

Perto deste ponto fixo a função de dois pontos volta a se comportar como uma simples potência de p^2 , só que é a **potência errada** (do ponto de vista de análise dimensional). Chamamos $\gamma(\lambda^*)$ de **dimensão anômala** do campo (de fato a função γ acabou "pegando" este nome mesmo quando não há ponto fixo na teoria)

Renormalização de operadores locais

Suponha que queiramos obter o comportamento de um operador local obtido como o produto de dois ou mais campos conforme renormalizamos a teoria.

$\mathcal{O}(x) \equiv$ operador composto de campos escalares

Da mesma forma que fizemos para o campo, podemos definir um processo de renormalização para este operador, re-escrevendo a Lagrangeana de forma a obter um contra termo:

$$\int_0 \mathcal{O}(x)$$

que garante o operador renormalizado $\mathcal{O}_m \equiv Z_{\mathcal{O}}^{-1}(M) \mathcal{O}_0$ satisfaça as condições de normalização em uma escala M. A função de green em que estamos interessados é:

$$G^{(n;1)}(p_1, \dots, p_n; k) = \langle \phi(p_1) \dots \phi(p_n) \hat{\mathcal{O}}_m(k) \rangle$$

notação:

$$G^{(n;m)}$$

função de Green com n campos e m operadores locais

Escrevendo-a em função dos campos nós, temos:

$$G^{(n;1)}(p_1, \dots, p_n; k) = Z(M)^{-n/2} Z_{\mathcal{O}}(M)^{-1} \langle \phi_0(p_1) \dots \phi_0(p_n) \mathcal{O}_0(k) \rangle$$

Repetindo a dedução da equação de CS, temos:

$$\left[M \frac{d}{dM} + \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} + n \gamma(\lambda) + \gamma_{\mathcal{O}}(\lambda) \right] G^{(n;1)} = 0 \quad (\text{eq. 210.1})$$

$$\gamma_{\mathcal{O}}(\lambda) = M \frac{d}{dM} \ln[Z_{\mathcal{O}}(M)]$$

Em muitas teorias temos mais de um operador com os mesmos números quânticos e a mesma dimensão, e neste caso podemos ter misturas entre estes operadores (as correções quânticas de um deles vai gerar contribuições aos outros). Por exemplo:

$$\mathcal{O}^1 = \bar{\psi} [\gamma^{\mu} \mathcal{D}^{\nu} + \gamma^{\nu} \mathcal{D}^{\mu}] \psi$$

$$\mathcal{O}^2 = F^{\mu\lambda} F^{\nu}_{\lambda}$$

Neste caso temos que definir um conjunto de operadores $\{\mathcal{O}^i\}$ de forma que:

$$\mathcal{O}_0^i \equiv Z_{\mathcal{O}}^{ij}(m) \mathcal{O}_m^j$$

o que também transforma a dimensão anômala γ em uma matriz:

$$\gamma_{\mathcal{O}}^{ij} = [Z_{\mathcal{O}}^{-1}(m)]^{ik} m \frac{d}{dm} [Z_{\mathcal{O}}(m)]^{kj}$$

Para obter uma expressão para γ , calculemos a função de green com m campos escalares e o operador:

$$G^{(m;1)} = \langle \phi(p_1) \dots \phi(p_m) \mathcal{O}_m(k) \rangle$$

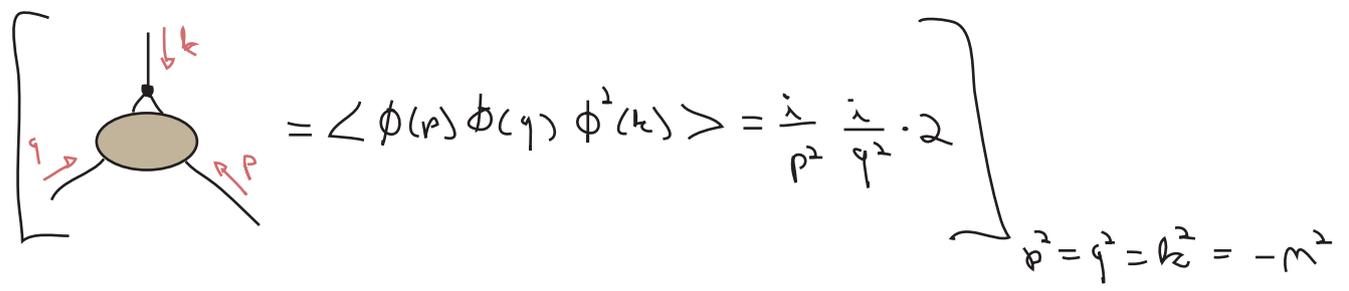


Usando a mesma lógica das páginas 196 a 198, se esta função de Green obedece as equações de CS (eq 210.1), então:

$$\gamma_{\mathcal{O}}(\lambda) = m \frac{d}{dm} \left(-\delta_{\mathcal{O}} + \frac{m}{2} \delta_Z \right) \quad (\text{eq. 211.1})$$

