

# Teória Quântica de Campos

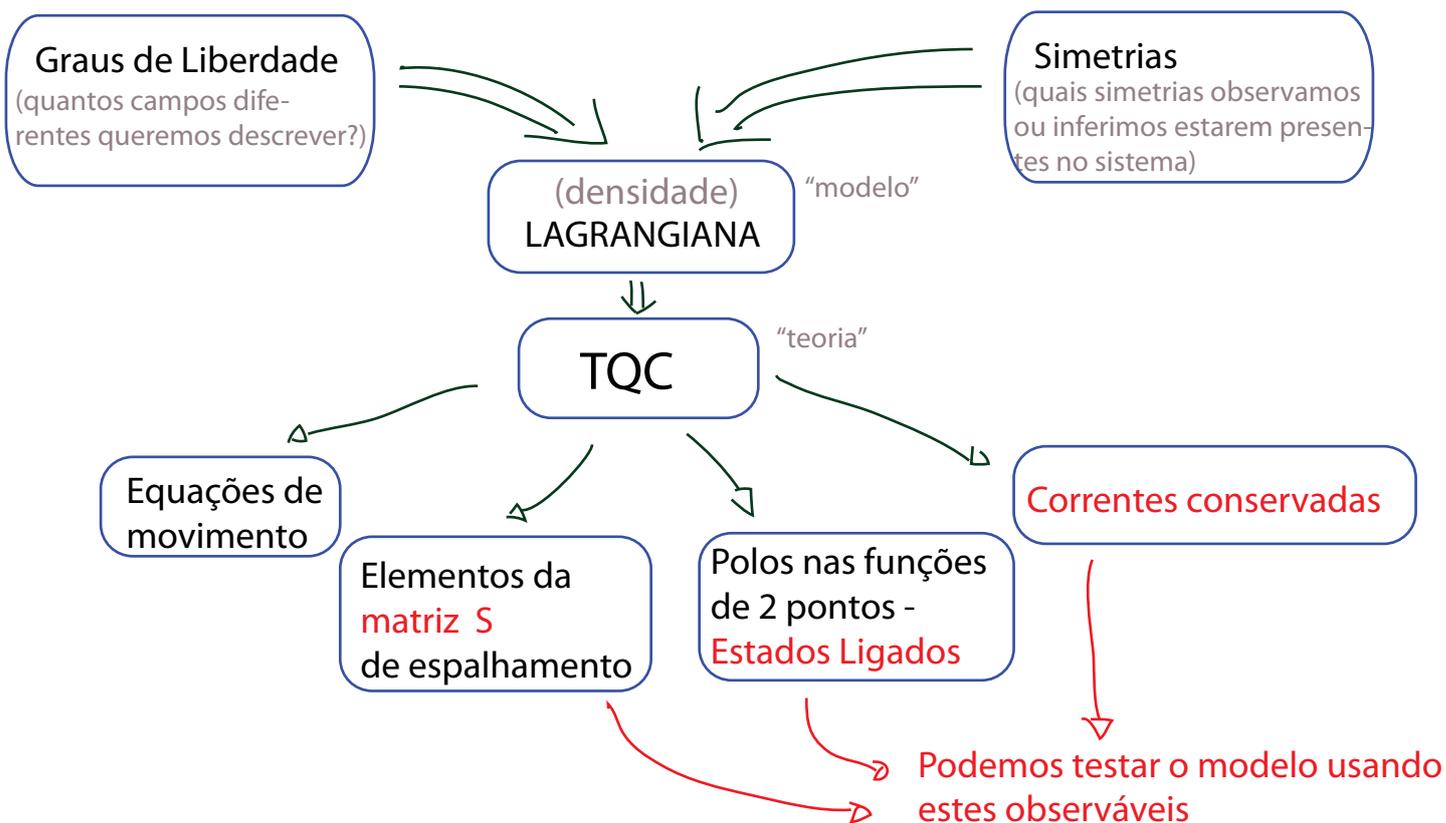
(a idéia geral até agora)

Do que se trata: uma teoria Quântica e Relativística (no sentido da relatividade restrita)

Objeto dinâmico básico da teoria: **CAMPO!**

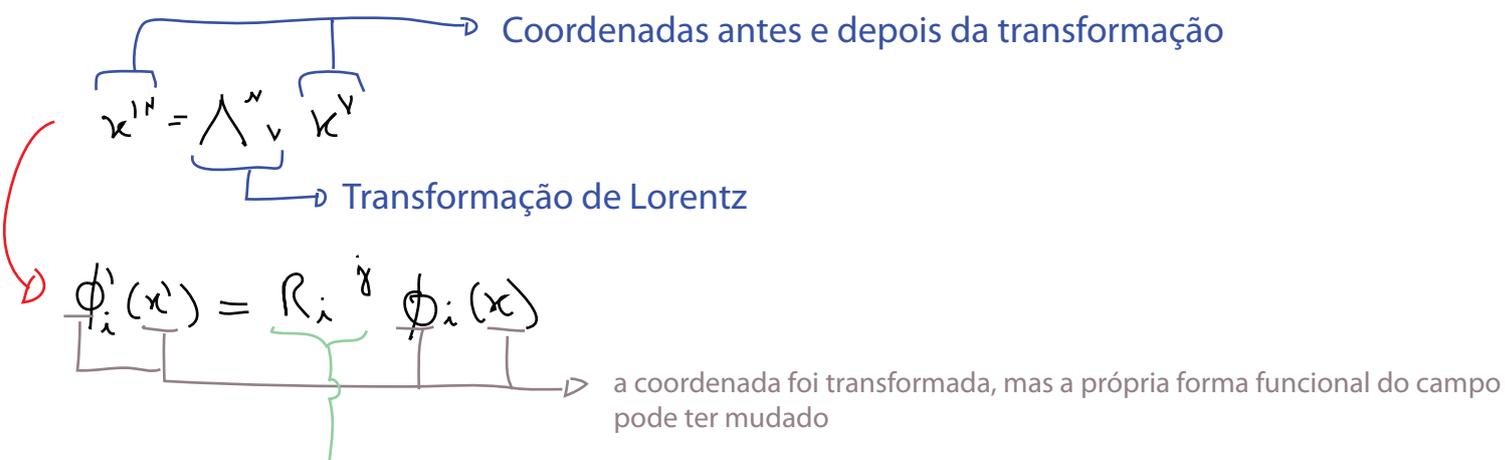
↳ Estes campos são Quantizados: excitações do campo em torno do **vácuo** são **PARTÍCULAS**

Contruindo um Modelo:



## Sobre os graus de liberdade e simetrias

A primeira simetria que exigimos é a própria invariância por translações e rotações no espaço tempo, que juntas formam o **grupo de Poincaré**. Cada campo da teoria é colocado em uma representação deste grupo e isto fixa as propriedades da partículas associada, em particular o **SPIN** e, por consequência, sua estatística:



note que, em geral, a transformação pode misturar campos com índices diferentes ( $\phi_1$  e  $\phi_2$ ) - neste caso é claramente mais natural pensar nestes "campos" como componentes de um campo mais complicado que se misturam sob transformações de Lorentz.

$$A_\mu = \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

Escalares

$$\mathcal{R} = \hat{1}$$

$$\phi'(x') = \phi(x)$$

⇒ Bosons de spin 0

Vetores

$$\mathcal{R} = \Lambda \quad \mu = 0, 1, 2, 3$$

$$A'_\mu(x') = \Lambda_{\mu\nu} A_\nu(x)$$

⇒ Bosons de spin 1

Spinores

$$\mathcal{R} = M_D \quad \alpha = 1, 2, 3, 4$$

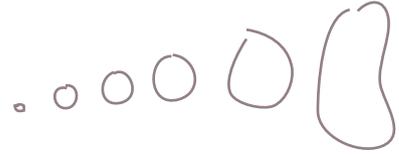
$$\Psi'_\alpha(x') = M_{D\alpha\beta}(\Lambda) \Psi_\beta(x)$$

⇒ Férmions de spin 1/2

$$M_D \equiv e^{-\frac{1}{2} \Theta_{\mu\nu} S^{\mu\nu}}$$

$$S^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

Matrizes de Dirac



Mas não é só isso, outras simetrias podem estar presentes no sistema, sejam elas **globais** ou **locais** (ou **de Gauge**), **contínuas** ou **discretas**, e temos que decidir em que representações estão os campos. Em particular, simetrias de Gauge acabam levando à interações entre campos diferentes. Alguns exemplos:

(1) Na escala típica das interações nucleares, a força eletromagnética é desprezível e o proton e o neutron são praticamente idênticos, podemos definir o **NUCLEON**:

$$\Psi_N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$$

que é um campo na **representação fundamental** de um **SU(2) LOCAL**, chamado de **ISOSPIN** (além de ser também um férmion, na representação spinorial do grupo de Lorentz).

(2) O mesmo pode ser feito com os três pions ( $\pi^0, \pi^+$  e  $\pi^-$ ):

$$\pi = \begin{pmatrix} \tilde{\pi}^+ \\ \pi^0 \\ \tilde{\pi}^- \end{pmatrix}$$

que é um campo na **representação adjunta** deste mesmo **SU(2) LOCAL** mas é um escalar de Lorentz com sinal negativo sobre uma transformação discreta, a transformação de paridade.

A Lagrangiana mais geral que envolve estes dois campos dá conta da **FORÇA NUCLEAR FORTE**.

(3) O **elétron** tem spin 1/2, portanto queremos um campo na representação spinorial de Lorentz, e uma carga conservada, o que implica em pelo menos uma simetria global U(1), sobre a qual ele se transforma na rep. fundamental. Se tornamos esta **simetria U(1) local**, é necessário também introduzir um campo vetorial sem massa (chamado de Boson de Gauge), na rep. adjunta, o **foton**:

$$\Psi_e \Rightarrow \left( \begin{array}{l} \text{Spinor} \\ U(1): \Psi_e \rightarrow e^{ie\alpha(x)} \Psi_e \end{array} \right) \quad A_\nu \Rightarrow \left( \begin{array}{l} \text{Vetor} \\ A'_\nu(x) = A_\nu + \partial_\nu \alpha(x) \end{array} \right)$$

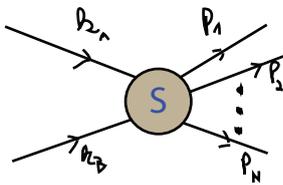
Com estes dois campos e a simetria U(1) conseguimos construir a QED (e dela, obter as equações de Maxwell):

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\Psi}_e (i\not{D} - m) \Psi_e - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \\ &= \bar{\Psi}_e (i\not{\partial} - m) \Psi_e - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - e \bar{\Psi} \not{\gamma}^\mu \Psi A_\mu \end{aligned}$$

(4) Sabemos que os **quarks** tem um número quântico interno que pode assumir três valores diferentes e é chamado de **cor**. Observa-se também que independentemente do estado de cor, eles interagem sempre com o mesmo acoplamento com os **gluons**. O modelo que descreve isto é a **QCD (cromodinâmica quântica)** e nela os quarks estão na rep. fundamental de **SU(3)** e os gluons são os bósons de Gauge exigidos (e portanto estão na adjunta de SU(3)).

## Observáveis (espalhamento)

Um vez que temos a Lagrangiana a TQC nos dá ferramentas para obter elementos da **matriz S**, que conecta estados assintóticos em um espalhamento:



$$\langle \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots | S | \vec{k}_A, \vec{k}_B \rangle \equiv \langle \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots | \mathcal{T} | \vec{k}_A, \vec{k}_B \rangle \quad (\text{eq. 3.1})$$

O que nos permite chegar na seção de choque de espalhamento,

$$S \equiv 1 + i T$$

$$\langle p_1 p_2 \dots | i T | k_A, k_B \rangle \equiv (2\pi)^4 \delta^4(k_A + k_B - \sum p_k) i \mathcal{M}(k_A, k_B \rightarrow \{p_k\})$$

$$\sigma = \frac{1}{4 \sqrt{(p_A \cdot p_B)^2 - m_A^2 m_B^2}} \left( \int \prod \frac{d^3 p_k}{(2\pi)^3} \right) |\mathcal{M}(p_A, p_B \rightarrow \{p_k\})|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_B - \sum p_k) \quad (\text{eq. 3.2})$$

que estabelece a distribuição de probabilidades do espalhamento e pode ser testada em laboratório.

Tipicamente o cálculo destes objetos exige uma **expansão perturbativa**, que pode ser representada em termos de **Diagramas de Feynman** e operacinalizada em termos de **Regras de Feynman**.

## O que vem a seguir?

A pergunta que deveria estar incomodando o aluno atento é: esta Lagrangiana mais geral (construída com os graus de liberdade escolhidos e permitida pelas simetrias impostas) tem um número finito de termos? Usando a QED como exemplo, podemos colocar esta pergunta na seguinte forma:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}_e \not{D} \psi_e - m\bar{\psi}_e \psi_e - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \underbrace{C_1 \bar{\psi}_e \psi_e \bar{\psi}_e \psi_e + C_2 (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu})^2 + C_3 (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu})^3 + \dots}_{\text{CADÊ!}}$$

A resposta para esta pergunta está intimamente ligada a dois outros problemas que o aluno já pode ter encontrado com grau maior ou menor de profundidade:

- (1) o cálculo de **correções em loop**, que aparecem em ordens superiores da expansão perturbativa e as divergências introduzidas por estas correções, a questão da **renormalizabilidade**;
- (2) as diferenças entre a Lagrangiana da teoria clássica de campos (que é o que obtemos após impor as simetrias) e a Lagrangiana que efetivamente controla a dinâmica do sistema após a introdução de **correções quânticas**. (Se é uma surpresa para você que existe esta diferença, tenha calma, chegaremos lá).

O primeiro e principal objetivo deste curso é esclarecer estes pontos, o que nos dará um entendimento muito mais completo sobre o que é uma Teoria Quântica de Campos, e nos levará a um método sistemático de Renormalização para estas teorias e às **Equações do Grupo de Renormalização**.

Antes, no entanto, daremos uns passos para trás e introduziremos um método de quantização mais moderno e poderoso do que a chamada Quantização Canônica, chamado de **Quantização por Integrais de Trajetória**. Veremos como aplicar este método a campos Escalares, Spinoriais e de Gauge, para em seguida voltar ao problema da Renormalização. Isto pode levar algumas páginas (e semanas), então mantenha o objetivo final em mente!

## Quantização por Integrais de Trajetória:

### O Oscilador Harmônico

Atente para as referências no começo de cada seção (Ramond cap2, Nastase 2)

Além da imposição de relações de comutação, existe uma outra forma de quantizar um sistema clássico: usando integrais de trajetória. Para entender do que se trata voltemos a um sistema não relativístico que entendemos bem (talvez o único que entendemos bem): o oscilador harmônico.

$$\begin{aligned} \boxed{m=1} \Rightarrow L &= \frac{\dot{q}^2}{2} - \omega^2 \frac{q^2}{2} & \Rightarrow H &= p\dot{q} - \left( \frac{\dot{q}^2}{2} - \omega^2 \frac{q^2}{2} \right) = \\ p &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dot{q} & &= \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2) \end{aligned}$$

$\hbar = 1$

$$a \equiv \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\omega q + i p)$$

$$a^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\omega q - i p)$$

(eq. 4.1)

$$p = -i \sqrt{\frac{\omega}{2}} (a - a^\dagger)$$

$$q = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (a + a^\dagger)$$

(eq. 5.1)

$$H = \frac{1}{2} \left( -\frac{\omega}{2} (a - a^\dagger)^2 + \frac{\omega}{2} (a + a^\dagger)^2 \right) = \frac{\omega}{2} (a a^\dagger + a^\dagger a)$$

(eq. 5.2)

poderíamos juntar isso pois ainda não quantizamos

Definimos os Brackets de Poisson como:

$$\left. \begin{array}{l} f = f(p, q) \\ g = g(p, q) \end{array} \right\} \rightarrow \{f, g\}_{PB} \equiv \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$$

(eq. 5.3)

$$\therefore \{p_i, q_j\}_{PB} = \sum_k \left( \underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial q_k}}_0 \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial p_k}}_0 - \underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial p_k}}_{\delta_{ik}} \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial q_k}}_{\delta_{kj}} \right) = -\delta_{ij}$$

$\delta_{ik} \cdot \delta_{kj} = \delta_{ij}$

Podemos escrever as equações de Hamilton na forma:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \{q_i, H\}_{PB} = \sum_k \left( \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial q_k}}_{\delta_{ik}} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial p_k}}_0 \frac{\partial H}{\partial q_k} \right)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \{p_i, H\}_{PB} = \sum_k \left( \underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial q_k}}_0 \frac{\partial H}{\partial p_k} - \underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial p_k}}_{\delta_{ik}} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right)$$

(eq. 5.4)

### Quantização Canônica do Oscilador Harmônico

O que chamamos de quantização canônica consiste em transformar  $q$  e  $p$  em operadores  $\hat{q}$  e  $\hat{p}$ , substituindo os Brackets de Poisson por comutadores:

$$q, p \rightarrow \hat{q}, \hat{p}$$

$$\{, \}_{PB} \rightarrow -\frac{i}{\hbar} [, ]$$

$\hbar = 1$

$$\{p_i, q_j\}_{PB} = -\delta_{ij} \rightarrow -i [p_i, \hat{q}_j] = -\delta_{ij}$$

$$[p_i, \hat{q}_j] = -i \delta_{ij}$$

(eq. 6.1)

$$[p, \hat{q}] = -i$$

(eq. 5.1)

$$[p, \hat{q}] = \left[ -i \sqrt{\frac{\omega}{2}} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger), \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \right] =$$

$$= -\frac{i}{2} \left\{ [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] - [\hat{a}^\dagger, \hat{a}] \right\} = -i [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = -i$$

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$$

(eq. 6.2)

Podemos usar a mesma substituição nas equações de Hamilton (5.4) para obter a evolução destes operadores no quadro de Heisenberg:

$$\dot{\hat{q}}_i = \{q_i, H\}_{PB} \rightarrow \frac{d\hat{q}_i}{dt} = -i [\hat{q}_i, \hat{H}]$$

$$\dot{\hat{p}}_i = \{p_i, H\}_{PB} \rightarrow \frac{d\hat{p}_i}{dt} = -i [\hat{p}_i, \hat{H}]$$

(eq. 6.3)

E o hamiltoniano pode ser obtido de (5.2)

$$\hat{H} = \frac{\omega}{2} \left( \underbrace{\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}}_{1 + \hat{a}^\dagger\hat{a}} \right) = \hbar\omega \left( \hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2} \right)$$

(eq. 6.4)

se tivéssemos acompanhado os h's corretamente

Os autoestados deste hamiltoniano são definidos em termos de um número de ocupação  $n$  e os operadores  $\hat{a}^\dagger$  e  $\hat{a}$  são operadores de criação e aniquilação:

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = A_n |n+1\rangle \quad ; \quad \hat{a} |n\rangle = A'_n |n-1\rangle$$

(eq. 6.5)

normalizações

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle \equiv \hat{N} |n\rangle = n |n\rangle$$

(eq. 6.6)

Operador Número

No estado fundamental, ou vácuo, definido por  $a|\Omega\rangle = 0$

$$\therefore N|\Omega\rangle = 0$$

$$|\Omega\rangle = |n=0\rangle$$

a energia é:

$$\hat{H} = \omega \left( \hat{N} + \frac{1}{2} \right)$$

$$\hat{H}|n=0\rangle = E_0|n=0\rangle$$

$$E_0 = \frac{\omega}{2} \text{ Energia de ponto zero ou do vácuo}$$

Podemos definir um hamiltoniano sem esta energia de ponto zero, definindo o **ordenamento normal**:

$$:a^\dagger a + a a^\dagger + a a + a^\dagger a^\dagger: = a^\dagger a + a^\dagger a + a a + a^\dagger a^\dagger$$

Coloca todos os  $a^\dagger$ 's a esquerda dos  $a$ 's

$$:\hat{H}: = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} = \omega \hat{N}$$

## Integral de Trajetória de Feynman

(Ryder 5.1)

Uma quantidade que frequentemente queremos saber é, dado que uma partícula estava em uma posição  $q$  em um tempo  $t$ , qual é a probabilidade de a encontrarmos na posição  $q'$  no tempo  $t'$ . Em uma linguagem mais "quântica" dada a função de onda:

$$\Psi(q, t)$$

Gostaríamos de conhecer o propagador  $F$ , definido por:

$$\Psi(q', t') = \int F(q', t'; q, t) \Psi(q, t) dq \quad (\text{eq. 7.1})$$

$|\Psi(q', t')|^2$  é distribuição de probabilidades para  $q'$  no tempo  $t'$ , independente do que aconteceu antes de  $t'$

A equação 7.1 é uma simples expressão da causalidade, considerando que a partícula pode ter começado em qualquer lugar. Claramente  $F$  é a amplitude de probabilidade de transição entre a função em  $(q, t)$  e a em  $(q', t')$  e:

$$P(q', t'; q, t) = |F(q', t'; q, t)|^2 \quad \text{é a probabilidade de transição}$$

Vejamos como podemos expressar  $F$  em termos de grandezas familiares:

$$\Psi(q, t) = \langle q | \Psi, t \rangle$$

Quadro de Schrödinger (estados evoluem no tempo, operadores não)

$$|\Psi, t\rangle_S = e^{-i\hat{H}t} |\Psi\rangle_H$$

Quadro de Heisenberg  
(operadores evoluem no tempo, estados não)

Definamos o vetor:

$$|q, t\rangle_H = e^{i\hat{H}t} |q\rangle_S \quad (\text{Moving Frame})$$

$\hat{q}_S |q\rangle_S = q |q\rangle_S$        $\hat{q}_H(t) = e^{i\hat{H}t} \hat{q}_S e^{-i\hat{H}t}$   
 $\hat{q}_H(t) |q, t\rangle_H = e^{i\hat{H}t} \hat{q}_S e^{-i\hat{H}t} e^{i\hat{H}t} |q\rangle_S = e^{i\hat{H}t} q |q\rangle_S = q |q, t\rangle_H$   
 $\therefore |q, t\rangle_H$  autoestado de  $\hat{q}_H(t)$  no tempo  $t$

$$\therefore \Psi(q, t) = \langle q | e^{-i\hat{H}t} |\Psi\rangle_H = \langle q, t | \Psi\rangle_H$$

$$\hat{1} = \int |q, t\rangle \langle q, t| dq$$

Dado:  $\langle q', t' | \Psi\rangle_H = \int \langle q', t' | q, t\rangle \langle q, t | \Psi\rangle_H dq$

