de gauge, δ_3 e β são ivariantes (ligados à polarização do vácuo).