↑ número de linhas externas escalares

Um exemplo seria analisar o operador ϕ^2 , para evitar confusão entre a massa introduzida por este operador e a massa do campo escalar (que está sendo renormalizada para zero) vamos olhar uma função de green onde este operador carrega um momento diferente de zero, e definir sua normalização por:

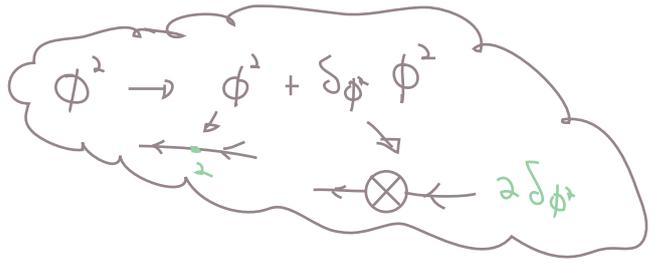


A primeiro loop a contribuir para esta função de Green é (de novo, estamos falando de $\lambda\phi^4$):

$$= \frac{i}{p^2} \frac{i}{q^2} \left[-\frac{\lambda}{4\pi^2} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-\frac{d}{2}}} \right]$$

$$\Delta = \Delta(p, q, k) \rightarrow \Delta(p^2=q^2=k^2=-M^2) = M^2$$

Em $-M^2$ este loop deve ser cancelado por:



$$\text{loop with cross} = \frac{i}{p^2} \frac{i}{q^2} 2\delta\phi^2$$

$$\delta\phi^2 = \frac{\lambda}{2(4\pi)^2} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(M^2)^{2-\frac{d}{2}}} \quad (\text{eq. 212.1})$$

$$\sim \frac{\lambda}{2(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \text{Log}(M^2) + \dots \right)$$

Como em $\lambda\phi^4$ não temos contribuição de ordem λ para δz , então:

(eq. 211.1 com $\frac{d}{dM}(\delta z) \sim \mathcal{O}(\lambda^2)$)

$$\gamma_{\phi^2} = M \frac{d}{dM} (-\delta\phi^2) = M \frac{-\lambda}{2(4\pi)^2} \left(-\frac{2}{M} \right) \Rightarrow$$

$$\gamma_{\phi^2} = \frac{\lambda}{16\pi^2} \quad (\text{eq. 212.2})$$

Evolução dos parâmetros de massa

(Peskin 12.5)

Podemos usar a evolução de operadores acima para estudar a evolução da massa na teoria. Para tanto introduziremos a massa como uma pequena perturbação na teoria sem massa, esta aproximação é boa desde que a massa física seja comparável aos momentos típicos (fica ruim para momentos menores que a massa).

$\mathcal{L}_m \leftarrow$ lagrangeana sem massas, renormalizada na escala M

$$\downarrow$$

$$\mathcal{L}_m + \frac{1}{2} m^2 \phi_m^2$$

$$G^{(n)} = G^{(n;0)} + m^2 G^{(n;1)} + (m^2)^2 G^{(n;2)} + \dots + (m^2)^l G^{(n;l)}$$

A generalização de 210.1 para várias inserções do operador é bastante óbvia:

$$\left[m \frac{d}{dM} + \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} + n \gamma(\lambda) + \gamma_{\phi^2}(\lambda) \right] G^{(n;l)} = 0 \quad (\text{eq. 212.3})$$

Se escrevemos:

$$G^{(n)} = \sum_l (m^2)^l G^{(n;l)}$$

aparece da mesma forma que o $\gamma_{\phi^2}(\lambda)$ (pgs 192-193), só que com o número de inserções do operador (l) ao invés do número de operadores do campo escalar (n)