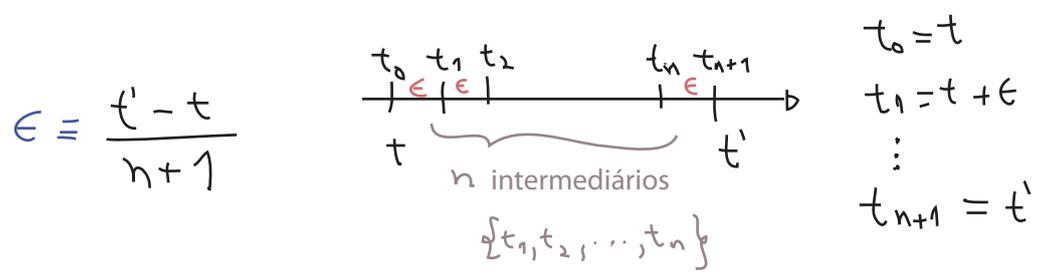
$\underbrace{\langle q', t' |}_{\Psi(q', t')}$        $\underbrace{\langle q, t | \Psi\rangle_H}_{\Psi(q, t)}$

$$\Psi(q', t') = \int \langle q', t' | q, t\rangle \Psi(q, t) dq$$

Que, comparada com 7.1, nos dá:  $F(q', t', q, t) = \langle q', t' | q, t\rangle = \langle q' | e^{-iH(t'-t)} | q\rangle$

Vejamos agora como expressar esta grandeza em termos da integral de trajetória:

Primeiramente, dividimos o tempo em  $(n+1)$  pequenos intervalos  $\epsilon$ :



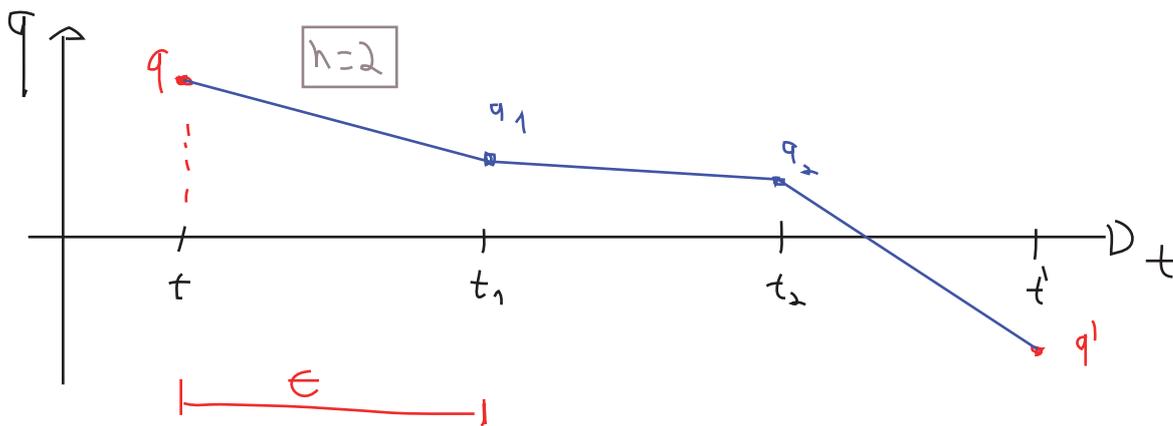
Notando que o tempo é só um índice e para qualquer tempo fixo temos a relação de completudeza:

$$\forall t_i \Rightarrow \int dq_i |q_i, t_i\rangle \langle q_i, t_i| = 1 \quad q_i \equiv q(t_i) \quad (\text{estamos sempre pensando no limite do contínuo})$$

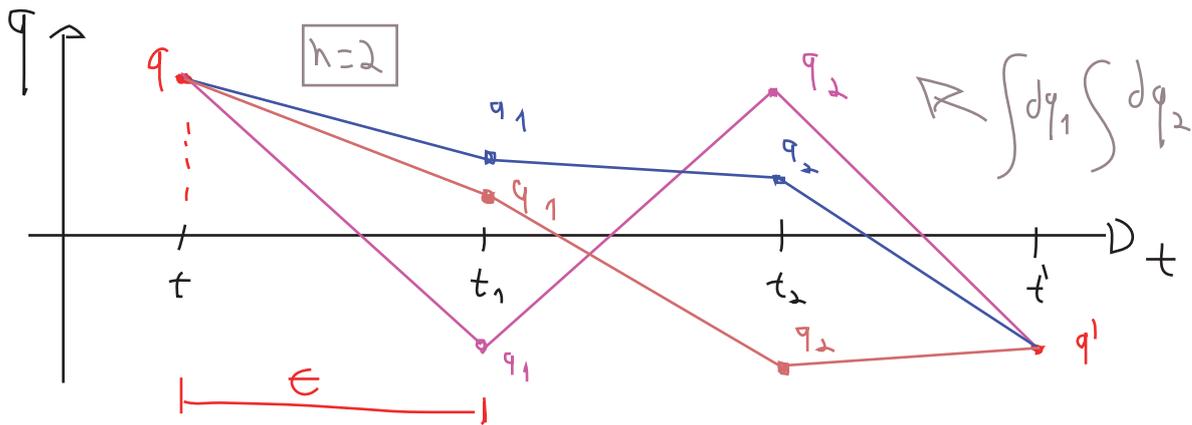
$$F(q', t', q, t) = \int dq_1 \dots dq_n \langle q', t' | q_n, t_n\rangle \langle q_n, t_n | q_{n-1}, t_{n-1}\rangle \dots \langle q_2, t_2 | q_1, t_1\rangle \langle q_1, t_1 | q, t\rangle$$

$n$  identidades

Se esquecermos as integrais por um instante, percebemos que os elementos de matriz estão descrevendo um caminho:



Este caminho, no entanto, é bastante diferente do caminho clássico. Mesmo que façamos  $\epsilon \rightarrow 0$ , a diferença  $q_{i+1} - q_i$  não é forçada a zero e acabamos com um caminho arbitrariamente descontínuo. De fato a expressão 8.1 indica que estamos levando em conta uma infinidade destas trajetórias:



A esta operação daremos o nome de "integral sobre todas as trajetórias" ou "integral de trajetória", e definimos o símbolo:

$$\mathcal{D}q(t) \equiv \prod_{i=1}^n dq(t_i) \quad (\text{eq. 9.1})$$

$$\int \mathcal{D}q(t) \equiv \prod_{i=1}^n \int dq(t_i) \quad (\text{eq. 9.2})$$

Podemos também obter uma expressão no espaço dos momentos:

$$\langle q | p \rangle = e^{ipq}$$

$$|q\rangle = \int \frac{dp}{2\pi\hbar} |p\rangle \langle p|q\rangle$$

$$|p\rangle = \int dq |q\rangle \langle q|p\rangle = \int dq \int \frac{dp'}{2\pi\hbar} |p\rangle \langle p'|q\rangle \langle q|p\rangle = \int \frac{dp'}{2\pi\hbar} |p'\rangle \int dq e^{-ip'q} e^{ipq} = \int \frac{dp'}{2\pi\hbar} |p'\rangle \int dq e^{i(p-p')q} = \int \frac{dp'}{2\pi\hbar} |p'\rangle \delta(p-p') = |p\rangle$$

$$\langle q_n, t_n | q_{n-1}, t_{n-1} \rangle = \langle q(t_n) | e^{-i \epsilon \hat{H}} | q(t_{n-1}) \rangle = \int \frac{dp(t_n)}{2\pi} \langle q(t_n) | p(t_n) \rangle \langle p(t_n) | e^{-i \epsilon \hat{H}} | q(t_{n-1}) \rangle$$

É preciso ter cuidado com Hamiltonianas que tenham produtos entre os operadores  $\hat{p}$  e  $\hat{q}$ , neste caso é preciso "Weyl-ordenar" o Hamiltoniano antes de prosseguir - isto significa usar as relações de comutação até que tenhamos todos os operadores  $\hat{p}$  a esquerda dos operadores  $\hat{q}$  (ver Peskin pg 281). Assumindo que isto já foi feito e lembrando que, para  $\epsilon$  pequeno, não precisamos nos preocupar com termos quadráticos em  $\hat{H}$ , vale:

$$\begin{aligned} \langle p(t_n) | e^{-i \epsilon \hat{H}(\hat{p}, \hat{q})} | q(t_{n-1}) \rangle &= \langle p(t_n) | 1 - i \epsilon \hat{H}(\hat{p}, \hat{q}) | q(t_{n-1}) \rangle = \\ &= \langle p(t_n) | 1 - i \epsilon H(p(t_n), q(t_{n-1})) | q(t_{n-1}) \rangle = e^{-i \epsilon H[p(t_n), q(t_{n-1})]} \langle p(t_n) | q(t_{n-1}) \rangle = \\ &= e^{-i \epsilon H[p(t_n), q(t_{n-1})]} e^{-i p(t_n) q(t_{n-1})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \langle q_n, t_n | q_{n-1}, t_{n-1} \rangle &= \int \frac{dp(t_n)}{2\pi} e^{i q(t_n) p(t_n)} e^{-i \epsilon H[p(t_n), q(t_{n-1})]} e^{-i p(t_n) q(t_{n-1})} = \\ &= \int \frac{dp(t_n)}{2\pi} e^{i p(t_n) [q(t_n) - q(t_{n-1})]} e^{-i \epsilon H[p(t_n), q(t_{n-1})]} \end{aligned}$$

Com isso, a eq. 8.1 fica:

$$\begin{aligned} F(q', t', q, t) &= \int \left( \prod_i^n dq_n \right) \underbrace{\langle q_{n+1}, t_{n+1} | q_n, t_n \rangle}_{P_{n+1}} \dots \underbrace{\langle q_1, t_1 | q_0, t_0 \rangle}_{P_1} = \\ &= \int \left( \prod_i^n dq(t_i) \right) \left( \prod_j^{n+1} \frac{dp(t_j)}{2\pi} \right) e^{i \left\{ \underbrace{p(t_{n+1}) [q(t_{n+1}) - q(t_n)]}_{\epsilon} + \dots + p(t_1) [q(t_1) - q(t_0)] \right\}} \times \\ &\quad \times e^{-i \epsilon \left\{ H[p(t_{n+1}), q(t_n)] + \dots + H[p(t_1), q(t_0)] \right\}} = \end{aligned}$$

$$\begin{cases} t_0 = t \\ t_{n+1} = t' \\ q_0 = q(t) \\ q_{n+1} = q(t') \end{cases}$$

$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (n \rightarrow \infty)$

$$= \int \mathcal{D}q(t) \mathcal{D}p(t) \text{EXP} \left\{ i \int_{t_0}^{t_{n+1}} dt \left[ p(t) \dot{q}(t) - H[p(t), q(t)] \right] \right\} \quad (\text{eq. 10.1})$$

A equação 10.1 é bastante geral, mas é possível encontrar uma expressão mais simples (e mais útil) no caso de hamiltonianas que tenham a forma:

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2} + V(q) \quad (m=1) \quad (\text{eq. 11.1})$$

Neste caso temos:  $F(q^1 t^1, q t) = \int \mathcal{D}q(t) \mathcal{D}p(t) \text{EXP} \left\{ i \int_t^{t'} dt \left[ p(t) \dot{q}(t) - \frac{p(t)^2}{2} - V[q(t)] \right] \right\}$  (eq. 11.2)

E podemos fazer a integral em  $p(t)$  como um Gaussiana generalizada, para ver o que isso quer dizer façamos um interlúdio de matemática.

— // Gaussianas // —

A gaussiana que conhecemos é:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Elevando isto ao quadrado podemos obter:

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy e^{-\alpha(x^2+y^2)} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} r dr e^{-\alpha r^2} = \frac{\pi}{\alpha}$$

Com  $n$  integrais multiplicadas (e trocando  $\alpha$  por  $\alpha_n/2$ ):

$$\int dx_1 \dots dx_n \text{EXP} \left[ -\frac{1}{2} \sum_i \alpha_i x_i^2 \right] = \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha_1}} \dots \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha_n}} = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\prod \alpha_i^{1/2}}$$

podemos organizar os  $\alpha$ 's em uma matriz, suponha:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \alpha_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Então o produto escalar:

$$(\vec{x}, A\vec{x}) = x_i A_{ij} x_j = \sum_i \alpha_i x_i^2$$

$$\& \text{DET } A = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n = \prod \alpha_i$$

Logo, podemos re-escrever a integral:

$$\int d^n x e^{-\frac{1}{2} x_i A_{ij} x_j} = (2\pi)^{n/2} (\text{DET } A)^{-1/2} \quad (\text{eq. 11.3})$$

que de fato vale para qualquer matriz (real)  $A$  que seja diagonalizável.

Podemos ainda considerar os casos em que o "quadrado não está completo":

$$S = \frac{1}{2} \vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x} + \vec{b}^T \cdot \vec{x}$$

Pensemos nele como uma ação (o que de fato será, quando voltarmos à física). A solução clássica dada pelo princípio da extrema ação seria (mesmo sem pensar nisso como ação, estamos buscando o mínimo de S):

$$\frac{\delta S}{\delta x_i} = 0 \quad \frac{\delta}{\delta x_k} \left( \frac{1}{2} x_i A_{ij} x_j + b_i x_i \right) = \frac{1}{2} \delta_{ik} A_{ij} x_j + \frac{1}{2} x_i A_{ik} \delta_{jk} + b_k = 0$$

$$\frac{1}{2} A_{kj} x_j + \frac{1}{2} A_{ik} x_i = -b_k$$

$$A_{ij} = A_{ji} \Rightarrow \vec{x}_c = -A^{-1} \vec{b}$$

← CLÁSSICO

$$S(\vec{x}_c) = \frac{1}{2} (-A^{-1} \vec{b})^T \cdot A \cdot (-A^{-1} \vec{b}) + \vec{b}^T (-A^{-1} \vec{b}) = -\frac{1}{2} \vec{b}^T A^{-1} \vec{b}$$

Podemos então escrever:

$$S = \frac{1}{2} (\vec{x} - \vec{x}_c)^T \cdot A (\vec{x} - \vec{x}_c) - \frac{1}{2} \vec{b}^T A^{-1} \vec{b}$$

equação da parábola com mínimo em  $\vec{x}_c$

$$\int d^n x e^{-\left(\frac{1}{2} \vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x} + \vec{b}^T \cdot \vec{x}\right)} = e^{-S(\vec{x}_c)} \int d^n x e^{-\frac{1}{2} (\vec{x} - \vec{x}_c)^T \cdot A \cdot (\vec{x} - \vec{x}_c)} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} (\det A)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} \vec{b}^T A^{-1} \vec{b}}$$

(eq. 12.1)

Voltando a física, podemos fazer a integral destacada abaixo:

$$F(q' t', q t) = \int \mathcal{D}q(t) \exp \left\{ -i \int_t^{t'} dt V[q(t)] \right\} \underbrace{\int \mathcal{D}p(t) \exp \left\{ i \int_t^{t'} dt \left[ p(t) \dot{q}(t) - \frac{p(t)^2}{2} \right] \right\}}_{\prod_i \frac{\hbar}{2\pi} \exp \left\{ i \in \left[ p(t_i) \dot{q}(t_i) - \frac{1}{2} p(t_i)^2 \right] \right\}}$$

com:  $x_i = p(t_i)$      $b = -i \in \dot{q}(t_i)$      $(A^{-1})_{ij} = -\frac{i}{\epsilon} \delta_{ij}$   
 $A_{ij} = i \in \delta_{ij}$

podemos usar 12.1 diretamente, obtendo:

$$\int \mathcal{D}p(t) \text{EXP} \left\{ i \int_t^{t'} dt \left[ p(t) \dot{q}(t) - \frac{p(t)^2}{2} \right] \right\} = \frac{1}{(2\pi)^n} (i\epsilon)^{-n/2} \text{EXP} \left[ \frac{1}{2} (+i\epsilon \dot{q}(t_i)) \left( \frac{t}{\epsilon} \delta_{ij} \right) (+i\epsilon \dot{q}(t_j)) \right]$$

$$= \underbrace{\frac{(i\epsilon)^{-n/2}}{(2\pi)^{n/2}}}_{\mathcal{N}} \text{EXP} \left[ i \int_t^{t'} dt \frac{\dot{q}(t)^2}{2} \right] \quad (\text{eq. 13.1})$$

Com isso, nossa amplitude de transição fica em uma forma bastante reveladora:

$$F(q' t', q t) = \mathcal{N} \int \mathcal{D}q(t) \text{EXP} \left\{ i \int_t^{t'} dt \left[ \frac{\dot{q}(t)^2}{2} - V[q(t)] \right] \right\} = \mathcal{N} \int \mathcal{D}q(t) \text{EXP} \left\{ i \int_t^{t'} dt L(q, \dot{q}) \right\}$$

$$F(q' t', q t) = \mathcal{N} \int \mathcal{D}q(t) e^{iS[q]} \quad (\text{eq. 13.2})$$

Paremos aqui um momento para notar duas coisas:

(1) As equações 10.1 e 13.2 nos dão formas bastante curiosas de calcular um objeto essencialmente quântico: a amplitude de probabilidade de transição. Curiosas porque, no lado direito da equação temos as funções Lagrangeana e Hamiltoniana clássicas do sistema (notem que trocamos os operadores  $\hat{q}$  e  $\hat{p}$  por seus valores esperados no meio da dedução). O comportamento quântico vem do facto de estarmos integrando sobre todas as trajetórias possíveis para  $q(t)$  e  $p(t)$  (a exponencial complexa também desempenha um papel)

(2) Na equação 13.2 fica claro que a soma sobre trajetórias é ponderada pela exponencial da ação, e diferentes trajetórias vão ter interferências construtivas ou destrutivas dependendo de diferença entre suas ações.

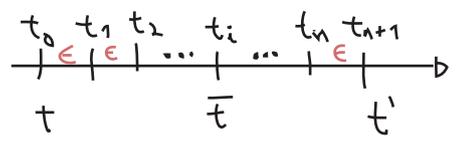
Temos então uma forma alternativa de quantizar um sistema, especialmente útil quando estamos falando de amplitudes de transição. Ao invés de definir operadores e relações de comutação, usamos as integrais de trajetória. Note que os dois métodos são **completamente equivalentes**, acima usamos a evolução temporal que se obtém como solução da equação de Schrödinger para chegar nas integrais de trajetória. Feynman fez o oposto, ele partiu de expressão 13.2 e mostrou que as funções de onda em 7.1 satisfazem a equação de Schrödinger (o que só vale para Hamiltonianas do tipo 11.1).

## Funções de Correlação

Podemos também usar o método acima para obter outros observáveis, o mais simples sendo a função de um ponto:

$$\langle q', t' | \hat{q}(\bar{t}) | q, t \rangle \quad t < \bar{t} < t'$$

É fácil imaginar como tratar este objeto no procedimento anterior. Discretizamos o tempo da mesma forma mas, assumindo que a discretização é "fina" o bastante, podemos identificar  $\bar{t}$  com um dos  $t_i$  intermediários:



Em meio aos diversos  $\langle q_{i+1}, t_{i+1} | q_{i-1}, t_{i-1} \rangle$  que apareceram antes, vai haver um bracket diferente:

$$\langle q_{i+1}, t_{i+1} | \hat{q}(\bar{t}) | q_i, t_i \rangle \stackrel{t_i = \bar{t}}{=} \underbrace{q(\bar{t})}_{\text{não é mais um operador}} \langle q_{i+1}, t_{i+1} | q_i, t_i \rangle$$

isto é exatamente o que tínhamos antes. Então a conta procede normalmente, lembrando apenas que temos este  $q(\bar{t})$  dentro das integrais.

$$\therefore \langle q', t' | \hat{q}(\bar{t}) | q, t \rangle = \int \mathcal{D}q \ e^{iS[q]} \ q(\bar{t})$$

A função de dois (ou mais) pontos é similar, mas há uma sutileza:

$$\langle q', t' | \hat{q}(\bar{t}_2) \hat{q}(\bar{t}_1) | q, t \rangle \rightarrow \text{só sabemos tratar isso se de fato: } t < \bar{t}_1 < \bar{t}_2 < t'$$

$$\int \mathcal{D}q \ \langle q', t' | q_{n+1}, t_{n+1} \rangle \dots \langle q_{j+1}, t_{j+1} | \hat{q}(\bar{t}_2) | q_j, t_j \rangle \dots \langle q_{i+1}, t_{i+1} | \hat{q}(\bar{t}_1) | q_i, t_i \rangle \dots \langle q_1, t_1 | q, t \rangle$$

$\bar{t}_2 = t_j \Rightarrow q(\bar{t}_2) < 1 >$        $\bar{t}_1 = t_i \Rightarrow q(\bar{t}_1) < 1 >$

$$\langle q', t' | \hat{q}(\bar{t}_2) \hat{q}(\bar{t}_1) | q, t \rangle = \int \mathcal{D}q \ e^{iS[q]} \ q(\bar{t}_2) q(\bar{t}_1) \quad (\text{eq. 14.1})$$

Por outro lado, poderíamos ter calculado:

$$\langle q', t' | \hat{q}(\bar{t}_1) \hat{q}(\bar{t}_2) | q, t \rangle = \int \mathcal{D}q \ e^{iS[q]} \ q(\bar{t}_2) q(\bar{t}_1) \quad (\text{eq. 14.2})$$

desde que  $t < \bar{t}_2 < \bar{t}_1 < t'$

note que são funções e comutam

Logo vemos que, tentando escrever 14.1 e 14.2 como uma única expressão, temos:

$$\int \mathcal{D}q \ e^{iS[q]} \ q(\bar{t}_2) q(\bar{t}_1) = \langle q', t' | T \{ \hat{q}(\bar{t}_2) \hat{q}(\bar{t}_1) \} | q, t \rangle \quad (\text{eq. 15.1})$$

onde aparece o **Produto Temporalmente Ordenado** (recorde como estes produtos aparecem na versão canônica):

$$T \{ \hat{q}(\bar{t}_2) \hat{q}(\bar{t}_1) \} \equiv \begin{cases} \hat{q}(\bar{t}_1) \hat{q}(\bar{t}_2) & \leftrightarrow \bar{t}_2 < \bar{t}_1 \\ \hat{q}(\bar{t}_2) \hat{q}(\bar{t}_1) & \leftrightarrow \bar{t}_1 < \bar{t}_2 \end{cases} \quad (\text{eq. 15.2})$$

Tanto 15.1 e 15.2 são generalizados de forma direta para um número maior de operadores:

$$T \{ \hat{q}(\bar{t}_1), \dots, \hat{q}(\bar{t}_N) \} \equiv \hat{q}(\bar{t}_1) \dots \hat{q}(\bar{t}_N) \leftrightarrow \bar{t}_N < \dots < \bar{t}_1$$

ordenados temporalmente

$$G_n(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n) = \langle q', t' | T \{ \hat{q}(\bar{t}_1) \dots \hat{q}(\bar{t}_n) \} | q, t \rangle = \int \mathcal{D}q \ e^{iS[q]} \ q(\bar{t}_1) \dots q(\bar{t}_n)$$

**Função de n-pontos ou Função de Correlação** (de n pontos) ou **Correlator**. (eq. 15.3)

Em breve veremos em que contexto estes correlatores aparecem e porque estamos interessados neles. Definamos um outro objeto que nos será útil, lembrando que para qualquer conjunto  $\{a_n\}$  podemos definir a **função geradora**  $F(z)$ :

$$F(z) \equiv \sum_n \frac{1}{n!} a_n z^n$$

tal que:  $a_n = \frac{d^n}{dz^n} F(z) \Big|_{z=0}$  (conhecer esta função nos permitir obter qualquer elemento do conjunto, bastando fazer o número apropriado de derivações)

O equivalente para o conjunto de todos os correlatores  $\{G_n\}$  seria o **funcional gerador**:

$$Z[J] \equiv \sum_{N \geq 0} \int dt_1 \dots \int dt_N \frac{i^N}{N!} G_N(t_1, \dots, t_N) J(t_1) \dots J(t_N) \quad (\text{eq. 15.4})$$

convencional

A diferença é que os elementos do conjunto em questão são funções (de vários  $t$ 's) e por isso a variável em que derivaremos deve ser também uma função (os  $J$ 's) e o gerador vira um funcional.