Então: $m^2 \frac{d}{dm^2} G^{(n)} = \sum_i l(m^2)^i G^{(n); i}$

de forma que a seguinte equação garante 212.3 para cada ordem de m^2 :

$$\left[m \frac{d}{dM} + \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} + n \gamma(\lambda) + \gamma_\phi m^2 \frac{d}{dm^2} \right] G^{(n)}(\{p_i\}; M, \lambda, m) = 0 \quad (\text{eq. 213.1})$$

$$\hookrightarrow \frac{d}{d[\log(p/M)]} \bar{m}^2 = \gamma_{\phi^2}(\bar{\lambda}) \bar{m}^2(p) \iff \bar{m}^2(M) = m^2$$

O running da massa vai depender essencialmente da **dimensão anômala do operador ϕ^2** na teoria em questão. Este argumento vale para qualquer operador que eu adicione perturbativamente:

$$\mathcal{L}(C_i) = \mathcal{L}_m + \sum_i C_i \mathcal{O}_m^i(x)$$

dimensão depende da dimensão do operador

$$\left[m \frac{d}{dM} + \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} + n \gamma(\lambda) + \sum_i \gamma_i(\lambda) C_i \frac{d}{dC_i} \right] G^{(n)}(\{p_i\}; M, \lambda, \{C_i\}) = 0 \quad (\text{eq. 213.2})$$

Podemos escrever isso de forma mais conveniente:

$$d_i \equiv \text{Dim}[\mathcal{O}^i] \\ \downarrow \\ C_i \equiv \rho_i M^{4-d_i}$$

$$\mathcal{L}(\rho_i) = \mathcal{L}_m + \sum_i \rho_i M^{4-d_i} \mathcal{O}_m^i(x) \quad \hookrightarrow \text{Dim}[\rho_i] = 0$$

estamos introduzindo uma dependência em M esta nova dependência é compensada por ρ_i

Com isso 213.2 fica:

$$\left[m \frac{d}{dM} + \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} + n \gamma(\lambda) + \sum_i (\gamma_i(\lambda) + d_i - 4) \rho_i \frac{d}{d\rho_i} \right] G^{(n)}(\{p_i\}; M, \lambda, \{\rho_i\}) = 0$$

$G^{(n)}$

$\dots + \underbrace{\dots}_{f(M)} + \dots + \frac{\rho_i M^{4-d_i}}{\dots} + \dots$

(antes a dep. em M estava só aqui)

$M \frac{d}{dM} \left(\frac{\rho_i M^{4-d_i}}{\dots} \right) \sim (4-d_i) M^{4-d_i} \rho_i$

$(d_i - 4) \rho_i \frac{d}{d\rho_i} \left(\frac{\rho_i M^{4-d_i}}{\dots} \right) \sim (d_i - 4) M^{4-d_i} \rho_i$

cancelamento

$$\beta_i \equiv (d_i - \gamma + \delta_i) p_i$$

$$\left[m \frac{d}{dm} + \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} + n \delta(\lambda) + \sum_i \beta_i \frac{d}{dp_i} \right] G^{(n)}(\{p_i\}; M, \lambda, \{p_i\}) = 0 \quad (\text{eq. 214.1})$$

Perceba que agora todos os acoplamentos (adimensionais) p_i , aparecem com a mesma forma de λ . Podemos voltar às nossas bactérias para resolver o problema, só que agora elas fluem num espaço multidimensional com velocidades β e β_i . O resultado vai depender de constante de acoplamento efetivas que evoluem segundo equações:

$$\frac{d}{d[\text{Log}(P/M)]} \bar{p}_i = \beta_i(\bar{p}, \bar{\lambda}) \quad (\text{eq. 214.2})$$

Em suma, temos:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + \text{contra-termos} \Rightarrow \bar{\lambda} \leftrightarrow \beta(\lambda)$$

$$+ p_i M^{4-d_i} \mathcal{O}_i(\phi) \Rightarrow p_i \leftrightarrow \beta_i(p_i) \dots \beta_i = (d_i - \gamma + \delta_i) p_i$$

No limite em que todas as correções são muito pequenas (perto da teoria livre), podemos ignorar as contribuições de γ_i para β_i (γ_i depende de p_i ou λ , portanto $\gamma_i p_i \sim O(\text{pert}^2)$); neste caso:

$$\frac{d}{d[\text{Log}(P/M)]} \bar{p}_i = [d_i - \gamma] \bar{p}_i \rightarrow \beta_i(\bar{p}_i) = (d_i - \gamma) \bar{p}_i + \underbrace{\delta_i \bar{p}_i}_{\sim 0}$$

$$\bar{p}_i = p_i \left(\frac{P}{M}\right)^{d_i - \gamma}$$

O que nos fornece o comportamento que esperávamos depois da análise pelo método do Wilson: operadores com dimensão maior que 4 (não-renormalizáveis **em quatro dimensões**) tem acoplamentos que diminuem para momentos pequenos.