Podemos escrever ele em uma forma mais conveniente substituindo  $G_n$  de 15.3:

$$\begin{aligned}
 Z[\mathcal{J}] &= \sum_{N>0} \int dt_1 \dots \int dt_N \frac{i^N}{N!} \mathcal{J}(t_1) \dots \mathcal{J}(t_N) \int \mathcal{D}q e^{iS[q]} q(t_1) \dots q(t_N) = \\
 &= \int \mathcal{D}q e^{iS[q]} \sum_{N>0} \frac{1}{N!} \left[ \int dt i q(t) \mathcal{J}(t) \right]^N = \int \mathcal{D}q e^{i \underbrace{[S[q] + \int dt q(t) \mathcal{J}(t)]}_{S[q, \mathcal{J}]}}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{Z[\mathcal{J}] = \int \mathcal{D}q e^{iS[q, \mathcal{J}]}} \quad (\text{eq. 16.1})$$

Para ver como podemos obter qualquer  $G_n$ , basta fazer as **derivadas funcionais**:

$$\frac{\delta^N}{i \delta \mathcal{J}(t_1) \dots i \delta \mathcal{J}(t_N)} Z[\mathcal{J}] \Big|_{\mathcal{J}=0} = \int \mathcal{D}q e^{iS[q]} q(t_1) \dots q(t_N) = G_N(t_1, \dots, t_N)$$

(eq. 16.2)

Para um tratamento um pouco mais longo de derivação funcional, chequem o material adicional [a] no site do curso (<http://www.ift.unesp.br/users/matheus/files/courses/2016tqc2/func%20deriv.pdf>), e as referências lá citadas.

Para os nossos fins basta saber que:

$$\frac{\delta f(x)}{\delta f(y)} = \delta(x-y) \quad \frac{\delta g(p(x))}{\delta f(y)} = \delta(x-y) \frac{dg}{dp} \Big|_{p=p(x)}$$

De forma que:

$$\frac{\delta^2}{i \delta \mathcal{J}(t_1) i \delta \mathcal{J}(t_2)} Z[\mathcal{J}] = \frac{\delta}{i \delta \mathcal{J}(t_1)} \left\{ \frac{\delta}{i \delta \mathcal{J}(t_2)} \int \mathcal{D}q e^{i[S[q] + \int dt q(t) \mathcal{J}(t)]} \right\} =$$

$$= \int \mathcal{D}q \frac{\delta}{i\delta J(t_1)} \left\{ e^{i[S[q] + \int dt q(t)J(t)]} \frac{\delta}{i\delta J(t_2)} \left[ i(S[q] + \int dt q(t)J(t)) \right] \right\} =$$

$$= \int \mathcal{D}q \frac{\delta}{i\delta J(t_1)} \left\{ e^{i[S[q] + \int dt q(t)J(t)]} \int dt q(t) \delta(t-t_2) \right\} =$$

$$= \int \mathcal{D}q q(t_2) \frac{\delta}{i\delta J(t_1)} \underbrace{e^{i[S[q] + \int dt q(t)J(t)]}}_{q(t_1) e^{i[\dots]}} = \int \mathcal{D}q q(t_2) q(t_1) e^{iS[q, J]}$$

$$\therefore \frac{\delta^2}{i\delta J(t_1) i\delta J(t_2)} Z[J] \Big|_{J=0} = \int \mathcal{D}q q(t_2) q(t_1) e^{iS[q]} \Big|_{J=0} = G_2(t_1, t_2) //$$

Com este conjunto de idéias e ferramentas podemos voltar ao oscilador harmônico.

### O oscilador Harmônico forçado

(Nastase 7 e 8, Ramond 2.3)

Quando definimos o gerador funcional (eqs. 15.4 e 16.1):

$$Z[J] = \int \mathcal{D}q e^{iS[q; J]} = \int \mathcal{D}q e^{iS[q] + i\int dt q(t)J(t)}$$

a partir do qual obtemos os correlatores (16.2):

$$G_n(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n) = \frac{\delta}{i\delta J(\bar{t}_1)} \dots \frac{\delta}{i\delta J(\bar{t}_n)} Z[J] \Big|_{J=0}$$

Não discutimos o significado da função  $J(t)$ , que não passava de um artifício matemático, introduzida apenas para definir o funcional gerador e igualada a zero assim que possível. No entanto podemos nos perguntar o que acontece se não fizemos  $J(t) = 0$ . A ação definida com a inclusão do termo com  $J$  é:

$$S[q; J] = S[q] + \int dt J(t) q(t)$$

que, pelo princípio da extrema ação:  $\frac{\delta S[q; J]}{\delta q} = \frac{\delta S[q]}{\delta q} + J(t) = 0$

Se  $L(q) = \frac{1}{2} (\dot{q}^2 - \omega^2 q^2) \Rightarrow \boxed{-\omega^2 q - \ddot{q} + J(t) = 0}$  (eq. 18.1)

Oscilador Harmônico Forçado

Note que  $J(t)$  é uma força externa ao sistema descrito por esta eq. de movimento, no sentido de que sua dinâmica não é influenciada pelo valor de  $q(t)$  (ou suas derivadas). Todo o comportamento desta "Fonte" é estabelecido a priori por fatores externos e o que resolvemos é a resposta do oscilador a isto. Neste sentido vemos que os correlatores da teoria descrevem o comportamento do sistema isolado, na ausência de fontes.

A ação  $S[q; J] = \frac{1}{2} (\dot{q}^2 - \omega^2 q^2) + \int dt J q$  é quadrática em  $q$  e portanto podemos fazer a integral de trajetória usando o resultado da pg 12.1 para integrais gaussianas. Há, no entanto, um sutil problema ligado às condições de contorno de  $q(t)$ , vamos primeiro fingir que não notamos este problema (ou de fato ser honestos a respeito):

$$S[q] = \int dt \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{dq}{dt} \right)^2 - \frac{\omega^2 q^2}{2} + J q \right] = \int dt \left[ -\frac{1}{2} q \left( \frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right) q + J q \right]$$

$$\int \frac{dq}{dt} \frac{dq}{dt} = \int \frac{d}{dt} \left( q \frac{dq}{dt} \right) - \int q \frac{d^2 q}{dt^2}$$

O que leva à integral de trajetória:

$$\mathcal{Z}[J] = \int \mathcal{D}q \exp \left\{ \int dt \left[ -\frac{1}{2} q \cdot \Delta^{-1} q + i J \cdot q \right] \right\}$$

$$\Delta^{-1} = i \left( \frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right)$$

$$J \cdot q = \int dt J(t) q(t)$$

Comparando com 12.1:

$$\int d^N x e^{-\left( \frac{1}{2} \vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x} + \vec{b}^T \cdot \vec{x} \right)} = (2\pi)^{N/2} (D_{ET} A)^{-1/2} e^{\frac{1}{2} \vec{b}^T \cdot A^{-1} \cdot \vec{b}} \Rightarrow \begin{aligned} \mathcal{L} &= -i J(t) \\ A &= \Delta^{-1} \end{aligned}$$

$$\mathcal{Z}[J] = \mathcal{N} e^{-\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J}$$

(por enquanto usaremos este resultado, mas cuidado!  
Veja eq 21.2 para a versão correta)

$$\underbrace{(D_{ET} \Delta^{-1})^{-1/2}}_{\text{(não depende de J)}}$$

$$\mathcal{J} \cdot \Delta \cdot \mathcal{J} = \int dt \int dt' \mathcal{J}(t) \Delta(t, t') \mathcal{J}(t')$$

$$\Delta^{-1} \Delta(t, t') = i \left[ \frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right] \overbrace{i \int \frac{dp}{2\pi} \frac{e^{-ip(t-t')}}{p^2 - \omega^2}}^{\text{ANSATZ } p/\Delta} = \int \frac{dp}{2\pi} \frac{-p^2 + \omega^2}{p^2 - \omega^2} e^{-ip(t-t')} = \delta(t-t')$$

$$\Delta(t, t') = i \int \frac{dp}{2\pi} \frac{e^{-ip(t-t')}}{p^2 - \omega^2} \quad (\text{eq. 19.1})$$

↪ No entanto temos uma singularidade aqui, que seria evitada (como fizemos antes) escolhendo caminhos apropriados no plano complexo.

Esta singularidade invalida a inversão que fizemos de  $\Delta^{-1}$ ? A pergunta só pode ser respondida pensando em que espaço de funções  $\Delta^{-1}$  está agindo, pois neste caso podemos pensar no operador como uma matriz e ver que, se existem funções que satisfaçam:

$$\left[ \frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right] q_0(t) = 0 \quad (\text{eq. 19.2})$$

isto significaria que o operador tem autovalores iguais a zero e é singular, **não pode ser invertido!** Para piorar, estes modos de autovalor zero são justamente as soluções clássicas do oscilador livre.

$$\hookrightarrow q_0(t) = C_{\pm} e^{\pm i\omega t}$$

Para conseguir inverter  $\Delta^{-1}$ , portanto, precisamos excluir estas soluções do espaço em que  $\Delta^{-1}$  está agindo, o que quer dizer que precisamos que elas não sejam varidas pela integral de trajetória. Lembre-se que para definir a integral de trajetória, temos que também escolher os pontos inicial e final da trajetória, que estão fixos. Note ainda que a equação só tem soluções  $q(t)$ ,  $t \in [t_i, t_f]$  não triviais se:

$$q(t_i) \neq 0 \quad \text{ou} \quad q(t_f) \neq 0$$

$$q_0(t) = C_+ e^{i\omega t} + C_- e^{-i\omega t}$$

$$q_0(t_i) = 0 \Rightarrow (C_+ e^{i\omega t_i} + C_- e^{-i\omega t_i}) = 0$$

$$q_0(t_f) = 0 \Rightarrow (C_+ e^{i\omega t_f} + C_- e^{-i\omega t_f}) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} (C_+ - C_-) \sin\left[\frac{\omega(t_f + t_i)}{2}\right] \cos\left[\frac{\omega(t_f - t_i)}{2}\right] = 0 \\ (C_+ + C_-) \cos\left[\frac{\omega(t_f + t_i)}{2}\right] \cos\left[\frac{\omega(t_f - t_i)}{2}\right] = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \forall t_i \\ \forall t_f \end{array} \Rightarrow C_+ = C_- = 0$$

Vamos então fazer uma mudança de variável e escrever:

$$q(t) = q_{cl}(t) + \tilde{q}(t) \rightarrow \boxed{\tilde{q}(t_i) = \tilde{q}(t_f) = 0} \quad (\text{eq. 20.1})$$

↳ Trajetória clássica, com condições de contorno não triviais

Do ponto de vista da integral de trajetória, mudar a integração de  $q$  para  $\tilde{q}$  é o mesmo que uma mudança de variável dada pela adição de uma constante em uma integral usual, estamos apenas somando um caminho fixo. Então:

$$\int \mathcal{D}q e^{iS[q_{cl}(t) + \tilde{q}; J]} = \int \mathcal{D}\tilde{q} e^{iS[q_{cl}(t) + \tilde{q}; J]}$$

De fato, isto decorre da definição da integral de trajetória de um modo trivial:

$$\prod_i dq_i = \prod_i d(q_{cl,i} + \tilde{q}_i) = \prod_i d\tilde{q}_i$$

↳ número

Lembrando que (pg 12), se achamos um extremo  $q_0$  de  $S[q; J]$ , podemos escrever:

$$\left. \begin{aligned} S[q; J] &= \frac{1}{2} A q^2 + J q \\ \left. \frac{\delta S}{\delta q} [q; J] \right|_{q=q_0} &= 0 \end{aligned} \right\} = S[q_0; J] + \frac{1}{2} A (q - q_0)^2 = S[q; J] + S[q - q_0; 0]$$

justamente a ação para  $J = 0$

Acontece que  $q_{cl}$  é justamente um extremo da ação, de forma que:

$$\boxed{S[q; J] = S[q_{cl}; J] + S[q - q_{cl}; 0]} \Rightarrow S[q; J] = S[q_{cl}; J] + S[\tilde{q}; 0]$$

(eq. 20.2)

$$\therefore \boxed{Z[J] = e^{iS[q_{cl}; J]} \int \mathcal{D}\tilde{q} e^{iS[\tilde{q}; 0]}}$$

(eq. 20.3)

esta integral agora está bem definida, mas não interessa o seu resultado pois ela independe de  $J$  e pode ser absorvida na constante que acompanha  $Z$ . O importante é que a  $\Delta$  que vai parar no determinante é obtida invertendo o operador  $\Delta^{-1}$  numa base em que não há modos com autovalor zero

$$\therefore \boxed{Z[J] = \mathcal{N} e^{iS[q_{cl}; J]}}$$

(eq. 20.4)

E a equação de movimento para  $q_\alpha$  é

$$\Delta^{-1} q_\alpha(t; \mathcal{J}) = i \mathcal{J}(t) \quad (\text{eq. 21.1})$$

E a solução:

$$q_\alpha(t; \mathcal{J}) = q_\alpha(t; 0) + i (\Delta \cdot \mathcal{J})(t)$$

$\hookrightarrow \Delta^{-1} q_\alpha(t; 0) = 0$  ( estas são as funções problemáticas que satisfazem a eq. 19.2, posso inverter  $\Delta$  porque ele agora age em  $q_\alpha(t; \mathcal{J})$ , o segundo termo acima conserta o problema)

Note que:

$$\frac{\delta_{\text{FULL}} S[q_\alpha; \mathcal{J}]}{\delta_{\text{FULL}} \mathcal{J}(t)} = \int dt' \left[ \frac{\delta S}{\delta q(t')} \Big|_{q=q_\alpha} \frac{\delta q_\alpha(t'; \mathcal{J})}{\delta \mathcal{J}(t)} + \frac{\delta S}{\delta \mathcal{J}} \right] =$$

$$\int d\mathcal{J} \left( \frac{\delta_{\text{FULL}} S[q_\alpha; \mathcal{J}]}{\delta_{\text{FULL}} \mathcal{J}(t)} = q_\alpha(t; \mathcal{J}) = q_\alpha(t; 0) + i (\Delta \cdot \mathcal{J})(t) \right)$$

$$S[q_\alpha(\mathcal{J}); \mathcal{J}] = S[q_\alpha(0); 0] + q_\alpha(0) \cdot \mathcal{J} + \frac{i}{2} \mathcal{J} \cdot \Delta \cdot \mathcal{J}$$

CONST

cada produto escalar deste é uma integral em t (por isso suprimi as dep. em t)

$$Z[\mathcal{J}] = \mathcal{N} e^{i S[q_\alpha; \mathcal{J}]} = \mathcal{N} e^{-\frac{i}{2} \mathcal{J} \cdot \Delta \cdot \mathcal{J} + i q_\alpha(0) \cdot \mathcal{J}} \quad (\text{eq. 21.2})$$

(eq. 20.4)

Ainda resta saber qual é a forma deste  $\Delta$  e quais condições de contorno usamos para  $q_\alpha(t; \mathcal{J})$  na eq. 21.1

Uma opção que temos para evitar os polos em 19.2 é tirá-los do eixo real, faremos isto segundo a prescrição:

$$\omega^2 \rightarrow \omega^2 - i\epsilon \quad (\text{eq. 21.3})$$

$$\Delta_F(t, t') = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-i p (t-t')}}{p^2 - \omega^2 + i\epsilon}$$

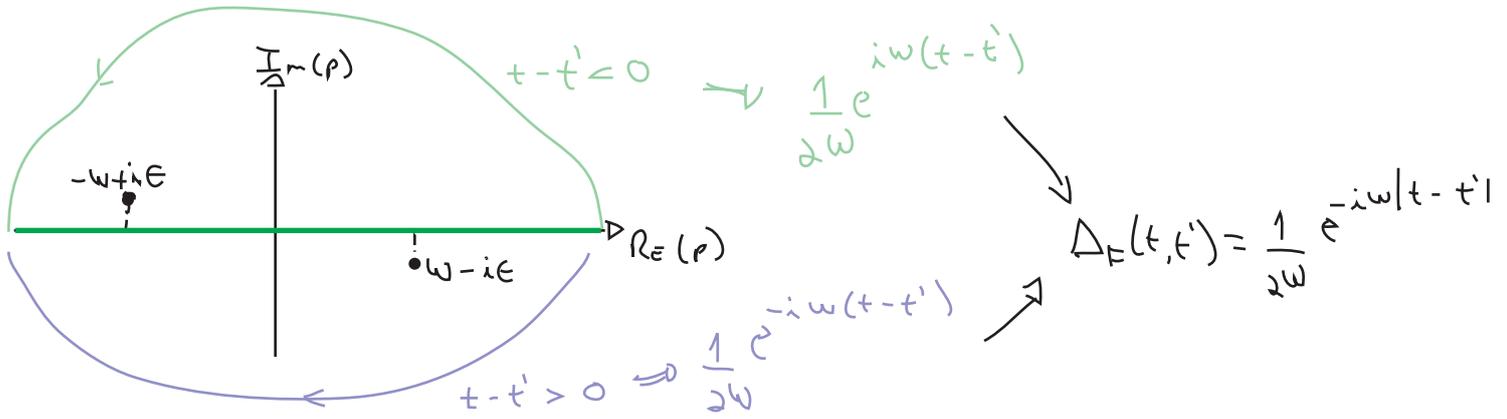
polos em:  
 $p = \pm(\omega - i\epsilon)$

que obviamente não é inocente, compare com o propagador de Feynman que você conhece e note que estamos fazendo uma "teoria de campos" com 0 dimensões espaciais e uma temporal:

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{-i}{p^2 + m^2 - i\epsilon} e^{i p (t-y)} \rightarrow \int \frac{d^0 p}{(2\pi)} \frac{-i}{-(p^0)^2 + m^2 - i\epsilon} e^{-i p^0 (t-y)}$$

$$-(p^0)^2 + m^2 - i\epsilon \rightarrow \omega^2 - i\epsilon$$

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Voltemos então a equação 21.1:

$$\Delta^{-1} q_\alpha(t; J) = i J(t) \Rightarrow i \left( \frac{d^2}{dt^2} + w^2 \right) q_\alpha(t, J) = i J(t)$$

E lembrando que:

$$\underbrace{i \left( \frac{d^2}{dt^2} + w^2 \right)}_{\Delta^{-1}} \left( i \int \frac{dp}{2\pi} \frac{e^{-ip(t-t')}}{p^2 - w^2 + i\epsilon} \right) = \delta(t-t')$$

$\Delta_F(t-t')$

Fica fácil deduzir que:

$$q_\alpha(t, J) = i \int dt' \Delta_F(t-t') J(t')$$

Assumindo que  $J(t) \rightarrow 0 / t \rightarrow \pm \infty \Rightarrow \int dt' \rightarrow \int_{-T}^T dt'$  algum número finito, pois fora desta região  $J(t) = 0$

Então:  $t \rightarrow \infty \Rightarrow q_\alpha(t, J) = e^{-iwt} \underbrace{i \int_{-T}^T dt' \frac{e^{iwt'}}{2w} J(t')}_{\text{const.}} = A e^{-iwt}$

$t \rightarrow -\infty \Rightarrow q_\alpha(t, J) = e^{+iwt} \int_{-T}^T dt' \frac{e^{-iwt'}}{2w} J(t') = B e^{+iwt}$

Vemos que a prescrição 21.3 (chamada de **prescrição de Feynman**) é equivalente a resolver 21.1 com as condições de contorno:

$q_\alpha(t \rightarrow \infty, J) = e^{-iwt}$	(somente frequências positivas se propagam para o futuro)
$q_\alpha(t \rightarrow -\infty, J) = e^{iwt}$	(somente frequências negativas se propagam para o passado)

(eq. 22.1)

e estas condições exigem que  $J(t)$  seja limitado no tempo. Além disso, como estas condições não permitem soluções não triviais da equação 19.2, vemos que a integral de trajetória original em  $q(t)$  está bem definida (com a trajetória clássica satisfazendo 22.1 e a quântica satisfazendo 20.1).

## Espaço de Fase Harmônico

Vejamos agora como podemos tratar este oscilador forçado de forma mais rigorosa. Começando com o oscilador livre, temos:

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 q^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} q(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}} [a(t) + a^\dagger(t)] \\ p(t) &= -i\sqrt{\frac{\omega}{2}} [a(t) - a^\dagger(t)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}} [\omega q - i p] = a(0) e^{-i\omega t} \\ a^\dagger(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}} [\omega q + i p] = a^\dagger(0) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (\text{eq. 23.1})$$

↓ (quantizando)

$$H(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$$

Espaço de Fock:  $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle$

Até aqui, nada de novo, mas podemos também definir um outro conjunto de estados os **estados coerentes**:

$$|\alpha\rangle \equiv e^{\alpha \hat{a}^\dagger} |0\rangle = \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha^n}{n!} (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle \quad (\text{eq. 23.2})$$

Estas combinações lineares dos estados no espaço de Fock são autoestados de  $\hat{a}$ :

$$\begin{aligned} \hat{a} |\alpha\rangle &= \hat{a} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} |0\rangle + \underbrace{e^{\alpha \hat{a}^\dagger} \hat{a} |0\rangle}_0 = [\hat{a}, e^{\alpha \hat{a}^\dagger}] |0\rangle \\ [\hat{a}, e^{\alpha \hat{a}^\dagger}] &= [\hat{a}, \sum_{n \geq 1} \frac{\alpha^n}{n!} (\hat{a}^\dagger)^n] = \sum_{n \geq 1} \frac{\alpha^n}{n!} \left( \underbrace{[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]}_1 (\hat{a}^\dagger)^{n-1} + \hat{a}^\dagger \underbrace{[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]}_1 (\hat{a}^\dagger)^{n-2} + \dots + (\hat{a}^\dagger)^{n-1} \underbrace{[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]}_1 \right) = \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{\alpha^n}{(n-1)!} (\hat{a}^\dagger)^{n-1} = \alpha \sum_{n \geq 1} \frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!} (\hat{a}^\dagger)^{n-1} = \alpha e^{\alpha \hat{a}^\dagger} \end{aligned}$$

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle \quad (\text{eq. 23.3})$$

Da mesma forma:  $\left\{ \begin{aligned} \langle \alpha^* | &\equiv \langle 0 | e^{-\alpha^* \hat{a}} \\ \langle \alpha^* | \hat{a}^\dagger &= \langle \alpha^* | \alpha^* \end{aligned} \right. \quad (\text{eq. 23.4})$

Note que:

$$\langle \alpha^* | \alpha \rangle = \langle 0 | e^{\alpha^* \hat{a}^\dagger} | \alpha \rangle = e^{\alpha^* \alpha} \langle 0 | \alpha \rangle = e^{\alpha^* \alpha} \quad (\text{eq. 24.1})$$

$$\langle 0 | e^{\alpha^* \hat{a}^\dagger} | 0 \rangle = \langle 0 | 0 \rangle = 1$$

$$\langle 0 | 1 + \frac{\hat{a}^\dagger}{1} + \frac{(\hat{a}^\dagger)^2}{2} + \dots$$

E temos a identidade (provar que isto é a identidade está na lista de exercícios):

$$\hat{1} = \int \frac{d\alpha d\alpha^*}{2\pi i} e^{-\alpha \alpha^*} | \alpha \rangle \langle \alpha^* |$$

Usemos agora estes estados para calcular a amplitude de transição entre estados:

$$F(\alpha^*, t'; \alpha, t) = \langle \alpha^*, t' | \alpha, t \rangle_H = \langle \alpha^* | e^{-i\hat{H}(t'-t)} | \alpha \rangle$$

estados no quadro de Heisenberg, assim como no moving frame (pg 8)

Mudando para o oscilador forçado:

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2} + \frac{\omega^2 \hat{q}^2}{2} - \hat{q} J = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} - \frac{1}{\sqrt{2\omega}} [J \hat{a} + \frac{J}{L} \hat{a}^\dagger] \quad \gamma(t) \equiv \frac{J(t)}{\sqrt{2\omega}}$$

$L \in \mathbb{R}$

$$H(\hat{a}^\dagger, \hat{a}; t) = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} - \gamma(t) \hat{a}^\dagger - \bar{\gamma}(t) \hat{a} \quad (\text{eq. 24.2})$$

dependem ou não do tempo de acordo com o quadro, neste caso não pois estamos no q. de Schrödinger

Vale que:

$$\langle \alpha^* | \hat{H}(\hat{a}^\dagger, \hat{a}; t) | \beta \rangle = H(\alpha^*, \beta; t) \langle \alpha^* | \beta \rangle = H(\alpha^*, \beta; t) e^{\alpha^* \beta} \quad (\text{eq. 24.3})$$

Agora seguimos o procedimento usual para transformar a transição F em uma integral de trajetória, dividindo o tempo entre t e t' em n+1 intervalos de tamanho  $\epsilon$ :

$$\epsilon = \frac{t' - t}{N+1} \quad \{t_0 = t, t_1, t_2, \dots, t_n, t' = t_{n+1}\}$$

$$F(\alpha^*, t'; \alpha, t) = \int \prod_{i=1}^n \left[ \frac{d\alpha(t_i) d\alpha^*(t_i)}{2\pi i} e^{-\alpha^*(t_i) \alpha(t_i)} \right] \langle \alpha^*(t') | e^{-i\epsilon \hat{H}} | \alpha(t_n) \rangle \times$$

$$\times \langle \alpha^*(t_n) | e^{-i\epsilon \hat{H}} | \alpha(t_{n-1}) \rangle \dots \langle \alpha^*(t_1) | e^{-i\epsilon \hat{H}} | \alpha(t) \rangle$$

das n identidades inseridas

como:

$$\langle \alpha^*(t_{i+1}) | e^{-i\epsilon \hat{H}} | \alpha(t_i) \rangle = e^{-i\epsilon H(\alpha^*(t_{i+1}), \alpha(t_i); t_i)} e^{\alpha^*(t_{i+1}) \alpha(t_i)}$$

(aqui está a vantagem dos estados coerentes, se tentássemos fazer o mesmo no espaço de Fock apareceriam problemas pois o termo com fontes mistura níveis de Fock diferentes)

$$F(\alpha^*, t'; \alpha, t) = \int \prod_{i=1}^n \left[ \frac{d\alpha(t_i) d\alpha^*(t_i)}{2\pi i} \right] \text{EXP} \left[ -i \sum_{i=0}^n \epsilon H(\alpha^*(t_{i+1}), \alpha(t_i); t_i) \right] \times$$

$$\times \text{EXP} \left[ \sum_{i=1}^n -\alpha^*(t_i) \alpha(t_i) \right] \text{EXP} \left[ \sum_{i=0}^n +\alpha^*(t_{i+1}) \alpha(t_i) \right]$$

$$\text{EXP} \left[ \underbrace{\alpha^*(t') \alpha(t_n) - \alpha^*(t_n) \alpha(t_n)}_{\epsilon} + \underbrace{\alpha^*(t_n) \alpha(t_{n-1}) - \alpha^*(t_{n-1}) \alpha(t_{n-1})}_{\epsilon} \dots \underbrace{\alpha^*(t_1) \alpha(t_1)}_{\epsilon} + \underbrace{\alpha^*(t_1) \alpha(t)}_{\text{"órfão"} \epsilon} \right]$$

No limite  $\epsilon \rightarrow 0$   $\epsilon \frac{\alpha^*(t') - \alpha^*(t_n)}{\epsilon} \alpha(t_n) \rightarrow d\tau \dot{\alpha}^*(\tau) \alpha(\tau)$

$$F(\alpha^*, t'; \alpha, t) = \int \mathcal{D}\alpha \mathcal{D}\alpha^* \text{EXP} \left\{ i \int_t^{t'} d\tau \left[ \frac{\dot{\alpha}^*(\tau)}{i} \alpha(\tau) - H \right] + \alpha^*(t) \alpha(t) \right\} \quad (\text{eq. 25.1})$$

Para resolver esta integral precisamos pensar um pouco sobre as condições de contorno. É tentador dizer que  $\alpha^*$  e  $\alpha$  estão ambos fixos nas "bordas" ( $t'$  e  $t$ ), mas temos um problema, pois estes são autovalores de operadores diferentes ( $\hat{a}^\dagger$  e  $\hat{a}$  respectivamente) e estes dois operadores não comutam. Sabemos que, em mecânica quântica, a nossa capacidade de especificar autovalores **em um mesmo estado** está limitada por:

$$\sigma_A \sigma_B \geq \frac{1}{2} | \langle \psi | [\hat{A}, \hat{B}] | \psi \rangle | \quad (\text{Griffiths de Mec. Quant., sec 3.4})$$

$$\sigma_{\hat{Q}}^2 = \langle \psi | (\hat{Q} - \langle \hat{Q} \rangle)^2 | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{Q}^2 | \psi \rangle - \langle \psi | \hat{Q} | \psi \rangle^2$$

$$\rightarrow \langle \hat{Q} \rangle = \langle \psi | \hat{Q} | \psi \rangle$$

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar \rightarrow \sigma_q \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Como estamos no quadro de Schrödinger e os estados evoluem no tempo, não podemos especificar  $\alpha^*$  e  $\alpha$  ao mesmo tempo no estado inicial e nem no final, mas podemos fazer:

- $t \Rightarrow \alpha(t) = \alpha \quad \alpha^*(t) \text{ é livre} \quad (\sigma_{\alpha^*} = \infty)$
- $t' \Rightarrow \alpha^*(t') = \alpha^* \quad \alpha(t) \text{ é livre} \quad (\sigma_{\alpha} = \infty)$

este objeto vai aparecer exponenciado em todas as integrais da trajet. p/F ou Z  $i\tilde{S}[\alpha, \alpha^*]$

Note que a equação 25.1 está na forma:  $F = \int \mathcal{D}\alpha \mathcal{D}\alpha^* e^{i\tilde{S}[\alpha, \alpha^*]}$

e portanto podemos usar o princípio da extrema ação para achar a equação de movimento para as

soluções clássicas do sistema. Podemos re-escrever a ação de duas formas:

$$\tilde{S} = \int_t^{t'} d\tau \left[ \frac{\dot{\tilde{z}}^*(\tau)}{i} \alpha(\tau) - H \right] + \alpha^*(t) \alpha(t) = \int_t^{t'} d\tau \left[ -\frac{\alpha^*(\tau) \dot{\tilde{z}}(\tau)}{i} - H \right] + \alpha(\tau) \alpha^*(\tau) \Big|_t^{t'} + \alpha^*(t) \alpha(t)$$

+  $\alpha(t') \alpha^*(t')$

As equações de movimento obtidas (no interior do intervalo  $[t, t']$ ) são:

$$\delta \alpha(\tau) \left( \frac{\delta \tilde{S}}{\delta \alpha(\tau)} \right) + \delta \alpha^*(\tau) \left( \frac{\delta \tilde{S}}{\delta \alpha^*(\tau)} \right) = 0$$

$$\frac{\delta \tilde{S}}{\delta \alpha(\tau)} = \frac{\dot{\tilde{z}}^*(\tau)}{i} - \frac{\partial H}{\partial \alpha(\tau)} = 0$$

$$\frac{\delta \tilde{S}}{\delta \alpha^*(\tau)} = -\frac{\alpha(\tau) \dot{\tilde{z}}(\tau)}{i} - \frac{\partial H}{\partial \alpha^*(\tau)} = 0$$

$$H(\alpha^*, \alpha; \tau) = \omega \alpha^* \alpha - \gamma \alpha^* - \bar{\gamma} \alpha$$

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_\omega^* - i \omega \alpha_\omega^* + i \bar{\gamma} &= 0 \\ \dot{\alpha}_\omega + i \omega \alpha_\omega - i \gamma &= 0 \end{aligned}$$

(eq. 26.1)

com as condições:

$$\begin{cases} \delta \alpha^*(\tau) \Big|_{\tau=t'} = 0 \\ \delta \alpha(\tau) \Big|_{\tau=t} = 0 \end{cases}$$

Que tem como solução:

$$\begin{aligned} \alpha_\omega(\tau) &= \alpha e^{i\omega(t-\tau)} + i \int_t^\tau e^{i\omega(s-\tau)} \gamma(s) ds \\ \alpha_\omega^*(\tau) &= \alpha^* e^{i\omega(\tau-t')} + i \int_\tau^{t'} e^{i\omega(\tau-s)} \bar{\gamma}(s) ds \end{aligned}$$

(eq. 26.2)

Note que:

$$\alpha_\omega(t) = \alpha$$

$$\alpha_\omega^*(t') = \alpha^*$$

Usando estas soluções (ou as equações de movimento), dá para mostrar que (exercício):

$$\begin{aligned} i \int_t^{t'} d\tau \left[ \frac{\dot{\tilde{z}}^*(\tau)}{i} \alpha_\omega(\tau) - H(\alpha_\omega^*, \alpha_\omega) \right] + \alpha_\omega^*(t) \alpha_\omega(t) &= \alpha_\omega^*(t) \alpha_\omega(t) + i \int_t^{t'} d\tau \gamma(\tau) \alpha_\omega^*(\tau) = \\ &= \alpha^* \alpha e^{-i\omega(t'-t)} + i \int_t^{t'} ds \left[ \alpha e^{i\omega(t-s)} \bar{\gamma}(s) + \alpha^* e^{i\omega(s-t')} \gamma(s) \right] + \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_t^{t'} ds \int_t^{t'} ds' \gamma(s) \bar{\gamma}(s') e^{-i\omega|s'-s|} \end{aligned}$$

(eq. 26.3)

Compare 26.3 com 21.2: mais uma vez temos um termo independente das fontes (que em 21.2 foi absorvido na normalização) um termo linear na fonte e um termo quadrático, de onde podemos obter o propagador. Vamos usar o mesmo método que antes, fazendo:

$$\alpha(t) = \alpha_q(t) + \tilde{\alpha}(t)$$

$$\alpha^*(t) = \alpha_q^*(t) + \tilde{\alpha}^*(t)$$

De novo, podemos mostrar que:

$$\tilde{S}[\alpha(t), \alpha^*(t); \delta, \bar{\delta}] = \tilde{S}[\alpha_q(t), \alpha_q^*(t); \delta, \bar{\delta}] + \tilde{S}[\tilde{\alpha}(t), \tilde{\alpha}^*(t); 0, 0]$$

e obter, de forma análoga a 20.4, que:

$$\tilde{Z} = \mathcal{N} e^{i\tilde{S}[\alpha_q, \alpha_q^*; \delta, \bar{\delta}]}$$

Para relacionar este resultado com o anterior, temos que escolher os estados iniciais e finais como o vácuo:

$$|\alpha\rangle = e^{\alpha a^\dagger} |0\rangle \rightarrow \alpha = 0 \rightarrow |\alpha\rangle = |0\rangle$$

$$\alpha^* = 0 \rightarrow \langle \alpha^* | = \langle 0 |$$

E então tomamos  $\begin{cases} t \rightarrow -\infty \\ t' \rightarrow +\infty \end{cases}$

De 26.3 obtemos:

$$\mathcal{Z}[\mathcal{J}] \equiv \langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle_{\mathcal{J}} = \mathcal{N} \text{EXP} \left\{ \underbrace{\alpha^* \alpha}_{\rightarrow 0} e^{-i\omega(t'-t)} + i \int_t^{t'} d\alpha \left[ \underbrace{\alpha}_{\rightarrow 0} e^{i\omega(t-s)} \bar{\gamma}(s) + \underbrace{\alpha^*}_{\rightarrow 0} e^{i\omega(s-t')} \gamma(s) \right] + \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \int_t^{t'} ds \int_t^{t'} ds' \underbrace{\gamma(s)}_{\mathcal{J}/\sqrt{2\omega}} \underbrace{\bar{\gamma}(s')}_{\mathcal{J}/\sqrt{2\omega}} e^{-i\omega|s-s'|} \right\} = \mathcal{N} \text{EXP} \left[ -\frac{1}{i} \mathcal{J} \cdot \Delta_F \cdot \mathcal{J} \right] \quad (\text{eq. 27.1})$$

Note que:  $\mathcal{N} = \langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle_0$  (eq. 27.2)

$$\Delta_F = \frac{1}{2\omega} e^{-i\omega|s-s'|}$$

(eq. 27.3)

Que é o mesmo resultado obtido na pg 22. Note também que a condição de contorno:

$$\left. \begin{matrix} t \rightarrow -\infty \\ \alpha(t) = 0 \\ \alpha^*(t) \text{ livre} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \text{só temos a parte de criação no passado}$$

$\alpha^*(t)$  é autovalor de  $a^\dagger$

$t \rightarrow +\infty$   
 $\psi^*(t) = 0$   
 $\psi(t)$  livre

$\Rightarrow$  só temos a parte de aniquilação no futuro  
 $\psi(t)$  é autovalor de  $a$

Como 
$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left[ a e^{-i\omega t} + a^\dagger e^{i\omega t} \right]$$

verificamos que isto é o mesmo que as condições 22.1.

O que ganhamos fazendo de novo este caminho? Para começar ele é mais limpo, não houve uso prescrição alguma. Adicionalmente vimos que o resultado final só pôde ser obtido escolhendo os estados inicial e final como o vácuo, este passo não ficou explícito no caso anterior. De fato a projeção no vácuo estava escondida no único lugar em que poderia, na prescrição de Feynman que, como já vimos, está intrinsecamente ligada a projeção no vácuo assintótico (para tempos grandes) da teoria.

### Rotação de Wick para o tempo Euclideano

Até agora viemos fazendo integrais que tipicamente envolviam exponenciais do tipo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-i\alpha x^2}$$

que exige que  $\alpha$  ou  $x$  sejam tomados ligeiramente complexos para que a integral convirja, ou seja, estas integrais só estão definidas via sua continuação analítica. Este tipo de integral aparece com frequência em teoria de campos, pois em geral podemos expandir as integrais da ação em torno da solução clássica usando a [Saddle Point Approximation](#):

$$S = S[q_{cl}] + \frac{1}{2} \delta q_i S_{,ij} \delta q_j + \mathcal{O}(\delta q^3)$$

$$\boxed{\frac{\delta S}{\delta q} \Big|_{q=q_{cl}} = 0}$$

se a ação já é quadrática em  $q$  (e.g. no caso livre) este termo é zero e o resultado da SPA é exato.

Uma outra forma de olhar a continuação analítica é fazendo uma rotação para o Espaço Euclideano, este procedimento é também bastante instrutivo pois revela paralelos interessantes entre a Mecânica Quântica e a Mecânica Estatística. Pois bem, analisemos o seguinte caso:

$$\hat{H} |n\rangle = E_n |n\rangle$$

$$E_n > 0$$

$$\hat{1} = \sum |n\rangle \langle n|$$

Uma amplitude de transição seria escrita como:

$$\begin{aligned} \langle q', t' | q, t \rangle_H &= \langle q' | e^{-\frac{i\hat{H}(t'-t)}{\hbar}} | q \rangle = \sum_n \sum_m \langle q' | n \rangle \underbrace{\langle n | e^{-\frac{i\hat{H}(t'-t)}{\hbar}} | m \rangle}_{\delta_{mn} e^{-iE_n(t'-t)}} \langle m | q \rangle = \\ &= \sum_n \langle q' | n \rangle \langle n | q \rangle e^{-i\frac{E_n(t'-t)}{\hbar}} = \sum_n \psi_n(q') \psi_n^*(q) e^{-i\frac{E_n(t'-t)}{\hbar}} \end{aligned}$$

Que é uma função analítica em  $\Delta t \equiv (t' - t)$  e portanto admite a continuação:

$\Delta t \rightarrow -\lambda t_E$  (eq. 29.1) Rotação de Wick  $\Delta t \in \mathbb{R}$

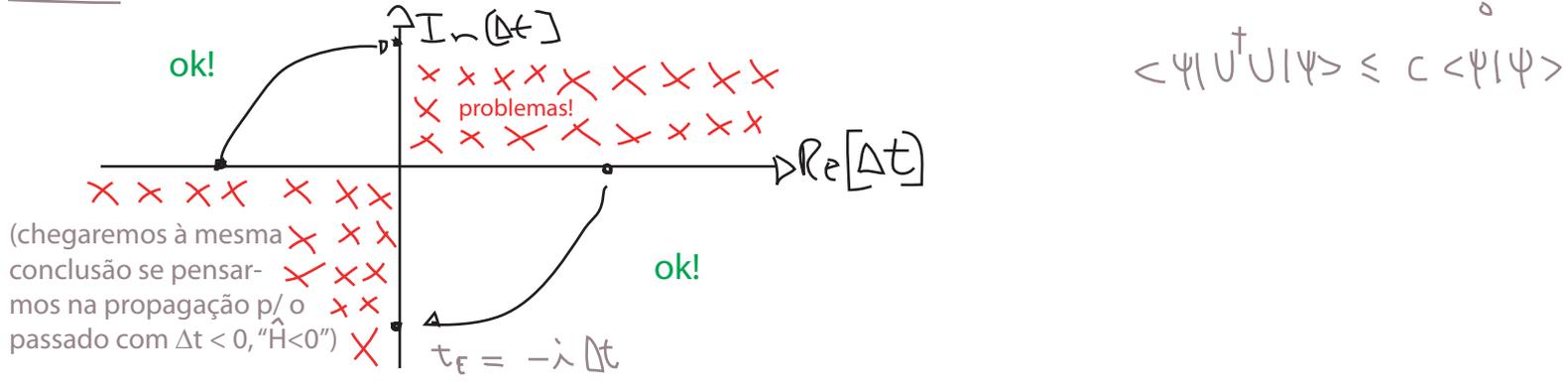
A razão pela qual "rodamos" nesta direção é a seguinte: considere o operador de evolução:

$$U(t) = e^{-\frac{i\hat{H}\Delta t}{\hbar}} = e^{-\frac{i\hat{H} \text{Re}[\Delta t]}{\hbar}} e^{\frac{\hat{H} \text{Im}[\Delta t]}{\hbar}}$$

$\left. \begin{matrix} > 1 & \text{Im}[\Delta t] > 0 \\ < 1 & \text{Im}[\Delta t] < 0 \end{matrix} \right\}$

$\swarrow$  propagação p/ futuro ( $\Delta t > 0$ , " $\hat{H} > 0$ ")

O que acontece se fizermos a continuação analítica para o plano complexo em  $\Delta t$ ? -  $U$  só é limitado para valores negativos de  $\text{Im}[t]$ :



Com esta rotação temos:

$$\langle q', t_E | q, 0 \rangle_H = \sum_n \psi_n(q') \psi_n^*(q) e^{-\frac{t_E E_n}{\hbar}} \quad (\text{eq. 29.2})$$

Note que:  $\int dq \langle q, \tau | q, 0 \rangle_H = \sum_n e^{-\frac{\tau E_n}{\hbar}} = \text{Tr} \left\{ e^{-\frac{\tau \hat{H}}{\hbar}} \right\} = Z\left(\frac{\tau}{\hbar}\right)$

$\swarrow$  note que são iguais  $\int dq |\psi_n(q)|^2 = 1$

Euclidiano (vou usar  $\tau$  quando os pontos inicial e final forem iguais)

é a função de partição canônica do sistema para uma temperatura  $kT_Q = \frac{\hbar}{\tau} \equiv \frac{1}{\beta}$   $\tau = \hbar \beta$

$\swarrow$  também é 1 em unidades naturais

Ou seja, a função de partição do sistema é obtida integrando sobre um ponto de uma trajetória fechada ( $q' \equiv q(\tau) = q(0) \equiv q$ ) e de "comprimento"  $\tau = \hbar\beta$  no tempo Euclidiano.