Em d dimensões, temos que tomar cuidado com o termo $\lambda \phi^4$, que fica com acoplamento dimensional. Fazemos então:

$$\text{Dim}[\phi] = \frac{d-2}{2} \quad \text{Dim}[\phi^4] = 2d - 4$$

$$\hookrightarrow \text{Dim}[\lambda] = d - (2d - 4) = 4 - d$$

$$\lambda \rightarrow \lambda' M^{4-d} \quad (\text{definindo um novo } \lambda \text{ adimensional})$$

$\text{Dim}[\phi_m^2] = d-2 \rightarrow P_m M^{d-(d-2)} \phi_m^2 = P_m M^2 \phi_m^2$ (no caso do operador de massa, nada muda)

finalmente $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \frac{1}{2} P_m M^2 \phi_m^2 - \frac{1}{4} \lambda M^{4-d} \phi_m^4 + \dots$

para outros operadores basta trocar: $M^{4-d_i} \rightarrow M^{d-d_i}$ \rightarrow dimensão do operador

Também precisamos calcular os contratermos em d dimensões. O cálculo que fizemos para $\int \phi^2$ muda da seguinte forma, para d próximo a 4:

$$\frac{\Gamma(2-d/2)}{(M^2)^{2-d/2}} \stackrel{d \rightarrow 4}{\sim} -\frac{2}{d-4} - \text{Log}_e(M^2) + (d-4) \left[-\frac{1}{4} \text{Log}_e^2(M^2) - \frac{1}{2} \gamma \text{Log}_e(M^2) \right] + \dots + \mathcal{O}[(d-4)^2]$$

indep de M

$$M \frac{d}{dM} \frac{\Gamma(2-d/2)}{(M^2)^{2-d/2}} = -2 + (d-4) \left[-\gamma - \text{Log}_e(M^2) \right] + \mathcal{O}[(d-4)^2]$$

$$M \frac{d}{dM} \frac{\Gamma(2-d/2)}{(M^2)^{2-d/2}} \sim -2 + \mathcal{O}(d-4)$$

\rightarrow o que tínhamos antes (em $d = 4$, eqs. 212.1 e 212.2)

$$\gamma_{\phi^2} = \frac{\lambda}{2(4\pi)^2} \left[2 - \mathcal{O}(d-4) \right] = \left[\gamma_{\phi^2}^{(4)} + \mathcal{O}[\lambda(d-4)] \right] \quad \gamma_{\phi^2}^{(4)} = \frac{\lambda}{16\pi^2}$$

$$\beta_i = (d_i - d + \gamma_i) P_i \rightarrow \beta_m = \left\{ 2 - (d-4) + \gamma_{\phi^2}^{(4)} + \mathcal{O}[\lambda(d-4)] \right\} P_m = \left\{ -2 + \gamma_{\phi^2}^{(4)} - (d-4) + \mathcal{O}[\lambda(d-4)] \right\} P_m$$

$$\lambda(d-4) \sim 0 \quad \beta_i(d-4) \sim 0 \quad \beta_m = \left(-2 + \gamma_{\phi^2}^{(4)} \right) P_m + \dots \quad (\text{eq. 215.1})$$

Algo similar ocorre com as outras funções: $\beta_i = \left[d_i - d + \gamma_i^{(4)} \right] P_i + \dots$

No caso da função β temos um contribuição da dimensão de massa de λ :

$$\beta = (d-4)\lambda + \beta^{(4)}(\lambda) \quad (\text{eq. 215.2}) \quad \beta = (d-4)\lambda + M^{d-4} \mathcal{O}(\lambda^2) = (d-4)\lambda + (1 + (d-4)\text{Log}_e(M) + \dots) \mathcal{O}(\lambda^2)$$

$\lambda^2(d-4) \sim 0$
 $1 \cdot \mathcal{O}(\lambda^2) = \beta^{(4)}(\lambda)$

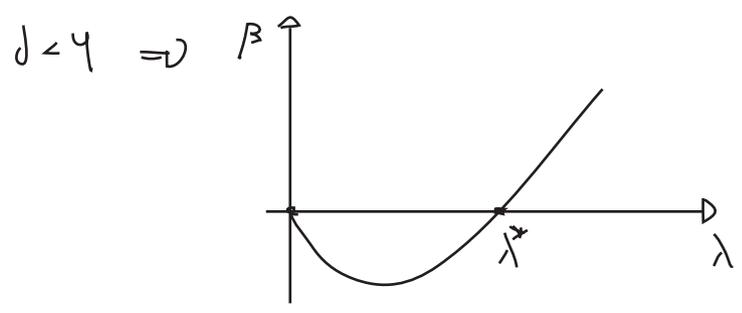
modificando o que há na pg 195 $G^{(4)} \sim \lambda M^{4-d} + \dots \rightarrow \left[M \frac{d}{dM} + \beta \frac{d}{d\lambda} + \dots \right] G^{(4)} = 0 \Rightarrow \left[\lambda(d-4) M^{4-d} + \beta M^{4-d} + \mathcal{O}(\lambda^2) \right] = 0$
introduziu a ordem λ^1 (que antes era nula)

Usando o resultado 195.1: $\beta = \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^2} + \mathcal{O}(\lambda^3)$

temos:

$$\beta = -(1-d)\lambda + \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^2}$$

$$d \geq 4 \Rightarrow \beta > 0 \quad \therefore \lambda \rightarrow 0 / p \rightarrow 0$$



$$\lambda_* = \frac{16\pi^2}{3} (4-d)$$

o que é o comportamento que previmos nas págs 208-209, com um ponto fixo em λ^*

Conexão com os expoentes críticos

Usando o resultado 215.1, podemos obter a evolução do parâmetro de massa em $\lambda\phi^4$:

$$\beta_m = (-2 + \gamma_{\phi^2}^{(4)}) \bar{p}_m \rightarrow \frac{d}{d[\text{Log}(M/\mu)]} \bar{p}_m = \beta_m(\bar{p}_m) = (-2 + \underbrace{\gamma_{\phi^2}^{(4)}}_{\frac{\lambda}{16\pi^2}}) \bar{p}_m \quad (\text{eq. 212.2})$$

$$\lambda = 0 \Rightarrow \frac{1}{\bar{p}_m} d \bar{p}_m = -2 d[\text{Log}(M/\mu)] \Rightarrow \boxed{\bar{p}_m = p_m \left(\frac{M}{P}\right)^2} \quad (\text{eq. 216.1})$$

Lembrando que $p_m = \frac{m^2}{M^2} \Rightarrow \bar{p}_m = \frac{m^2}{p^2}$ (o que apenas nos diz que quando $p \sim m$ o termo de massa se torna importante, e é pouco importante para $p \gg m$)

$m^2(P) = M^2 \bar{p}_m = m^2 \left(\frac{M}{P}\right)^2$

Pensando em um sistema de mecânica estatística, lembremos que o comprimento de correlação desempenha o papel da massa deste campo escalar. Levando em conta a evolução desta massa podemos definir:

$$\xi \sim \frac{1}{p_0} \quad / \quad \bar{p}_m(p_0) = 1 \quad \dots \Rightarrow \bar{p}_m(p_0) = 1 \Rightarrow \frac{m^2}{p_0^2} = 1 \Rightarrow p_0^2 = m^2 \Rightarrow p_0^2 = p_m M^2$$

um momento específico (não confundir com a componente zero do momento)

$$\xi \sim (M^2 \bar{p}_m)^{-1/2} = m^{-1} \quad (\text{como esperado, nada demais aqui})$$

Usando o mesmo critério para definir ξ perto do ponto fixo λ^* , obtemos:

$$\frac{d}{d[\log(M/\mu)]} \bar{P}_m = \left(-2 + \gamma_{\phi^2}(\lambda^*) \right) \bar{P}_m \Rightarrow \bar{P}_m = P_m \left(\frac{M}{\mu} \right)^{2 - \gamma_{\phi^2}(\lambda^*)} \quad (\text{eq. 130.1})$$

$$\bar{P}_m(P_0) = 1 \Rightarrow P_m \left(\frac{M}{P_0} \right)^{2 - \gamma_{\phi^2}(\lambda^*)} = 1 \Rightarrow P_0^{-1} = P_m^{-1} M^{\nu}$$

$$P_0 = P_m^{-\nu} M$$

$$\xi \sim P_m^{-\nu}$$

$$\gamma_{\phi^2} = \frac{\lambda}{16\pi^2} \quad \lambda^* = \frac{16\pi^2}{3} (4-d)$$

$$V^{-1} = 2 - \gamma_{\phi^2}(\lambda^*) = 2 - \frac{\lambda^*}{16\pi^2} = 2 - \frac{1}{3} (4-d) + \mathcal{O}[(4-d)^2]$$

Wilson & Fisher mostraram que podemos obter o resto da expansão.