Vejamos como fica a integral de trajetória para esta mesma transição. A lagrangiana é:

$$L = \frac{1}{2} \left( \frac{dq}{dt} \right)^2 - V(q)$$

O expoente na integral de trajetória fica:

$$iS[q] = i \int_t^{t'} dt'' \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{dq}{dt''} \right)^2 - V(q) \right] = i \int_0^{\hbar\beta} (-i dt_E) \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{dq_E}{d(-it_E)} \right)^2 - V(q_E) \right] \equiv -S_E[q_E]$$

$q(t'') \rightarrow q(-it_E) = q_E(t_E)$

$\Rightarrow iS[q] = -S_E[q_E]$

$\uparrow \uparrow$   
 $\textcircled{1} t'' \rightarrow t'' - t \Rightarrow \int_0^{\Delta t} dt'' \Rightarrow \textcircled{2} t_E = -it''$   
 $\tau = i \Delta t = \hbar\beta$

$$\therefore S_E[q_E] = \int_0^{\hbar\beta} dt_E \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{dq_E}{dt_E} \right)^2 + V(q_E) \right] = \int dt_E L_E(q_E, \dot{q}_E)$$

$\hookrightarrow T + V$  (Hamiltoniana Clássica)

Para obter então a função de partição, basta então exigir que os extremos da trajetória sejam o mesmo ponto (trajetória fechada) e incluir a integral sobre este ponto em  $\mathcal{D}_q$ . Na prática estamos integrando sobre todos os caminhos fechados de comprimento  $\hbar\beta$ .

$$Z(\beta) = \text{Tr} \left\{ e^{-\frac{\hbar\beta}{\hbar} \hat{H}} \right\} = \int_{q_E(t_E + \tau) = q_E(t_E)} \mathcal{D}q_E e^{-\frac{1}{\hbar} S_E[q_E]}$$

Fórmula de Feynman-Kac

(eq. 30.1)

Podemos tirar qualquer quantidade de interesse da função de partição, uma vez que ela tem toda informação relevante do sistema. De fato a mecânica estatística de uma partícula quântica em contato com um banho térmico em temperatura T é dada pela **matriz de densidade**:

$$\hat{\rho}_\beta = \frac{1}{Z} e^{-\beta \hat{H}}$$

$\beta = \frac{1}{k_B T}$  fator de Boltzman

$\hookrightarrow$  normalização

que contém as probabilidades de encontrar a partícula nos estados de energia  $E_n$ :  $\frac{1}{Z} e^{-\beta E_n}$

A condição de normalização identifica Z como a função de partição:

$$\text{Tr}[\hat{\rho}_\beta] = 1 \iff Z(\beta) = \text{Tr}[\exp(-\beta \hat{H})]$$

O valor esperado de qualquer observável  $\hat{O}$  é dado por:

$$\langle \hat{O} \rangle_{\beta} = \text{Tr}(\hat{\rho}_{\beta} \cdot \hat{O}) \quad (\text{eq. 31.1})$$

A matriz de densidade é proporcional ao próprio operador de evolução no espaço Euclidiano:

$$U(t) = e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}} \rightarrow \hat{U}(-i\tau) = e^{-\frac{\tau}{\hbar} \hat{H}} = e^{-\beta \hat{H}} \quad \tau = \hbar \beta$$

$$\tau = \hbar \beta = \frac{\hbar}{k_B T_0}$$

$$k_B T_0 = \frac{\hbar}{k_B \tau}$$

$$\hat{\rho}_{\beta} = \frac{1}{Z} \hat{U}(-i\tau) \quad Z = \text{Tr}[\hat{U}(-i\tau)]$$

Vemos que a "evolução" de um sistema neste "tempo imaginário" serve para descrever as propriedades deste mesmo sistema em equilíbrio com um banho térmico.

Recapitulando:

Partícula (quântica) em eq. com banho de temperatura T

$$\hat{\rho}_{\beta} (e^{-\beta \hat{H}}), \quad Z = \text{Tr}[e^{-\beta \hat{H}}]$$

Partícula (quântica) isolada em tempo imaginário

$$\hat{U}(-i\tau)$$

isto é tudo que preciso saber, e posso obtê-lo daqui

(31.2)

Além disso, a métrica agora é de um espaço Euclidiano:

$$ds^2 = -dt^2 + dq^2$$

$$\downarrow t = -i t_E$$

$$ds_E^2 = dt_E^2 + dq^2 \Rightarrow \text{distância Euclidiana em } \mathbb{R}^{n+1}$$

Atenção! Estou seguindo a convenção:

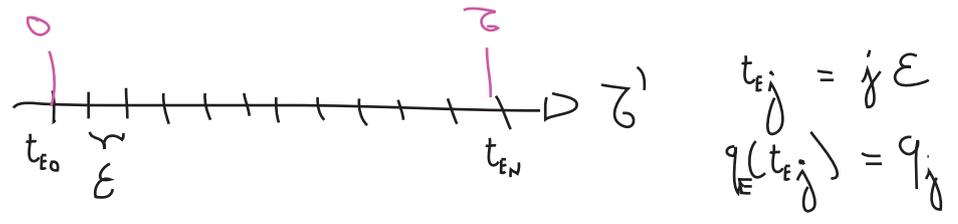
$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A maioria dos livros usa o sinal oposto (diag{1,-1,-1,-1}) lembre-se disso quando for comparar resultados

e portanto,  $t_E$  é uma variável tipo espaço. Vejamos o que acontece se pensarmos na variável de integração  $t_E$  como uma distância, além disso, consideraremos um sistema simples (oscilador harmônico):

$$S_E[q_E] = \frac{1}{\hbar} \int_0^{\tau} dt_E \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{dq_E}{dt_E} \right)^2 + V(q_E) \right] \quad V(q_E) = \frac{\omega^2}{2} q_E^2$$

Discretizando o "tempo Euclideo":



$$\int \mathcal{D}q_E \text{EXP} \left\{ -\frac{1}{\hbar} \int_0^{\tau_0} dt_E \left[ \frac{\dot{q}_E^2}{2} + \frac{1}{2} \omega^2 q_E^2 \right] \right\}$$

$$\downarrow$$

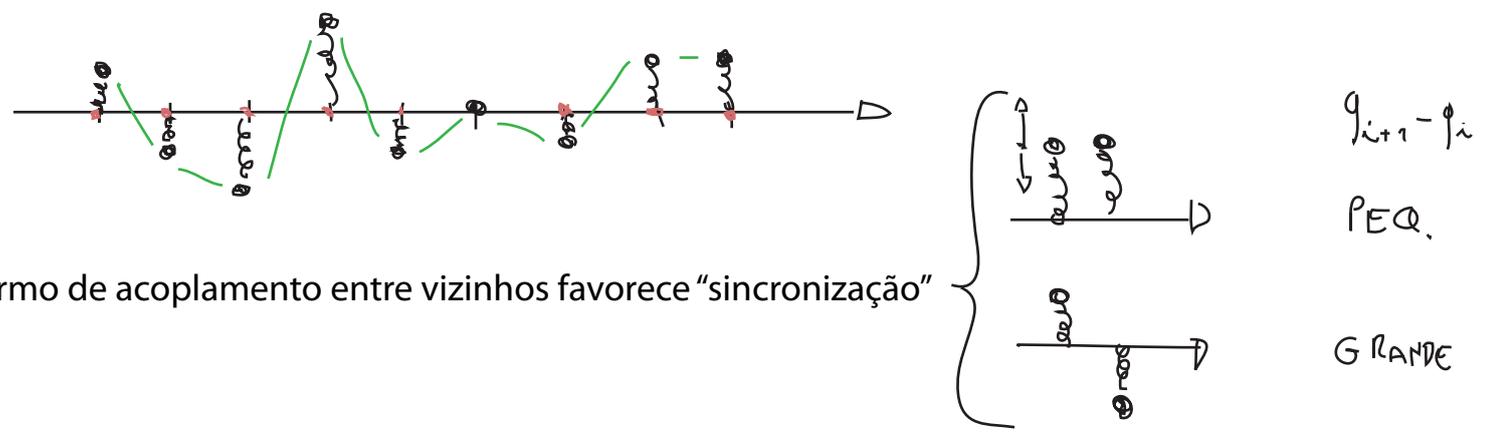
$$\int \prod dq_j \text{EXP} \left\{ -\frac{1}{\hbar} \sum_j \epsilon \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{q_{j+1} - q_j}{\epsilon} \right)^2 + \frac{1}{2} \omega^2 q_j^2 \right] \right\}$$

Isso é exatamente a função de partição de um sistema clássico em temperatura  $T_S$

$$Z = \underbrace{\int \prod dq_j}_{\text{"soma" todas as configurações } \{q_i\}} \underbrace{\text{EXP}}_{\frac{1}{\hbar T_S}} \left\{ -\frac{1}{\hbar} \sum_j \epsilon \left[ \underbrace{\frac{1}{2} \left( \frac{q_{j+1} - q_j}{\epsilon} \right)^2}_{\text{energia total}} + \underbrace{\frac{1}{2} \omega^2 q_j^2}_{\text{energia de um oscilador}} \right] \right\}$$

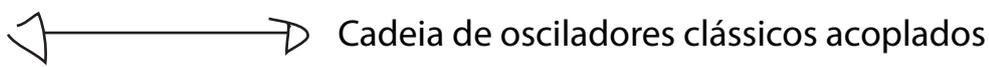
acoplamento entre vizinhos      energia de um oscilador

Na prática temos um sistema de osciladores:



O termo de acoplamento entre vizinhos favorece "sincronização"

1 Oscilador Quântico  
(em Temp finita ou tempo imaginário)



Futuações quânticas



Futuações térmicas

$\hbar$



$\hbar \omega T_S$

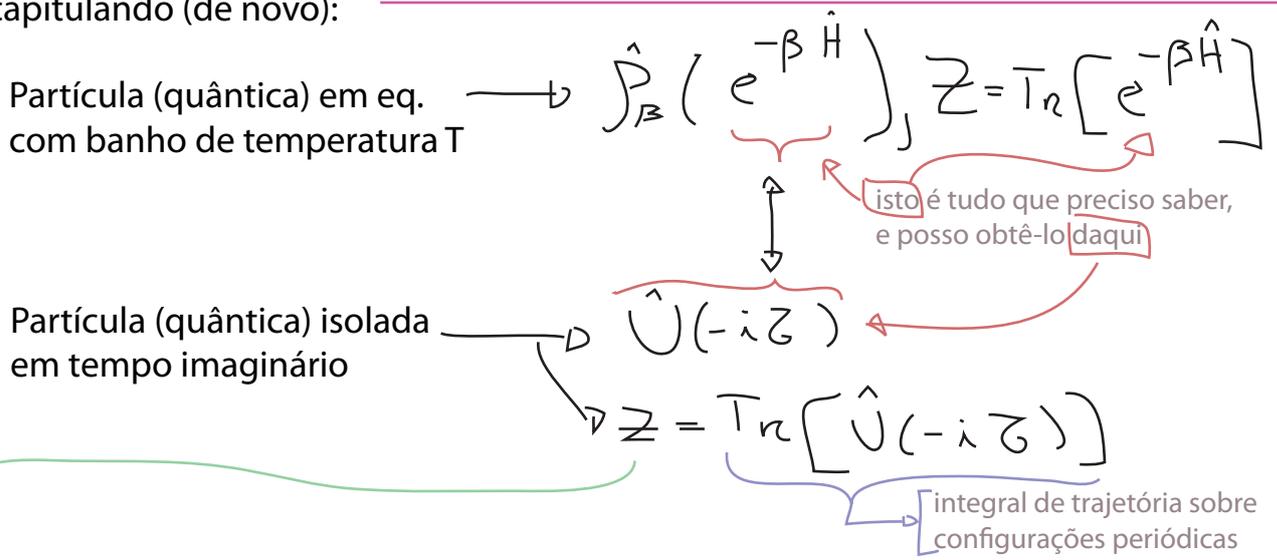
temperatura do Sistema de osciladores clássicos

1 grau de liberdade  $\longleftrightarrow$  número grande graus de liberdade clássicos

Temperatura  $\longleftrightarrow$  (Comprimento da Cadeia)<sup>-1</sup>  
 $T_Q = \frac{\hbar}{k_B \tau}$   $\rightarrow$  período

temperatura de um banho térmico com o qual um oscilador Quântico está em contato

Recapitulando (de novo):



É também a função de partição de um sistema clássico (de fato de muitos sistemas clássicos acoplados aos "primeiros vizinhos")  $\rightarrow$  Mecânica Estatística

(33.1)

Até agora vimos a relação entre o operador de evolução e a função de partição. E os observáveis?

$\hat{A}(q)$   $\xrightarrow{(31.1)}$  quântica em T  $\rightarrow \langle \hat{A}(q_\epsilon) \rangle_\beta = \text{Tr} [\hat{\rho}_\beta \cdot \hat{A}(q_\epsilon)] = \frac{\text{Tr} [e^{-\beta \hat{H}} \hat{A}(q_\epsilon)]}{Z}$

$\beta = \frac{1}{k_B T_Q}$

$= \frac{\text{Tr} [\hat{U}_\epsilon(\tau) \hat{A}(q_\epsilon)]}{\text{Tr} [\hat{U}_\epsilon(\tau)]}$

$\text{Tr} [\hat{U}_\epsilon(\tau)] \stackrel{30.1}{=} \int_{\mathcal{P}} \mathcal{D}q_\epsilon e^{-\frac{1}{\hbar} S_\epsilon[q_\epsilon]}$

$\text{Tr} [\hat{U}_\epsilon(\tau) \hat{A}(q_\epsilon)] = \int_{\mathcal{P}} \mathcal{D}q_\epsilon e^{-\frac{1}{\hbar} S_\epsilon[q_\epsilon]} A(q_\epsilon(\tau_1))$

$\hat{A}(q_\epsilon) |q_\epsilon(\tau_1)\rangle = A(q_\epsilon(\tau_1)) |q_\epsilon(\tau_1)\rangle$  (em caminhos periódicos)

$$\langle \hat{A} \rangle = \frac{\int_{\mathcal{P}} \mathcal{D}q_E e^{-\frac{1}{\hbar} S_E[q_E]} A(q_E(\tau_1))}{\int_{\mathcal{P}} \mathcal{D}q_E e^{-\frac{1}{\hbar} S_E[q_E]}}$$

(eq. 34.1)

Notem que, pensando em  $\int \mathcal{D}q_E$  como a soma sobre as configurações de uma cadeia clássica, esta mesma definição dá o valor esperado em Mecânica Estatística para observáveis de um sistema de temperatura  $T_s = \frac{\hbar}{k_B \tau}$

O que acontece quando fazemos  $T_Q \rightarrow 0$  ?

$$T_Q \rightarrow 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow \infty \end{array} \right.$$

$$\tau = \hbar \beta = \frac{\hbar}{k_B T_Q}$$

$$\text{Tr} [\hat{U}_E(\tau)] = \sum_n e^{-\frac{\tau}{\hbar} E_n}$$

$$\tau \rightarrow \infty \Rightarrow e^{-\frac{\tau}{\hbar} E_0} \gg e^{-\frac{\tau}{\hbar} E_1} \gg e^{-\frac{\tau}{\hbar} E_2}$$

Seleciono a configuração de menor energia

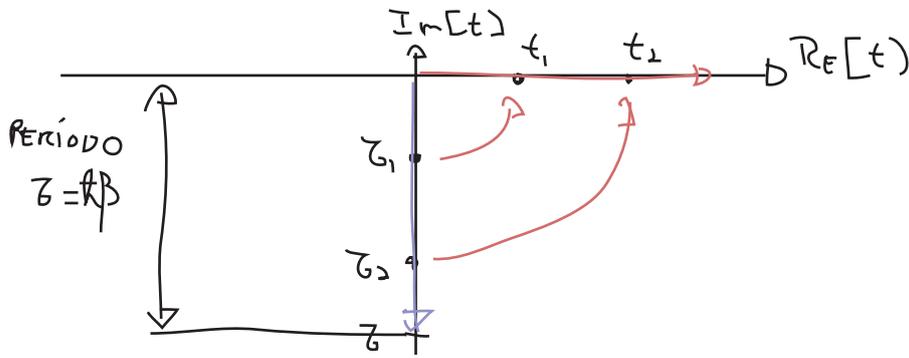
$$\text{Tr} [\hat{U}_E(\tau \rightarrow \infty)] = \langle 0 | e^{-\frac{\tau}{\hbar} E_0} | 0 \rangle$$

$$\text{Tr} [\hat{U}_E(\tau) \hat{A}(q_E)] = \langle 0 | \hat{A}(q_E) | 0 \rangle e^{-\frac{\tau}{\hbar} E_0}$$

$$\langle 0 | \hat{A}(q_E) | 0 \rangle = \langle \hat{A} \rangle_{\beta \rightarrow \infty}$$

Mandar a temperatura para zero **projeta os operadores no vácuo da teoria**. Com isso podemos entender outra forma de obter os propagadores de Feynman:

$$\Delta_F(t_1 - t_2) = \langle 0 | T \{ \hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2) \} | 0 \rangle$$



Podemos obter primeiro o valor  $\langle \hat{q}_E(z_1) \hat{q}_E(z_2) \rangle_{\beta = \frac{\tau}{\hbar}} = \int_{\mathcal{P}} \mathcal{D}q_E e^{-\frac{i}{\hbar} S_E} q_E(z_1) q_E(z_2)$

$(z_1 < z_2) \Rightarrow (t_1 < t_2)$

e então voltar ao tempo real fazendo:  $z_1 \rightarrow i t_1$   
 $z_2 \rightarrow i t_2 \Rightarrow \langle \hat{q}(t_2) \hat{q}(t_1) \rangle_{\beta}$

Se tivéssemos calculado a mesma coisa com  $z_2 < z_1$  (note que na integral de trajetória não há diferença), teríamos voltado para:  $\langle \hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2) \rangle_{\beta}$

ou seja, voltamos sempre no produto temporalmente ordenado:

$$\langle T \{ \hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2) \} \rangle_{\beta}$$

Para projetar no vácuo basta tomar temperatura zero

$$\left. \begin{matrix} \beta \rightarrow \infty \\ T \rightarrow 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \langle 0 | T \{ \hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2) \} | 0 \rangle$$

Podemos também obter uma expressão para o propagador/correlator livre em temperaturas finitas:

$$\Delta_{\text{FREE}}(z') = \langle T \{ \hat{q}(-i\tau) \hat{q}(0) \} \rangle_{\beta}$$

considerando a equação de movimento:

$$\left[ \frac{d^2}{dt_1^2} + \omega^2 \right] \Delta_{\text{FREE}}(z_1 - z_2) = \delta(z_1, z_2) \quad (\text{eq. 35.1})$$

$$-\frac{d^2}{d\tau_1^2} + \omega^2$$

1 (já podemos voltar para unidades naturais)

Lembrando que, como o espaço Euclideo é cíclico de período  $\tau = \hbar\beta$ , vale:

$$\Delta_{\text{FREE}}(\tau \pm \beta) = \Delta_{\text{FREE}}(\tau)$$

A eq. 35.1 tem somente uma solução para  $(z_1 - z_2) \in [0, \beta]$ :

$$\Delta_{F \neq E}(\bar{z}') = \frac{1}{2\omega} \left[ (1 + n(\omega)) e^{-\omega \bar{z}'} + n(\omega) e^{\omega \bar{z}'} \right] \quad (\text{eq. 36.1})$$

onde:

$$n(\omega) = \frac{1}{e^{\beta|\omega|} - 1} \quad (\text{eq. 36.2})$$

é a distribuição de Bose-Einstein. E no limite de temperatura zero:

$$\begin{aligned} T=0 & \quad n(\omega) \rightarrow 0 \\ \beta \rightarrow \infty & \quad \Delta_{F \neq E} \rightarrow \Delta_F(\bar{z}') = \frac{e^{-\omega \bar{z}'}}{2\omega} \quad (\text{compare com 27.3}) \end{aligned}$$

### O oscilador Harmônico forçado (de novo)

Veamos como fica o oscilador no espaço Euclidiano. Partindo da ação:

$$i S[q] = i \int dt \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{dq}{dt} \right)^2 - \frac{\omega^2}{2} q^2 + J q \right]$$

$$\begin{aligned} \text{Wick} & \left\{ \begin{array}{l} t = -i t_E \\ q(t) = q(-i t_E) = q_E(t_E) \\ J(t) = J(-i t_E) = J_E(t_E) \end{array} \right. \quad \left( \frac{dq}{dt} \right)^2 = \left( \frac{1}{-i} \right)^2 \left( \frac{dq_E}{dt_E} \right)^2 \end{aligned}$$

$$-S_E[q] = \int dt_E \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{dq_E}{dt_E} \right)^2 - \frac{\omega^2}{2} q_E^2 + J_E q_E \right]$$

Suprimindo todos os índices "E" para simplificar a notação, obtemos a seguinte função de partição:

$$Z_E[J] = \int_{\mathcal{F}} \mathcal{D}q \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int dt \left[ \left( \frac{dq}{dt} \right)^2 + \omega^2 q^2 \right] + \int dt J(t) q(t) \right\} \quad (\text{eq. 36.2})$$

A vantagem agora é que estamos fazendo esta integral em trajetórias fechadas, por isso não há problema com bordas quando integramos por partes (compare com a pg 18):

$$\begin{aligned} Z_E[J] &= \int_{\mathcal{F}} \mathcal{D}q \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{z_1}^{z_1+\beta} dt q \left[ \underbrace{\left( \frac{dq}{dt} \right)^2}_{\Delta_E^{-1}} + \omega^2 \right] q + \int_{z_1}^{z_1+\beta} dt J(t) q(t) \right\} = \\ &= N \exp \left\{ \frac{1}{2} \int ds \int ds' J(s) \Delta_E(s, s') J(s') \right\} \quad (\text{eq. 36.3}) \end{aligned}$$

$z_1 \rightarrow -\infty$   
 $z_1 + \beta \rightarrow \infty$   
 $J(t) \neq 0 \quad -T < t < T$   
 $J(t) = 0 \quad |t| > |T|$

note que este  $\Delta$  é a função de Green que soluciona o problema clássico:

$$-\frac{\partial^2 q_a}{\partial t^2} + \omega^2 q_a = J(t)$$

$$q_a(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \Delta_F(t, t') J(t')$$

$$\Delta_F(s, s') \equiv \left(-\frac{d^2}{ds^2} + \omega^2\right)^{-1}(s, s') = \int \frac{dE_E}{2\pi} \frac{e^{-i E_E (s - s')}}{E_E^2 + \omega^2} \quad (\text{eq. 37.1})$$

$$\left(-\frac{d^2}{ds^2} + \omega^2\right) \Delta_F(s, s') = \int \frac{dE_E}{2\pi} \left(-(-i E_E)^2 + \omega^2\right) \frac{e^{-i E_E (s - s')}}{E_E^2 + \omega^2} = \delta(s - s')$$

Note que a integral feita da primeira para a segunda linha de 36.3 é uma Gaussiana tradicional (nenhuma exponencial complexa por ali). Além disso o propagador Euclidiano em 37.1 não tem pólos para  $E_E$  real e portanto não precisamos falar nada sobre o caminho de integração. Os polos foram movidos para o eixo complexo pela rotação de Wick:

polos de  $\Delta_F$ :  $E_E = \pm i \omega$

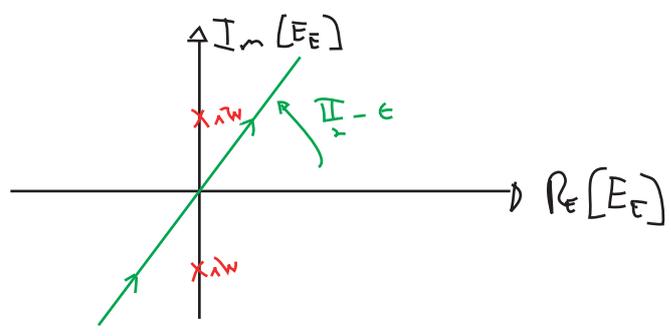
Queremos, finalmente, voltar para o espaço de Minkowski. Já sabemos que  $t = -i t_E$  mas como rodamos  $E_E$ ? Primeiramente exigimos que  $E t = E_E t_E$ , então:

$$E \approx i E_E \approx e^{i \frac{\pi}{2}} E_E \quad E t = (i E_E)(-i t_E) = E_E t_E$$

(o que é arbitrário, mas garante que ondas planas se propagem na mesma direção espacial com  $t$  ou  $t_E$  crescente, uma vez que:

$$e^{i p \cdot x} = e^{-i(E t - \vec{p} \cdot \vec{x})} = e^{-i(E_E t_E - \vec{p} \cdot \vec{x})}$$

Além disso, para que a extensão analítica seja válida, não podemos cruzar os polos, portanto não podemos rodar totalmente para  $E_E = -i E$  mas sim parar antes de chegar no polo:



$$E = e^{i(\frac{\pi}{2} - \epsilon)} E_E = i(E_E - i \epsilon)$$

ou

$$E_E = e^{-i(\frac{\pi}{2} - \epsilon)} E = -i(E + i \epsilon)$$

Com esta rotação temos:

$$(\text{eq. 37.1}) \Rightarrow \Delta_F(t_E = i t) = \int \frac{dE_E}{2\pi} \frac{e^{-i E_E t_E}}{E_E^2 + \omega^2} = \int \frac{-i dE}{2\pi} \frac{e^{-i E t}}{-E^2 + \omega^2 - i \epsilon} = \Delta_F(t)$$

$$E_E^2 = [-i(E + i \epsilon)]^2 = -(E^2 + i \epsilon E + \omega(\epsilon^2))$$

De forma que, mais uma vez, somos levados ao propagador de Feynman.