Comparando com o que obtivemos para o modelo de Landau:

$$\xi = [2k(T - T_c)]^{-1/2}$$

vemos que P_m é que desempenha o papel do parâmetro que mede a distância para a temperatura crítica, e ν mede como o comprimento de correlação cresce conforme nos aproximamos desta temperatura:

$$P_m \sim (T - T_c) \Rightarrow \xi \sim (T - T_c)^{-\nu}$$

$$\nu = \frac{1}{2 - \frac{1}{3}(4-d) + \mathcal{O}[(4-d)^2]} \quad \nu \approx \frac{1}{2} \quad (\text{de acordo com o modelo de Landau})$$

contruindo uma teoria escalar com simetria $O(N)$ é possível mostrar que:

$$\nu^{-1} = 2 - \frac{N+2}{N+8} (4-d) \quad \text{com } N \text{ campos escalares}$$

O que nos permite descrever o comportamento perto do ponto crítico de diferentes materiais magnéticos:

$$N = 1 \Rightarrow \text{com eixo preferencial de magnetização}$$

$N = 2 \Rightarrow$ com plano preferencial de magnetização

$N = 3 \Rightarrow$ isotrópicos

N	1	2	3
ν_{TEOR}	0,6	0,63	0,65
ν_{EXP}	0,64	0,67	0,71

E os valores previstos concordam bem com experimentos ($d = 3$):

Curiosamente, o comportamento crítico pode ser estudado para uma grande variedade de sistemas (flúidos, ligas binárias, superfluidos, ...). É um fato experimental que os expoentes perto do ponto crítico dependem apenas da dimensão da variável que flutua e não dos detalhes microscópicos. Isso pode parecer um milagre, mas do ponto de vista da teoria quântica de campos, é um fato natural, uma consequência direta do grupo de renormalização. Quando o sistema passa a ser dominado pela dinâmica de grandes distâncias restam apenas alguns operadores relevantes, e tudo fica muito simples. Esta idéia, levada para as teorias relativísticas, nos explica porque as teorias interessantes para física de partículas são renormalizáveis. Isto indica apenas que estamos longe do cut-off destas teorias.

Exponent	Landau	QFT	Lattice	Experiment	
<i>N = 1 Systems:</i>					
γ	1.0	1.241 (2)	1.239 (3)	1.240 (7) 1.22 (3) 1.24 (2)	binary liquid liquid-gas β -brass
ν	0.5	0.630 (2)	0.631 (3)	0.625 (5) 0.65 (2)	binary liquid β -brass
α	0.0	0.110 (5)	0.103 (6)	0.113 (5) 0.12 (2)	binary liquid liquid-gas
β	0.5	0.325 (2)	0.329 (9)	0.325 (5) 0.34 (1)	binary liquid liquid-gas
η	0.0	0.032 (3)	0.027(5)	0.016 (7) 0.04 (2)	binary liquid β -brass
<i>N = 2 Systems:</i>					
γ	1.0	1.316 (3)	1.32 (1)		
ν	0.5	0.670 (3)	0.674 (6)	0.672 (1)	superfluid ^4He
α	0.0	-0.007 (6)	0.01 (3)	-0.013 (3)	superfluid ^4He
<i>N = 3 Systems:</i>					
γ	1.0	1.386 (4)	1.40 (3)	1.40 (3) 1.33 (3) 1.40 (3)	EuO, EuS Ni RbMnF ₃
ν	0.5	0.705 (3)	0.711 (8)	0.70 (2) 0.724 (8)	EuO, EuS RbMnF ₃
α	0.0	-0.115 (9)	-0.09 (6)	-0.011 (2)	Ni
β	0.5	0.365 (3)	0.37 (5)	0.37 (2) 0.348 (5) 0.316 (8)	EuO, EuS Ni RbMnF ₃
η	0.0	0.033 (4)	0.041 (14)		