# Quantização do Campo Escalar por Path Integrals

(Nastase 9, Peskin 9.2, Ryder 6.1 a 6.5, Ramond 3.1 e 3.2)

Usaremos as idéias das últimas 20 páginas para quantizar o campo escalar usando integrais de trajetória. Resumindo, o caminho mais curto e seguro que encontramos para quantizar o oscilador harmônico forçado foi:

- (1) Escrever uma função de partição do sistema como uma integral de trajetória, sobre um caminho fechado, no espaço Euclidiano (esta integral é bem definida e não tem bordas para criar problemas)
- (2) Para projetar sobre os estados do vácuo, tomamos  $\beta \rightarrow 0$  (período infinito na integral de traj.)
- (3) Rodamos o resultado para o espaço físico (de Minkowski), tomando cuidado de não tocar os polos (o que nos leva invariavelmente a um propagador de Feynman)

Para passar para uma teoria de campos, faremos a substituição:

$$q_\mu(t) \rightarrow \phi_{\vec{x}}(t) \equiv \phi(\vec{x}, t) \equiv \phi(x)$$

↑ tem uma discretização do espaço aqui

A ação do campo escalar, no espaço de Minkowski, é:

$$i S[\phi] = i \int d^4x \left[ -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - V(\phi) \right]$$

e as funções de n pontos:

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | T \{ \hat{\phi}(x_1) \dots \hat{\phi}(x_n) \} | 0 \rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{i S[\phi]} \phi(x_1) \dots \phi(x_n)$$

e estas podem ser obtidas a partir de integrais de trajetória sobre trajetórias periódicas de período infinito, usando a seguinte ação Euclidiana:

$$-S_E[\phi] = - \int d^4x \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\mu \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + V(\phi) \right] \quad (\text{eq. 38.1})$$

(todos os índices "E" foram suprimidos)

EUCLID:  $a_\mu b_\mu = a_\mu b^\mu = a_\mu b_\nu \delta^{\mu\nu}$

$t = x^0 = -x_0 \equiv -i t_E$

$t_E \equiv x^1 \equiv x_1$        $x^1 = i x^0$

$$\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi = - \frac{\partial \phi}{\partial x^0} \frac{\partial \phi}{\partial x^0} + \partial_i \phi \partial_i \phi =$$

$$= \frac{\partial \phi}{\partial x^1} \frac{\partial \phi}{\partial x^1} + \partial_i \phi \partial_i \phi = \partial_\mu^E \phi \partial_\mu^E \phi$$

As funções de Green Euclidianas são:

$$G_n^{(E)}(x_1, \dots, x_n) = \int \mathcal{D}\phi \ e^{-S_E[\phi]} \phi(x_1) \dots \phi(x_n)$$

Podemos escrever o funcional gerador / função de partição para um período  $\beta$ :

$$Z[\beta, J] = \text{Tr} \left\{ e^{-\beta \hat{H}_3} \right\} = \int \mathcal{D}\phi \ e^{-S_E[\phi] + J\phi}$$

$\phi(\vec{x}, t_E + \beta) = \phi(\vec{x}, t_E)$

$J\phi = \int d^d x \ J(x)\phi(x)$

$\beta \rightarrow \infty$

$$\hookrightarrow Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \ e^{-S_E[\phi] + J\phi} \equiv \langle 0|0 \rangle_J \quad (\text{eq. 39.1})$$

estamos generalizando o raciocínio a seguir para um número arbitrário de dimensões

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{\int \mathcal{D}\phi \ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{-S_E[\phi] + J\phi}}{\int \mathcal{D}\phi \ e^{-S_E[\phi] + J\phi}} \Bigg|_{J=0} \quad (\text{eq. 39.2})$$

e (por definição):

$$Z[J] = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \int \prod_{i=1}^n d^d x_i \ G_n(x_1, \dots, x_n) J(x_1) \dots J(x_n) \quad (\text{eq. 39.3})$$

### Teoria de Perturbação

Vamos assumir agora que este campo tem uma interação tratável em teoria de perturbação, e fazer a divisão usual:

$$S[\phi] = S_0[\phi] + S_I[\phi]$$

A funções de Green no espaço dos momentos são:

$$\tilde{G}_n(p_1, \dots, p_n) = \int d^d x_1 \dots d^d x_n \ e^{i(p_1 x_1 + \dots + p_n x_n)} G_n(x_1, \dots, x_n)$$

Qualquer teoria que seja invariante por translações (ou seja, que conserve momento e energia):

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = G_n(x_1 - X, x_2 - X, \dots, x_n - X)$$

escolhendo:  $X = x_1$  e mudando as integrais:  $x_i \rightarrow x_i + X \quad i \geq 2$

$$\tilde{G}_n(p_1, \dots, p_n) = \left[ \int d^d x_1 \ e^{i x_1 (p_1 + \dots + p_n)} \right] \left[ \int d^d x_2 \dots d^d x_n \ e^{i(x_2 p_2 + \dots + x_n p_n)} G_n(0, x_2, \dots, x_n) \right]$$

$$= (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \dots + p_n) G_n(p_1, \dots, p_n)$$

tendo em mente que a dependência de  $p_1$  entra por meio da soma dos outros momentos

nestas funções a conservação de momento já está garantida

Um resultado importante, chamado de fórmula de Dyson, pode ser obtido começando com o VEV (valor esperado no vácuo) de operadores **quaisquer** no vácuo da teoria livre:

$$\langle 0 | \hat{O}[\{\hat{\phi}\}] | 0 \rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_0[\phi]} \mathcal{O}[\{\phi\}]$$

vácuo da teoria livre

deste lado a informação vácuo está no fato de tomarmos configurações periódicas  $\phi(\vec{x}, t_E + \beta) = \phi(\vec{x}, t_E)$  com  $\beta$  infinito e sabemos que é o vácuo da teoria livre pois usamos  $S_0$  na função de partição

Suponha que:  $\hat{O} = e^{-S_I[\phi]}$

temos então:

$$\langle 0 | e^{-S_I[\phi]} | 0 \rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_0[\phi] - S_I[\phi]} \quad (\text{eq. 40.1})$$

e se:  $\hat{O} = \hat{\phi}(x_1) \dots \hat{\phi}(x_n) e^{-S_I[\phi]}$

$$\langle 0 | \hat{\phi}(x_1) \dots \hat{\phi}(x_n) e^{-S_I[\phi]} | 0 \rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_0[\phi] - S_I[\phi]} \phi(x_1) \dots \phi(x_n) = G_n(x_1, \dots, x_n)$$

(lembre que quando rodarmos de volta para o espaço de Minkowski vamos obter o ordenamento temporal) (eq. 40.2)

finalmente, se:  $\hat{O} = e^{-S_I[\phi]} e^{\int d^4x \mathcal{J}(x) \phi(x)}$

$$\langle 0 | e^{-S_I[\phi]} e^{\int d^4x \mathcal{J}(x) \phi(x)} | 0 \rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_0[\phi] - S_I[\phi] + \mathcal{J} \cdot \phi} = Z[\mathcal{J}]$$

Fórmula de Dyson (eq. 40.3)

### Solução da Teoria Livre

Para  $S_I[\phi] = 0$

$$\begin{aligned} Z_0[\mathcal{J}] &= \int \mathcal{D}\phi e^{-S_0[\phi] + \mathcal{J} \cdot \phi} = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4x [\partial_\mu \phi \partial_\mu \phi + m^2 \phi^2] + \mathcal{J} \cdot \phi \right\} \\ &= \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4x \phi \underbrace{[-\partial_\mu \partial_\mu + m^2]}_{\Delta^{-1}} \phi + \mathcal{J} \cdot \phi \right\} \end{aligned}$$

Note que:

$$-\frac{1}{i} (\phi - \mathcal{J} \cdot \Delta) \cdot \Delta^{-1} \cdot (\phi - \Delta \cdot \mathcal{J}) = -\frac{1}{2} \phi \Delta^{-1} \phi + \underbrace{\frac{1}{2} \phi \cdot \mathcal{J} + \frac{1}{2} \mathcal{J} \cdot \phi}_{\mathcal{J} \cdot \phi} - \underbrace{\frac{1}{2} \mathcal{J} \cdot \Delta \cdot \mathcal{J}}_{\text{sobrando}}$$

Logo:

$$Z_0[\mathcal{J}] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -\frac{1}{i} (\phi - \mathcal{J} \cdot \Delta) \cdot \Delta^{-1} \cdot (\phi - \Delta \cdot \mathcal{J}) + \frac{1}{2} \mathcal{J} \cdot \Delta \cdot \mathcal{J} \right\} =$$

$$\underbrace{\int \mathcal{D}\phi'}_{\phi' \quad (\mathcal{D}\phi' = \mathcal{D}\phi)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \phi' \Delta^{-1} \phi' + \mathcal{J} \cdot \phi' + \frac{1}{2} \mathcal{J} \cdot \Delta \cdot \mathcal{J} \right\}$$

$$= e^{\frac{1}{2} \mathcal{J} \Delta \mathcal{J}} \int \mathcal{D}\phi' e^{-\frac{1}{2} \phi' \Delta^{-1} \phi'} \quad (\text{eq. 39.1})$$

$$\underbrace{\int \mathcal{D}\phi' e^{-\frac{1}{2} \phi' \Delta^{-1} \phi'}}_{\langle 0|0 \rangle_0}$$

$$Z_0[\mathcal{J}] = e^{\frac{1}{2} \mathcal{J} \Delta \mathcal{J}} \langle 0|0 \rangle_0 \quad (\text{eq. 41.1}) \quad Z_0[0] = \langle 0|0 \rangle_0 = 1 \quad (\text{normalização})$$

O propagador é tal que:  $\Delta^{-1} = -\partial_\mu \partial_\mu + m^2$

e portanto:

$$\Delta(x, y) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{e^{i p(x-y)}}{p^2 + m^2} \quad (\text{eq. 41.2})$$

que não tem polos. A rotação de volta para Minkowski, assim como no caso do oscilador forçado (pg 37) leva a polos ( $|p| = \pm i m$ ), então a rotação feita em  $p^0$  deve ser de  $(\pi/2 - \epsilon)$  ao invés de  $(\pi/2)$ :

$$p_E^0 = e^{-i(\pi/2 - \epsilon)} p^0 = -i(p^0 + i\epsilon)$$

$$p_E^2 + m^2 = (p_E^0)^2 + (\vec{p}^2) + m^2 = -(p^0 + i\epsilon)^2 + (\vec{p}^2) + m^2 = -\underbrace{(p^0)^2 + (\vec{p}^2)}_{p_\mu p^\mu} + m^2 - i\epsilon = p^2 + m^2 - i\epsilon$$

e obtemos (agora tudo no espaço de Minkowski):

$$\Delta(t_E = it, \vec{x}; y=0) = \Delta_F(t, \vec{x}) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{-i e^{i p x}}{p^2 + m^2 - i\epsilon} \quad (\text{eq. 41.3})$$

**Teorema de Wick:**

Vejamos que forma toma o teorema de Wick neste formalismo. Considere a função:

$$F[\phi] = \phi^2(x_1) \phi(x_2) \phi^4(x_3)$$

$$\langle 0|F[\phi]|0\rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_0[\phi]} \phi^2(x_1) \phi(x_2) \phi^4(x_3)$$

Note que:  $\frac{\delta}{\delta J(x_1)} e^{J \cdot \phi} = e^{J \cdot \phi} \left( \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \int d^4x J(x) \phi(x) \right) = e^{J \cdot \phi} \phi(x_1)$

$J \cdot \phi = \int d^4x J(x) \phi(x)$        $\frac{\delta J(x)}{\delta J(x_1)} = \delta^4(x-x_1)$

Logo:

$$\langle 0|F[\phi]|0\rangle = \left( \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \right)^2 \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \left( \frac{\delta}{\delta J(x_3)} \right)^4 \int \mathcal{D}\phi e^{-S_0[\phi] + J \cdot \phi} \Big|_{J=0}$$

$Z_0 \rightarrow$  teoria livre

Podemos, de fato, fazer o mesmo para uma função arbitrária (caso ela não seja um polinômio, podemos considerar que está definida por sua série de potências):

$$\langle 0|F[\phi]|0\rangle_J = F\left[\left\{\frac{\delta}{\delta J}\right\}\right] Z_0[J]$$

(eq. 42.1)

Voltando então na fórmula de Dyson (eq. 40.3), temos:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_0[\phi] - S_I[\phi] + J \cdot \phi} = \langle 0| e^{-\int d^4x V(\phi(x))} |0\rangle_J$$

$F[\phi]$

$$Z[J] = e^{-\int d^4x V\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)} Z_0[J] = e^{-\int d^4x V\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)} e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J}$$

(eq. 42.2)

interação      parte livre ( $\Delta$  é o propagador da teoria livre)

$$\langle \Omega|T\{\phi_H(x_1) \dots \phi_H(x_n)\}|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0|T\{U_I(x_1) \dots U_I(x_n) \text{Exp}\left[-i \int_{-T}^T dt H_{\text{int}}(t)\right]\}|0\rangle}{\langle 0|T\{\text{Exp}\left[-i \int_{-T}^T dt H_{\text{int}}(t)\right]\}|0\rangle}$$

Não é muito óbvio, mas este é o teorema de Wick no formalismo de integrais de trajetória. De novo temos uma solução exata da teoria interagente (neste caso a função de partição), mas esta só é útil se pudermos expandir a exponencial da interação e truncar a expansão, ou seja, em teoria de perturbação.

## Regras de Feynman

Para perceber que a equação 42.2 é de fato equivalente ao teorema de Wick, vamos calcular algumas funções de green usando-a. Definindo a notação:

$$G_n^{(p)}(x_1, \dots, x_n)$$

em ordem  $p$  da expansão perturbativa

função de  $n$  pontos

Podemos obter estas funções a partir do funcional gerador, também calculado até alguma ordem em teoria de perturbação:

$$\begin{aligned} Z[J] &= e^{-\int d^4x V\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)} e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} = \\ &= \left[ 1 - \int d^4x V\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right) + \frac{1}{2!} \int d^4x V\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right) \int d^4y V\left(\frac{\delta}{\delta J(y)}\right) + \dots \right] e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} = \\ &\equiv Z_0[J] + Z_1[J] + Z_2[J] + \dots \end{aligned} \quad (\text{eq. 43.1})$$

$$G_n^{(p)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta J(x_n)} Z_p[J] \Big|_{J=0} \quad (\text{eq. 43.2})$$

O objeto mais simples que podemos calcular é:

$$\begin{aligned} G_1^{(0)}(x_1)_J &= \frac{\delta}{\delta J(x_1)} e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} = e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \left\{ \frac{1}{2} \int d^4x d^4x' J(x) \Delta(x, x') J(x') \right\} = \\ &= e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \frac{1}{2} \int d^4x d^4x' \left\{ \underbrace{\delta(x-x_1) \Delta(x, x')}_{\vdots} J(x') + J(x) \underbrace{\Delta(x, x')}_{\vdots} \delta(x'-x_1) \right\} = \\ &= e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \int d^4x \underbrace{\Delta(x_1, x)}_{(\Delta \cdot J)(x_1)} J(x) = \\ &= (\Delta \cdot J)(x_1) e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \end{aligned}$$

que, para  $J=0$ , é nula:  $G_1^{(0)}(x_1) = 0$  (eq. 43.3)

É fácil ver que todas as funções com um número ímpar de pontos são nulas, pois temos dois  $J$ 's em  $Z$  e fazendo um número ímpar de derivadas vai sobrar sempre um  $J$  multiplicando tudo, o que anula a função quando fazemos  $J = 0$ .

$$k = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow G_{2k+1}^{(0)}(x_1, \dots, x_{2k+1}) = 0 \quad (\text{eq. 44.1})$$

A função de 2 pontos fica:

$$G_2^{(0)}(x_1, x_2)_J = \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \underbrace{\frac{\delta}{\delta J(x_2)} e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J}}_{G_1^{(0)}(x_2)_J} = \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \left[ (\Delta \cdot J)(x_2) e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \right] =$$

$$\frac{\delta}{\delta J(x_1)} (\Delta \cdot J)(x_2) = \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \int d^4x \Delta(x, x_2) J(x) = \int d^4x \Delta(x, x_2) \delta(x - x_1) = \Delta(x_1, x_2)$$

$$= \Delta(x_1, x_2) e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} + (\Delta \cdot J)(x_2) (\Delta \cdot J)(x_1) e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J}$$

$J = 0 \Rightarrow G_2^{(0)}(x_1, x_2) = \Delta(x_1, x_2) \iff$  

A função de 3 pontos é zero, como já adiantamos, pois:

$$G_3^{(0)}(x_1, x_2, x_3)_J = \frac{\delta}{\delta J(x_3)} G_2^{(0)}(x_1, x_2)_J = \left[ \Delta(x_1, x_2) (\Delta \cdot J)(x_3) + \Delta(x_2, x_3) (\Delta \cdot J)(x_1) + \right.$$

$$\left. + (\Delta \cdot J)(x_2) \Delta(x_1, x_3) + (\Delta \cdot J)(x_2) (\Delta \cdot J)(x_1) (\Delta \cdot J)(x_3) \right] e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J}$$

( $J = 0$ )

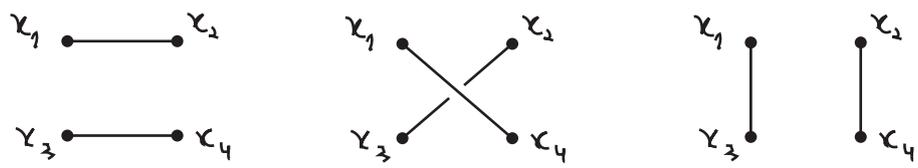
A próxima função não trivial é (exercício):

$$G_4^{(0)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta J(x_4)} e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \Bigg|_{J=0} =$$

$$= \Delta(x_1, x_2) \Delta(x_3, x_4) + \Delta(x_1, x_3) \Delta(x_2, x_4) + \Delta(x_1, x_4) \Delta(x_2, x_3)$$

(eq. 44.2)

Que, em diagramas, é exatamente o mesmo que o que se obtém com o teorema de Wick:



de onde fica claro que a lógica por trás do Teorema de Wick (conectar os pontos externos de todas as formas possíveis) aqui é implementada pela regra do produto da derivada.

Passemos para o caso com interação, considerando agora a teoria  $\lambda\phi^3$ :

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{3!} \phi^3$$

(note que só queremos ver como saem as regras de Feynman, esta teoria é problemática pois o potencial não tem mínimo global, e energias infinitamente negativas são permitidas)

Em ordem  $\lambda$ , temos:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_1[J] &= - \int d^d x V\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right) e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} = - \int d^d x \frac{\lambda}{3!} \left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^3 e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} = \\ &= - \frac{\lambda}{3!} \int d^d x \left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^2 \left[ (\Delta \cdot J)(x) e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \right] = - \frac{\lambda}{3!} \int d^d x \left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right) \left[ \Delta(x, x) + (\Delta \cdot J)^2(x) \right] e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} = \\ &= - \frac{\lambda}{3!} \int d^d x \left[ \Delta(x, x) (\Delta \cdot J)(x) + \Delta(x, x) (\Delta \cdot J)(x) + (\Delta \cdot J)(x) \Delta(x, x) + (\Delta \cdot J)^3(x) \right] e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} = \\ &= - \frac{\lambda}{3!} \int d^d x \left[ 3 \Delta(x, x) (\Delta \cdot J)(x) + (\Delta \cdot J)^3(x) \right] e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \end{aligned} \quad (\text{eq. 45.1})$$

Note que este funcional gerador agora tem sempre potências ímpares de  $J$ , de forma que as funções de  $n$  pontos serão nulas para  $n$  par:

$$G_{2k}^{(1)}(x_1, \dots, x_{2k}) = 0 \quad (\text{eq. 45.2})$$

A função de 1 ponto é dada por:

$$\begin{aligned} G_1^{(1)}(x_1) &= \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \mathbb{Z}_1[J] \Big|_{J=0} = - \frac{\lambda}{3!} \int d^d x \left[ 3 \Delta(x, x) \Delta(x, x_1) + 3 \Delta(x, x) (\Delta \cdot J)(x) (\Delta \cdot J)(x_1) + \right. \\ &\quad \left. + 3 \Delta(x, x_1) (\Delta \cdot J)(x) + (\Delta \cdot J)^3(x) (\Delta \cdot J)(x_1) \right] e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \Big|_{J=0} = \\ &= - \frac{\lambda}{2} \int d^d x \Delta(x, x) \Delta(x, x_1) \end{aligned}$$

cujo diagrama é:

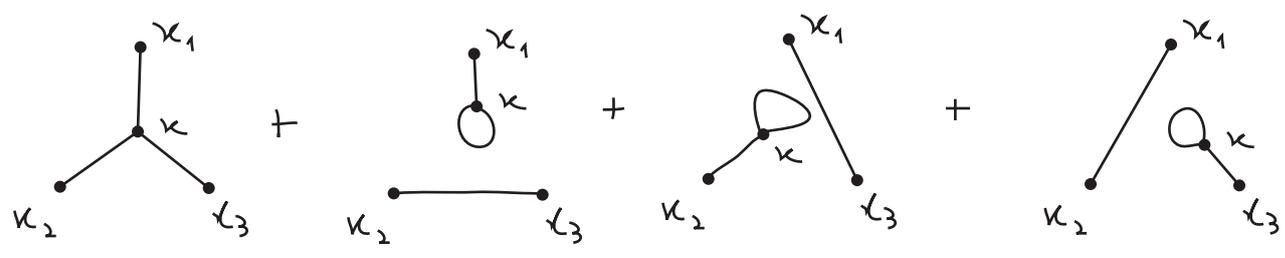


A função de 2 pontos dá zero (cheque!) e a função de 3 pontos é:

$$G_3^{(1)}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \frac{\delta}{\delta J(x_3)} Z_1[J] \Big|_{J=0} =$$

$$= -\lambda \int d^d x \left\{ \Delta(x, x_1) \Delta(x, x_2) \Delta(x, x_3) + \frac{1}{2} \Delta(x, x) [\Delta(x, x_1) \Delta(x, x_3) + \Delta(x, x_2) \Delta(x, x_3) + \Delta(x, x_3) \Delta(x, x_2)] \right\}$$

que em diagramas fica:



Podemos obter as bolhas no vácuo calculando diretamente a função de 0 pontos, dada pelo próprio funcional gerador (pois fazemos zero derivadas), que em segunda ordem de perturbação é:

$$Z_2[J] = + \frac{1}{2!} \int d^d x \frac{\lambda}{3!} \left( \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^3 \int d^d y \frac{\lambda}{3!} \left( \frac{\delta}{\delta J(y)} \right)^3 e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J}$$

ao invés de fazer a regra da cadeia, posso pensar esta exponencial em termos de sua expansão. Como temos 6 derivadas em J e no fim faremos J=0, somente o termo com 6 J's vai sobreviver

$$Z_2[J=0] = \frac{1}{2!} \int d^d x \frac{\lambda}{3!} \left( \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^3 \int d^d y \frac{\lambda}{3!} \left( \frac{\delta}{\delta J(y)} \right)^3 \left\{ \frac{1}{3!} \left( \frac{1}{2} \right)^3 \int d^3 z_1 d^3 z_2 d^3 z_3 d^3 z'_1 d^3 z'_2 d^3 z'_3 \times \right.$$

$$\left. \times J(z_1) \Delta(z_1, z'_1) J(z_2) J(z_3) \Delta(z_2, z'_2) J(z_2) J(z_3) \Delta(z_3, z'_3) J(z_3) \right\}_{J=0}$$

exercício

$$Z_2[J=0] = \frac{\lambda^2}{2^3} \int d^d x d^d y \Delta(x, x) \Delta(x, y) \Delta(y, y) + \frac{\lambda^2}{2 \cdot 3!} \int d^d x d^d y \Delta^3(x, y)$$

em termos de diagramas (note que os fatores de simetria também já saíram certos):



### Regras de Feynman no espaço das posições

Primeiramente vamos re-escrever o teorema de Wick em um formato mais útil para obter as regras de Feynman:

$$Z[J] = e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \phi_a} \cdot \Delta \cdot \frac{\delta}{\delta \phi_a}} \left\{ e^{-\int d^4x V(\phi_a) + J \cdot \phi_a} \right\} \Big|_{\phi_a=0} = \text{EXP} \left[ \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \Delta(x-y) \frac{\delta}{\delta \phi_a(x)} \frac{\delta}{\delta \phi_a(y)} \right] \left\{ e^{-\int d^4x V(\phi_a) + J \cdot \phi_a} \right\} \Big|_{\phi_a=0} \quad (\text{eq. 47.1})$$

...  
 eq. 42.2  $\rightarrow Z[J] = e^{-\int d^4x V(\frac{\delta}{\delta J(x)})} \left\{ e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \right\}$

não ficaremos carregando esta notação, mas perceba que este campo que fazemos ir a zero é o campo clássico, e:  
 $J \rightarrow 0 \Leftrightarrow \phi_{cl} = 0$   
 (não provamos isso para o campo, mas é análogo às pgs. 21 e 22)

### \\ Demonstração //

Essencialmente queremos provar que, dadas duas funções de múltiplas variáveis (mesmo número para ambas):

$$F(x) = F(x_1, \dots, x_n) \quad G(y) = G(y_1, \dots, y_n)$$

$$\Rightarrow F\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) G(x) = G\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) \left[ F(y) e^{x \cdot y} \right]_{y=0} \quad (\text{Lemma de Coleman}) \quad (\text{eq. 47.2})$$

PROVA: podemos considerar a série de Fourier de F e G e aí basta provar o Lemma acima para

$$F(x) = e^{a \cdot x} \quad G(y) = e^{b \cdot y} \quad \left( a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots \right)^m e^{b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + \dots} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} e^{b \cdot x} &= b_i e^{b \cdot x} \\ \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^n e^{b \cdot x} &= (b_i)^n e^{b \cdot x} \end{aligned} \right.$$

$$F\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) G(x) = e^{a \cdot \frac{\partial}{\partial x}} e^{b \cdot x} = \sum_m \frac{1}{m!} \left( a \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right)^m e^{b \cdot x} = \sum_m \frac{1}{m!} (a \cdot b)^m e^{b \cdot x} = e^{b \cdot (a+x)} = e^{a \cdot b} \quad \checkmark \text{OK!}$$

$$G\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) \left[ F(y) e^{x \cdot y} \right]_{y=0} = e^{b \cdot \frac{\partial}{\partial y}} \left[ e^{a \cdot y} e^{x \cdot y} \right]_{y=0} = e^{b \cdot (a+x)} \left[ e^{a \cdot y} e^{x \cdot y} \right]_{y=0} = e^{b \cdot (a+x)}$$

$$\begin{array}{l} \text{vetor} \\ \mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow \mathcal{J}(x) \\ \text{vetor} \\ \mathcal{Y} = \{y_1, \dots, y_n\} \rightarrow \phi(x) \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{vetor} \\ \mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\} \\ \text{vetor} \\ \mathcal{Y} = \{y_1, \dots, y_n\} \end{array}} \right\} \text{estamos generalizando de um conjunto discreto de variáveis para um contínuo}$$

$$\hookrightarrow \boxed{F\left[\frac{\delta}{\delta \mathcal{J}}\right] G[\mathcal{J}] = G\left[\frac{\delta}{\delta \phi}\right] \left[ F[\phi] e^{\mathcal{J} \cdot \phi} \right]_{\phi=0}} \quad (\text{eq. 48.1})$$

Logo, partindo do teorema de Wick na forma anterior:

$$Z[\mathcal{J}] = \underbrace{e^{-\int d^4x V\left(\frac{\delta}{\delta \mathcal{J}(x)}\right)}}_{F\left[\frac{\delta}{\delta \mathcal{J}}\right]} \underbrace{\left\{ e^{\frac{1}{2} \mathcal{J} \cdot \Delta \cdot \mathcal{J}} \right\}}_{G[\mathcal{J}]} = \underbrace{e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \phi} \cdot \Delta \cdot \frac{\delta}{\delta \phi}}}_{G\left[\frac{\delta}{\delta \phi}\right]} \underbrace{\left\{ e^{-\int d^4x V(\phi)} e^{\mathcal{J} \cdot \phi} \right\}}_{\left[ F[\phi] e^{\mathcal{J} \cdot \phi} \right]_{\phi=0}} \Big|_{\phi=0}$$

que é a eq. 47.1

Podemos então obter as regras de Feynman para um potencial mais geral:

$$V(\phi) = \lambda \phi^p$$

$$\begin{aligned} G_n(x_1, \dots, x_n) &= \frac{\delta^n Z[\mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}(x_1) \dots \delta \mathcal{J}(x_n)} \Big|_{\mathcal{J}=0} = \\ &= \frac{\delta^n}{\delta \mathcal{J}(x_1) \dots \delta \mathcal{J}(x_n)} \left\{ e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \phi} \cdot \Delta \cdot \frac{\delta}{\delta \phi}} \left[ e^{-\int d^4x V(\phi) + \mathcal{J} \cdot \phi} \right]_{\phi=0} \right\} \Big|_{\mathcal{J}=0} = \\ &= e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \phi} \cdot \Delta \cdot \frac{\delta}{\delta \phi}} \left\{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{-\int d^4x V(\phi) + \mathcal{J} \cdot \phi} \right\} \Big|_{\phi=0, \mathcal{J}=0} \end{aligned}$$

este termo já se tornou obsoleto, pois depois das derivadas em  $\phi$ , qualquer termo que sobrar com  $J$  multiplicado vai ser nulo (quando  $J=0$ )

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \phi} \cdot \Delta \cdot \frac{\delta}{\delta \phi}} \left\{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{-\int d^d x V(\phi)} \right\}_{\phi=0} \quad (\text{eq. 49.1})$$

Em ordem  $N$  de perturbação:

$$G_n^{(N)}(x_1, \dots, x_n) = e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \phi} \cdot \Delta \cdot \frac{\delta}{\delta \phi}} \left\{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \frac{(-\lambda)^N}{N!} \int d^d y_1 \dots d^d y_N \phi^P(y_1) \dots \phi^P(y_N) \right\}_{\phi=0}$$

estas derivadas vão agir sobre um produto de  $Q$  campos  $\phi$ , onde:

$$Q = n + pN$$

Se aplicarmos mais do que  $Q$  derivadas a função se anula e se aplicamos menos do que  $Q$  derivadas também (pois nesse caso sobram  $\phi$ 's que serão levados a zero). Assim, da expansão da exponencial contendo  $Q$  derivadas temos (e note  $Q$  deve ser obrigatoriamente par pois temos duas derivadas na exponencial):

$$(Q = 2q = n + pN)$$

$$G_n^{(N)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{q! 2^q} \int d^d z_1 d^d w_1 \dots d^d z_q d^d w_q \frac{\delta}{\delta \phi(z_1)} \Delta(z_1 - w_1) \frac{\delta}{\delta \phi(w_1)} \dots \frac{\delta}{\delta \phi(z_q)} \Delta(z_q - w_q) \frac{\delta}{\delta \phi(w_q)} \times$$

$$\times \left\{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \frac{(-\lambda)^N}{N!} \int d^d y_1 \dots d^d y_N \phi^P(y_1) \dots \phi^P(y_N) \right\}_{\phi=0}$$

(eq. 49.2)

Temos que agir com estas derivadas sobre todos os campos. Note que, quando aplicamos o par

$$\int d^d z_i d^d w_i \frac{\delta}{\delta \phi(z_i)} \Delta(z_i - w_i) \frac{\delta}{\delta \phi(w_i)}$$

sobre um par qualquer:  $\phi(x) \phi(y)$

$$\text{obtemos: } \int d^d z_i d^d w_i \left[ \delta^d(x - z_i) \delta^d(y - w_i) \Delta(z_i - w_i) + \delta^d(y - z_i) \delta^d(x - w_i) \Delta(z_i - w_i) \right] =$$

$$= 2 \Delta(x - y)$$

como temos  $q$  fatores de 2 deste tipo, o  $2^q$  em 49.2 é cancelado

O  $q!$  é cancelado pelo fato de termos  $q!$  formas de agir as  $2q$  derivadas nos  $2q$  campos (e pelo fato das coordenadas nas derivadas serem variáveis mudas de integração). Notem que novamente o que está acontecendo é que estamos conectando pontos externos e vértices de todas as formas possíveis.

Mesmo depois de levar em conta as repetições que cancelam  $q! 2^q$  ainda sobram muitos termos iguais: o fato de ainda termos  $N$  variáveis de integração mudas cancela o  $N!$  advindo da expansão da exponencial com a interação e o fato de cada termo de interação conter  $p$  campos calculados no mesmo ponto introduz um  $(p!)^N$  que cancelamos redefinindo:

$$\lambda = \frac{\lambda_p}{p!}$$

Sabemos (do formalismo canônico), que o cancelamento deste  $N!(p!)^N$  não é exato, dependendo de detalhes das contrações escolhidas. Assim como antes definimos um fator de simetria:

$$S = \frac{N! (p!)^N}{(\# \text{ de diagramas equivalentes})}$$

Este fator pode ser maior que 1 se tivermos menos diagramas equivalentes do que inocentemente se esperaria. Para ver como isto aparece aqui, considere o caso  $n = 0, p = 2, N = 2 (Q = 4, q = 2)$ :

$$A = \frac{1}{2! 2^2} \int d^4 z_i d^4 w_i d^4 z_j d^4 w_j d^4 x d^4 y \frac{\delta}{\delta \phi(z_i)} \Delta(z_i - w_i) \frac{\delta}{\delta \phi(w_i)} \frac{\delta}{\delta \phi(z_j)} \Delta(z_j - w_j) \frac{\delta}{\delta \phi(w_j)} \phi(x) \phi(x) \phi(y) \phi(y)$$

(não confundir o cancelamento destes com o de  $N!$  e  $p!^N$ )

de onde podemos extrair todos os termos que contribuem para:



Inocentemente teríamos  $2!$  advindo das integrais em  $x$  e  $y$  e  $(2!)^2$  advindo do fato de termos dois campos em  $x$  e dois em  $y$ , para um total de 8 termos iguais. Mas veja:

$$A = \frac{1}{8} \int d^4 z_i d^4 w_i d^4 z_j d^4 w_j d^4 x d^4 y \Delta(z_i - w_i) \Delta(z_j - w_j) \frac{\delta}{\delta \phi(z_i)} \frac{\delta}{\delta \phi(w_i)} \frac{\delta}{\delta \phi(z_j)} \times$$

$$\left\{ 2 \delta(x - w_j) \phi(x) \phi(y) \phi(y) + 2 \delta(y - w_j) \phi(x) \phi(x) \phi(y) \right\} =$$

ignoro os termos em que  $\frac{\delta}{\delta \phi(z_j)}$  age em no mesmo campo em que agiu  $\frac{\delta}{\delta \phi(w_j)}$  pois estes contribuem para  $\left( \begin{matrix} \circ & \circ \\ x & y \end{matrix} \right)$

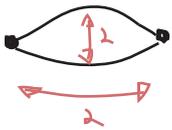
$$= \frac{1}{2} \int \dots \Delta \Delta \cdot \frac{\delta}{\delta \phi(z_i)} \frac{\delta}{\delta \phi(w_i)} \left\{ 2 \delta(x - w_j) \delta(z_j - y) \phi(x) \phi(y) + 2 \delta(y - w_j) \delta(z_j - x) \phi(x) \phi(y) \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \dots \Delta \Delta \cdot \frac{\delta}{\delta \phi(z_i)} \times$$

$$x \left\{ \delta(x - w_j) \delta(z_j - y) \left[ \delta(x - w_i) \phi(y) + \delta(y - w_i) \phi(x) \right] + \delta(y - w_j) \delta(z_j - x) \left[ \delta(w_i - x) \phi(y) + \delta(w_i - y) \phi(x) \right] \right\} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int \dots \int \Delta \Delta \left\{ \delta(x-w_j) \delta(y_j-y) \delta(x-w_i) \delta(y-z_i) + \delta(x-w_j) \delta(y_j-y) \delta(y-w_i) \delta(x-z_i) + \right. \\
 &\quad \left. + \delta(y-w_j) \delta(y_j-x) \delta(w_i-x) \delta(y-z_i) + \delta(y-w_j) \delta(y_j-x) \delta(w_i-y) \delta(z_i-x) \right\} = \\
 &= \frac{1}{2} \int d^d x d^d y \ 4 \Delta^2(x-y) = 2 \int d^d x d^d y \ \Delta^2(x-y)
 \end{aligned}$$

O que é 4 vezes menos termos iguais do que esperávamos. O fator de simetria aqui é 4. De fato:



Vemos que estamos obtendo as mesmas regras do formalismo canônico (só que no espaço Euclidiano):

- (1) para cada propagador:  $x_1 \text{ --- } x_2 = \Delta(x_1 - x_2)$
- (2) para cada vértice:  $\begin{matrix} \text{p linhas} \\ \nearrow \\ \bullet \\ \searrow \\ \delta \end{matrix} = (-i\lambda_p) \int d^d y$
- (3) para cada ponto externo:  $x_1 \text{ --- } = 1$
- (4) divida tudo pelo fator de simetria

(eq. 51.1)

### Regras de Feynman no espaço dos momentos

Conforme visto na pgs 39-40:

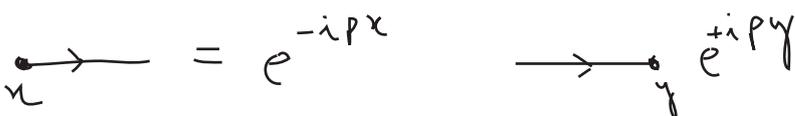
$$\tilde{G}(p_1, \dots, p_n) = (2\pi)^d \delta^d(p_1 + \dots + p_n) G(p_1, \dots, p_n)$$

↙ satisfazem conserv. de momento

O propagador Euclidiano é (eq. 41.2):

$$\Delta(y-x) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{e^{ip(y-x)}}{p^2 + m^2} \quad \therefore \quad \Delta(p) = \frac{1}{p^2 + m^2} \quad (\text{eq. 51.2})$$

E adotamos novamente a convenção para direção de momento:



## Regras de Feynman para uma teoria Bosônica em geral

Suponha agora uma teoria mais geral composta de um número arbitrário de campos bosônicos (veremos adiante que a quantização de campos fermiônicos é mais complicada), que agruparemos usando um índice  $r$ :

$$\phi_r \quad \text{EX: } \phi = \{ \phi_1, \phi_2, \phi_3 = A_0, \phi_4 = A_1, \phi_5 = A_2, \phi_6 = A_3 \} = \{ \phi, \phi_2, A_\mu \}$$

Com a ação livre dada por:

$$S_0 = \frac{1}{2} \int d^d x \sum_{r,s} \phi_r(x) \Delta_{r,s}^{-1} \phi_s(x)$$

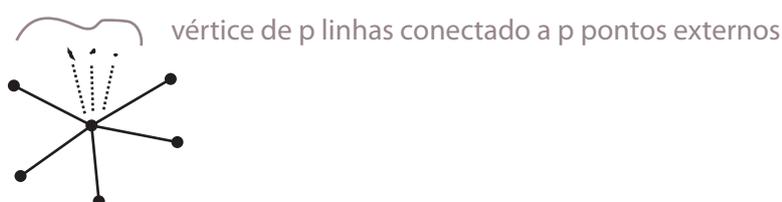
$$\text{EX: } \Delta^{-1} = \begin{pmatrix} -\partial_\mu \partial^\mu + m_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\partial_\mu \partial^\mu + m_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & (g_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu)_{4 \times 4} \end{pmatrix}$$

Este operador deve ser invertido para podermos encontrar os propagadores. Quando ele não é invertível, em geral existem problemas na definição dos campos. Vamos assumir que conseguimos resolver estes problema e encontrar uma base apropriada, aonde ele pode ser invertido (mais tarde veremos um exemplo específico, o campo do fóton). A interação também pode ser escrita em um forma genérica:

$$S_{r_1, \dots, r_p} = \int d^d z \underbrace{A_{r_1, \dots, r_p}}_{\substack{\text{pode conter constantes (acoplamentos) ou operadores} \\ \text{diferenciais agindo em um ou mais campos (o que torna isso} \\ \text{bem mais geral que } \phi^n)}} \underbrace{\phi_{r_1}(z) \cdots \phi_{r_p}(z)}_{\text{não há soma subentendida!}}$$

↪ Interação envolvendo  $p$  campos ( $r_i$  e  $r_j$  são genéricos, não necessariamente iguais nem diferentes)

Independentemente da forma de  $A_{\{r_i\}}$ , esta interação colocará  $p$  campos agindo no mesmo ponto, o que leva a um vértice com  $p$  linhas saindo. A forma mais simples de ver a regra para o vértice é considerar a função com  $p$  pontos externos, especificamente o diagrama abaixo:



Podemos então seguir o raciocínio usado para passar de 49.1 para 49.2. A generalização de 49.1, agora que temos vários campos, é:

$$G_n(\{x_1, \dots, x_n\}) = e^{\frac{1}{2} \sum_{\pi, s} \frac{\delta}{\delta \phi_\pi} \Delta_{\pi s} \frac{\delta}{\delta \phi_s}} \left\{ \phi_{\pi_1}(x_1) \dots \phi_{\pi_n}(x_n) e^{-\int d^d z A_{\pi_1 \dots \pi_p} \phi_{\pi_1} \dots \phi_{\pi_p}} \right\}_{\phi=0}$$

→ a função depende das coordenadas dos pontos externos mas também de qual campo age ali

Especializando para o caso com apenas um vértice (N = 1) e número (e tipo) de pontos externos iguais aos da interação temos (n = p):

$$G_p^{(1)}(\{x_1, \dots, x_p\}) = e^{\frac{1}{2} \sum_{\pi, s} \frac{\delta}{\delta \phi_\pi} \Delta_{\pi s} \frac{\delta}{\delta \phi_s}} \left\{ \phi_{\pi_1}(x_1) \dots \phi_{\pi_p}(x_p) (-) \int d^d z A_{\pi_1 \dots \pi_p} \phi_{\pi_1} \dots \phi_{\pi_p} \right\}_{\phi=0}$$

→ o produto escalar tem integrais:  $\int d^d z_1 d^d z_2 \frac{\delta}{\delta \phi(z_1)} \frac{\delta}{\delta \phi(z_2)}$

Agora basta lembrar que a exponencial com as derivadas deve ser expandida e o único termo que sobrevive é aquele que tem o número (e tipo) de derivadas que coincide com o que está dentro das chaves. O efeito destas chaves vai ser conectar pontos externos e internos de todas as formas possíveis, mas só estamos interessados no diagrama acima, onde cada ponto externo é conectado ao vértice. Neste caso cada par de derivadas vai produzir um propagador, assim como vimos na página 49, mas pode haver uma outra contribuição, dependendo de A. O resultado será da forma:

$$G_p^{(1)}(\{x_1, \dots, x_p\}) = \int d^d y_1 \dots d^d y_p \Delta_{\pi s}(x_1 - y_1) \dots \Delta_{\pi s}(x_p - y_p) \times$$

$$\times (-) \frac{\delta}{\delta \phi_{\pi_1}(y_1)} \dots \frac{\delta}{\delta \phi_{\pi_p}(y_p)} A_{\pi_1 \dots \pi_p}$$

estou ignorando estes índices que seriam fixados por deltas de Kronecker, assim como as deltas de Dirac fixam as coordenadas

→ Isso é o que chamamos de "regra do vértice" e no caso de teorias  $\lambda \phi^p$ , obtemos (veja pag 49)

$$\int d^d z \lambda \delta(y_1 - z) \dots \delta(y_p - z)$$

Mas para uma teoria mais geral pode ser mais complicado. Passando para o espaço dos momentos temos:

p linhas

$$= - \int d^d x_1 \dots d^d x_p e^{i(k_1 x_1 + \dots + k_p x_p)} \frac{\delta}{\delta \phi_{\pi_1}(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta \phi_{\pi_p}(x_p)} S_{\pi_1 \dots \pi_p}$$

(eq. 54.1)

Um exemplo trivial seria:

$$S_{\mathbb{I}} = \frac{\lambda_4}{4!} \int d^d x \phi^4(x)$$

$$\times = - \int d^d x_1 \dots d^d x_4 e^{i(k_1 x_1 + \dots + k_4 x_4)} \frac{\delta}{\delta \phi(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta \phi(x_4)} \left[ \frac{\lambda_4}{4!} \int d^d x \phi^4(x) \right] =$$

$$= \frac{\lambda_4}{3!} \int d^d x \frac{\delta}{\delta \phi(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta \phi(x_4)} \phi^3(x) \delta^d(x-x_1) = \frac{\lambda_4}{2!} \int d^d x \frac{\delta}{\delta \phi(x_1)} \frac{\delta}{\delta \phi(x_2)} \phi^2(x) \delta^d(x-x_1) \delta^d(x-x_2) = \dots$$

$$= - \int d^d x_1 \dots d^d x_4 d^d x e^{i(k_1 x_1 + \dots + k_4 x_4)} \lambda_4 \delta^d(x-x_1) \delta^d(x-x_2) \delta^d(x-x_3) \delta^d(x-x_4) =$$

$$= - \lambda_4 \int d^d x e^{i x(k_1 + \dots + k_4)} = - (2\pi)^d \delta^d(k_1 + \dots + k_4) \lambda_4$$

## Quantização de um campo fermiônico

(Nastase 12 e 13; Peskin 3.1-3.4 [campo clássico], 3.5 [quant. canônica], 9.5 [quant. funcional]; Ryder 6.7; Ramond 5.2-5.3)

Comecemos definindo um spinor. Vimos (pg 2) que é possível construir uma representação do grupo de Lorentz tal que:

$$\Psi'(x') = M_D(\Lambda) \Psi(x)$$

(eq. 54.2)

$$M_D(\Lambda) = e^{-\frac{i}{2} \Theta_{\mu\nu} S^{\mu\nu}}$$

$$S^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

matrizes de Dirac

(eq. 54.3)

As matrizes de Dirac satisfazem a álgebra de Clifford:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2 \eta^{\mu\nu} \hat{1} \quad (\text{eq. 54.4})$$

E as matrizes  $S^{\mu\nu}$  satisfazem a álgebra de Lorentz:

$$[\gamma^{\mu\nu}, \gamma^{\rho\sigma}] = i [\gamma^{\mu\rho} \gamma^{\nu\sigma} - \gamma^{\mu\sigma} \gamma^{\nu\rho} - \gamma^{\nu\sigma} \gamma^{\mu\rho} + \gamma^{\nu\rho} \gamma^{\mu\sigma}] \quad (\text{eq. 55.1})$$

Todas as expressões acima valem para um número arbitrário de dimensões e qualquer métrica (Minkowski ou Euclideana), o que vai mudar é a forma das matrizes de Dirac. Por exemplo, em três dimensões euclidianas conseguimos satisfazer 54.4 com:

$$\gamma^i = \sigma^i \quad \leftarrow \text{Pauli}$$

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} + i \epsilon^{ijk} \sigma^k$$

$$\{\gamma^i, \gamma^j\} = \sigma^i \sigma^j + \sigma^j \sigma^i = 2\delta^{ij} + i \epsilon^{ijk} \sigma^k + i \epsilon^{jik} \sigma^k = 2\delta^{ij}$$

e neste caso: 
$$S^{ij} = \frac{i}{4} [\gamma^i, \gamma^j] = -\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \sigma^k \quad (\text{eq. 55.2})$$

Note que isto é a rotação em 3D de um spin 1/2

a representação que vai nos interessar é dada por:

$$\gamma^0 = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = -i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Representação Quiral ou de Weyl} \quad (\text{eq. 55.3})$$



$$\begin{aligned} (\gamma^0)^+ &= -\gamma^0 \\ (\gamma^i)^+ &= \gamma^i \end{aligned} \quad (\text{eq. 55.4})$$

E podemos definir 4-vetores, para as matrizes 2x2:

$$\begin{aligned} \sigma^\mu &= (1, \sigma^i) \\ \bar{\sigma}^\mu &= (1, -\sigma^i) \end{aligned} \quad (\text{eq. 55.5})$$

De forma a re-escrever 55.3 na forma compacta:

$$\gamma^\mu = -i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{eq. 55.6})$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = - \begin{pmatrix} \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu \end{pmatrix}$$

o "i" garante a assinatura da métrica (veja abaixo) totalmente convencional (e dif. do Peskin)

$$\left. \begin{array}{l} \{\mu=0, \nu=i\} \\ \{\nu=0, \mu=i\} \end{array} \right\} \Rightarrow -\begin{pmatrix} -\sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix} = 0$$

$$\mu=0, \nu=0 \Rightarrow -\begin{pmatrix} 1_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -2 \hat{1}_{4 \times 4}$$

$$\mu=i, \nu=j \Rightarrow -\begin{pmatrix} -\sigma^i \sigma^j & 0 \\ 0 & -\sigma^i \sigma^j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\sigma^j \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^j \sigma^i \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \{\sigma^i, \sigma^j\} & 0 \\ 0 & \{\sigma^i, \sigma^j\} \end{pmatrix} = 2 \delta^{ij} \hat{1}_{4 \times 4}$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2 g^{\mu\nu} \hat{1}_{4 \times 4} \quad g^{\mu\nu} = \text{Diag}\{-1, 1, 1, 1\} \quad (\text{Minkowski 4D})$$

Também nos interessa definir

$$\gamma^5 = -i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \quad (\text{eq. 56.1})$$

que, nesta representação (usando eq. 55.6), é:  $\gamma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  (que de fato é o objetivo desta rep. Outra rep. popular é a em que  $\gamma^0$  é diagonal ao invés de  $\gamma^5$  - cuidado ao comparar livros)

O gerador  $S^{\mu\nu}$  agora é um objeto mais complicado (que deve conter rotações e boosts), note que a parte puramente espacial contém as rotações 3D e:

$$S^{ij} = \frac{i}{4} [\gamma^i, \gamma^j] = -\frac{i}{4} \begin{pmatrix} -[\sigma^i, \sigma^j] & 0 \\ 0 & -[\sigma^i, \sigma^j] \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} \quad (\text{eq. 56.2})$$

Note que isto é o mesmo que temos em 55.2, repetido 2 vezes (se eu aplicar isto num objeto de quatro componentes, as duas "de cima" rodam como um spin 1/2 e as duas "de baixo" também, independentemente)

O próximo passo consiste em construir invariantes de Lorentz com o campo  $\psi$ . Infelizmente a primeira opção que vem a mente:

$$\psi^\dagger \psi \rightarrow \psi^\dagger \underbrace{M_D^\dagger(\Lambda) M_D(\Lambda)} \psi \neq \psi^\dagger \psi$$

↳ M não é unitária pois alguns elementos de S não são hermiteanos (os boosts)

no entanto não é difícil obter um invariante, definindo:

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 \quad (\text{eq. 56.3})$$

↳ cuidado aqui, a convenção mais comum nos livros é (com larga margem de vantagem):  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$

de forma que:

$$= \psi^\dagger \gamma^0 \psi \rightarrow \psi^\dagger \underbrace{\gamma^0}_{= \gamma^0 M_D^{-1}(\Lambda)} M_D^\dagger(\Lambda) M_D(\psi) = \bar{\psi} \psi \quad (\text{veja Peskin, pg 43})$$

Também podemos provar que:  $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi \rightarrow \Lambda^\nu_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$

E que, portanto, a contração dele com um vetor qualquer é invariante:  $V_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \rightarrow V_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$

Outros invariantes podem ser obtidos como potências destes no entanto, se quisermos uma teoria renormalizável, somente aceitamos os termos com dois  $\psi$  (como veremos mais adiante)

Com isto podemos construir uma ação:

$$S_\psi = - \int d^4x \bar{\psi} (\gamma^\mu \partial_\mu + m) \psi \quad (\text{eq. 57.1})$$

$$\not{D} = \gamma^\mu \partial_\mu$$

Cuja solução clássica é dada pela equação de Dirac:

$$(\not{D} + m) \psi = 0 \quad (\text{eq. 57.2})$$

basta fazer a variação em relação a  $\bar{\psi}$ , também podemos obter a equação conjugada, para  $\bar{\psi}$ , variando  $\psi$ .

### Soluções (Clássicas) da Equação de Dirac

(uma rápida revisão para fixar notação e convenções, veja detalhes nas notas de TQC I de 2015: <http://www.ift.unesp.br/users/matheus/files/courses/2015tqc1/tudo.pdf>, pgs 108 a 117)

As soluções de 57.2 também são soluções da equação de Klein-Gordon. As soluções de frequência positiva e negativa são respectivamente:

$$\psi(x) = u(p) e^{ipx} \quad u^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{-p \cdot \sigma} \xi^s \\ \sqrt{-p \cdot \bar{\sigma}} \xi^s \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \xi^1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \xi^2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{eq. 57.3})$$

$$\psi(x) = v(p) e^{-ipx} \quad v^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{-p \cdot \sigma} \eta^s \\ -\sqrt{-p \cdot \bar{\sigma}} \eta^s \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \eta^1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \eta^2 &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{eq. 57.4})$$

onde  $p$  é dado pela relação de dispersão relativística:  $p^2 + m^2 = 0 \quad p^0 > 0$

com solução geral:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s (a_{\vec{p}}^s u^s(p) e^{ipx} + b_{\vec{p}}^{s\dagger} v^s(p) e^{-ipx}) \\ \bar{\psi}(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s (b_{\vec{p}}^s \bar{v}^s(p) e^{ipx} + a_{\vec{p}}^{s\dagger} \bar{u}^s(p) e^{-ipx}) \end{aligned} \quad (\text{eq. 57.5})$$

## Quantização (canônica) do campo de Dirac

Sabemos (olhando as transformações sobre rotação em 3D) que este campo descreve partículas de spin 1/2, e que portanto devem obedecer estatística de Fermi. Em termos da quantização canônica isso significa que devemos usar anticomutadores ao invés de comutadores para fazer a quantização

$$\{\Psi_\alpha(\vec{x}, t), \Psi_\beta^\dagger(\vec{y}, t)\} = \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \delta_{\alpha\beta}$$

$$\{\Psi_\alpha(\vec{x}, t), \Psi_\beta(\vec{y}, t)\} = \{\Psi_\alpha^\dagger(\vec{x}, t), \Psi_\beta^\dagger(\vec{y}, t)\} = 0$$

o que implica:

$$\{a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}^{\dagger s}\} = \{b_{\vec{p}}, b_{\vec{q}}^{\dagger s}\} = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \delta^{rs} \quad (\text{qualquer outra combinação} = 0)$$

o que leva à usual interpretação de operadores de criação e aniquilação e à construção de um espaço de Fock:

$$a_{\vec{p}}^s |0\rangle = b_{\vec{p}}^s |0\rangle = 0$$

$$|\vec{p}, s\rangle = \sqrt{2E_p} a_{\vec{p}}^{\dagger s} |0\rangle$$

$$|\vec{p}, s\rangle = \sqrt{2E_p} b_{\vec{p}}^{\dagger s} |0\rangle$$

Aqui, no entanto, temos o relação spin-estatística certa para férmions:

$$(a_{\vec{p}}^{\dagger s})^2 = (b_{\vec{p}}^{\dagger s})^2 = 0 \quad |\vec{p}, s; \vec{k}, s\rangle = -|\vec{k}, s; \vec{p}, s\rangle$$

## A integral de trajetória fermiônica

Precisamos então pensar em como transportar esta anti-comutação de forma consistente para o formalismo de integral de trajetória. O problema é que neste formalismo, trocamos os operadores por funções, que comutam entre si.

Podemos pensar, que no caso bôsonico, as funções são obtidas a partir dos operadores no limite:

$$[a, a^\dagger] = \hbar \rightarrow 0$$

Então agora, deveríamos obter

$$\{a, a^\dagger\} = \hbar \rightarrow 0$$

que não são as funções ou números usuais, pois anticomutam (seguem a chamada **Álgebra de Grassmann**). Podemos dividir o conjunto destes **Números de Grassmann** em dois:

Parte **ímpar** da álgebra:  $a, a^\dagger : \{a, a^\dagger\} = \{a, a\} = \{a^\dagger, a^\dagger\} = 0$

Parte **par** da álgebra:  $aa^\dagger : [aa^\dagger, aa^\dagger] = 0$

De forma que o produto de duas funções fermiônicas (ímpar) vai ser bosônica (par)

(é fácil ver que [par . par = par] e [ímpar . par = ímpar])

## Números de Grassmann, definições e propriedades

Precisamos de funções definidas em um espaço de **números complexos que anti-comutem**, o que já havia sido proposto antes por Grassmann. Os números de Grassmann satisfazem a seguinte propriedade:

$$\{\theta, \eta\} = \theta\eta + \eta\theta = 0$$

O que tem diversas consequências:

$$\theta^2 = 0 \quad (\text{eq. 59.1})$$

elemento "par" da álgebra (commutative-number) um par de números de Grassmann se comporta como um c-number

elemento "ímpar" (anticommutative-number)

$$\eta_1 \eta_2 \eta_3 = -\eta_1 \eta_3 \eta_2 = \eta_3 \eta_1 \eta_2$$

$$f(\theta, \eta) = a_0 + a_1 \theta + a_2 \eta + a_3 \theta \eta + a_4 \theta^2 \eta + a_5 \theta \eta^2$$

se a função tiver paridade definida ela é a-number ou c-number  
 assim, se  $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$  então  $a_0 = a_3 = 0$  ou  $a_1 = a_2 = 0$  (ou então os próprios a's devem ser Grassmann)  
 Na maior parte do segue, vamos assumir coeficientes pares, o que significa que estamos tomando a álgebra de Grassmann finita, o que quer dizer que, no exemplo abaixo, não há outros ímpares além de  $\theta, \eta$  e  $\rho$  para aparecer nos coeficientes:

$$f(\theta, \eta, \rho) = a_0 + a_1 \theta + a_2 \eta + a_3 \rho + a_4 \theta \eta + a_5 \theta \rho + a_6 \eta \rho + a_7 \theta \eta \rho$$

e considerando funções mais gerais (sem paridade, ou supernumbers)

Há uma ambiguidade na definição de derivada (temos que decidir se ela age pela direita ou esquerda):

$$\begin{aligned} \frac{d^L}{d\theta} f(\theta, \eta) &= a_1 + a_3 \eta & \frac{d^R}{d\theta} f(\theta, \eta) &= a_1 - a_3 \eta \\ \frac{d^L}{d\eta} f(\theta, \eta) &= a_2 - a_3 \theta & \frac{d^R}{d\eta} f(\theta, \eta) &= a_2 + a_3 \theta \end{aligned}$$

Definiremos:  $\frac{d}{d\eta} = \frac{d^L}{d\eta}$  (quando for necessário usar a derivada pela direita indicaremos isto explicitamente)

$$\eta \frac{d}{d\eta} f = a_2 \eta - a_3 \eta \theta = a_2 \eta + a_3 \theta \eta$$

$$\eta f = a_0 \eta + a_1 \eta \theta \Rightarrow \frac{d}{d\eta} (\eta f) = a_0 + a_1 \theta$$

$$\left( \eta \frac{d}{d\eta} + \frac{d}{d\eta} \eta \right) f = f$$

A consequência é que a regra do produto também fica modificada:

$$\frac{d}{d\eta} (\eta f) = f - \eta \frac{d}{d\eta} f$$

$$\left\{ \eta_i, \frac{\partial}{\partial \eta_j} \right\} = \delta_{ij} \quad (\text{eq. 60.1})$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \eta}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right\} = 0 \quad (\text{eq. 60.2})$$

E num caso mais geral:

$$\frac{\partial}{\partial \eta_j} (\eta_1 \eta_2 \eta_3 \dots \eta_n) = \delta_{1j} \eta_2 \eta_3 \dots \eta_n - \delta_{2j} \eta_1 \eta_3 \dots \eta_n + \delta_{3j} \eta_1 \eta_2 \eta_4 \dots \eta_n - \dots$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_k} e^{\sum \theta_i \eta_i} = \eta_k e^{\sum \theta_i \eta_i} \quad \frac{\partial}{\partial \eta_k} e^{\sum \theta_i \eta_i} = -\theta_k e^{\sum \theta_i \eta_i}$$

$a = \sum \theta_i \eta_i$

$$e^a = 1 + \sum \theta_i \eta_i + \frac{1}{2!} (\sum \theta_i \eta_i) (\sum \theta_j \eta_j) + \dots = 1 + \sum \theta_i \eta_i + \frac{1}{2!} (\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \theta_i \eta_i \theta_j \eta_j) + \frac{1}{3!} (\sum_{\substack{i,j,k \\ i \neq j \\ i \neq k}} \theta_i \eta_i \theta_j \eta_j \theta_k \eta_k) =$$

$$\frac{d}{d\theta_k} e^a = 0 - \theta_k + \frac{1}{2!} \left[ \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} (-\theta_i \delta_{ik} \theta_j \eta_j - \theta_i \eta_i \theta_j \delta_{kj}) \right] + \dots = -\theta_k - \theta_k \sum_i \theta_i \eta_i - \theta_k \frac{1}{2!} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \theta_i \eta_i \theta_j \eta_j$$

$$= -\theta_k (1 + \sum_i \theta_i \eta_i + \frac{1}{2!} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \theta_i \eta_i \theta_j \eta_j + \dots) = -\theta_k e^a //$$

Para definir integrais é natural assumir que os infinitesimais de Grassmann também anti-comutam:

$$\{\theta, d\eta\} = 0$$

$$\{d\theta, d\eta\} = 0$$

que resolve outra ambiguidade de sinal (se fizemos primeiro a integral de fora o sinal fica invertido)

$$\int d\theta d\eta f(\theta, \eta) \equiv \int d\theta \left[ \int d\eta f(\theta, \eta) \right]$$

Considere a integral de uma função de apenas um número de Grassman, queremos que esta integral tenha a propriedade de ser invariante por translações nesta variável:

$$\theta \rightarrow \theta + \eta \Rightarrow \int d\theta f(\theta) = \int d\theta f(\theta + \eta)$$

$$F(\theta) = F(\theta + \eta)$$

série  $\rightarrow A + B\theta = A + B(\theta + \eta) \rightarrow \forall \eta \rightarrow B = 0$  série

A deve ser par, então  $\int d\theta f(\theta)$  também deve ser par

$$\int d\theta f(\theta) = \int d\theta (a_1 + a_2 \theta) = \int a_1 d\theta + \int d\theta a_2 \theta$$

$$\left( \int d\theta a_1 \right)^2 = \int d\theta \int d\eta a_1^2 = \int d\theta d\eta a_1^2 = - \int d\eta d\theta a_1^2 = - \left( \int d\theta a_1^2 \right) = 0$$

$\int d\theta a_1$  é ímpar ou zero, para satisfazer a condição acima:  $\int d\theta a_1 = a_1 \int d\theta \rightarrow \int d\theta = 0$  (eq. 61.1)

$\int d\theta a_2 \theta$  deve ser par, e tomaremos:  $\int d\theta a_2 \theta = a_2 \int d\theta \theta$   
 $\int d\theta \theta = 1$  (eq. 61.2)

$$\int d\theta f(\theta, \eta) = \int d\theta (a_0 + a_1 \theta + a_2 \eta + a_3 \theta \eta) = a_1 + a_3 \eta = \frac{\partial}{\partial \theta} f(\theta, \eta)$$

o que pode ser mostrado em geral, ou seja **a integração e a diferenciação tem o mesmo efeito.**

A função delta também pode ser definida, usando uma função  $\eta$ :  $g(\eta)$

$$g(\eta) = a + b\eta$$

queremos:

$$\int d\eta \delta(\eta - p) g(\eta) = g(p) = a + b p$$

$$\int d\eta \delta(\eta - p) [a + b\eta] = a \int d\eta \delta(\eta - p) + b \int d\eta \delta(\eta - p) \eta$$

O que é obtido com:  $\delta(\eta - p) = \eta - p$  (eq. 61.3)

$$\int d\eta (\eta - p) = \int d\eta \eta - \int d\eta p$$

$$\int d\eta (\eta - p) \eta = \int d\eta \eta \eta - \int d\eta p \eta$$

A mudança de variáveis multiplicativa (por um número complexo) na integração também parece mais com uma mudança em derivadas:

$$\int dx x = 1 \quad y = ax \quad \int dy y = 1 = a \int dx x \quad dy = \frac{1}{a} dx \quad (\text{eq. 61.4})$$

Para números de Grassmann complexos:

$$(\Theta \eta)^* \equiv \eta^* \Theta^* = -\Theta^* \eta^* \quad \left\{ \int d\eta = \int d\eta^* = 0 \quad \& \quad \int \eta \eta = \int \eta^* \eta^* = 1 \right\}$$

$$e^{-\eta^* \eta} = 1 - \eta^* \eta$$

$$\int d\eta^* d\eta e^{-\eta^* \eta} = \int d\eta^* d\eta (1 - \eta^* \eta) = \int d\eta^* d\eta (1 + \eta \eta^*) = 1$$

$$\int d\eta^* d\eta e^{-\eta^* \eta} = 1 \quad (\text{eq. 62.1})$$

$$\int d\eta^* d\eta \eta \eta^* e^{-\eta^* \eta} = \int d\eta^* d\eta \eta \eta^* (1 - \eta^* \eta) = 1$$

$$\int d\eta^* d\eta \eta \eta^* e^{-\eta^* \eta} = \frac{1}{1} \cdot 1 \quad (\text{eq. 62.2})$$

$$\dots \left\{ \int d\eta^* d\eta \eta \eta^* e^{-\eta^* \eta} = \frac{d}{d\eta} \int d\eta^* d\eta e^{-\eta^* \eta} \right\}$$

Isto é análogo ao que teríamos obtido para integral gaussiana de variáveis complexas:

$$\int \frac{d\bar{z}^{\dagger}}{(2\pi i)^{1/2}} \int \frac{dz}{(2\pi i)^{1/2}} e^{-\bar{z}^{\dagger} \cdot \eta \cdot z} = \frac{1}{1} \quad (\text{eq. 62.3})$$

$$\int \frac{d\bar{z}^{\dagger}}{(2\pi i)^{1/2}} \int \frac{dz}{(2\pi i)^{1/2}} \bar{z}^{\dagger} z e^{-\bar{z}^{\dagger} \cdot \eta \cdot z} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} \quad (\text{eq. 62.4})$$

$$\dots \left\{ \frac{d}{d\eta} \int \frac{d\bar{z}^{\dagger}}{(2\pi i)^{1/2}} \int \frac{dz}{(2\pi i)^{1/2}} e^{-\bar{z}^{\dagger} \cdot \eta \cdot z} = \dots \right\}$$

**Exercício:** provar 62.3 e 62.4

Suponha um caso bidimensional:

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \quad \bar{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_1^* & \eta_2^* \end{pmatrix}$$

$$(\bar{\eta} \eta)^{\dagger} = (\eta_1^* \eta_1 + \eta_2^* \eta_2)^{\dagger} = \eta_1^* \eta_1 \eta_2^* \eta_2 + \eta_2^* \eta_2 \eta_1^* \eta_1 = 2 \eta_1^* \eta_1 \eta_2^* \eta_2$$

$$e^{-\bar{\eta} \eta} = 1 - (\eta_1^* \eta_1 + \eta_2^* \eta_2) + \eta_1^* \eta_1 \eta_2^* \eta_2$$

$$d\bar{\eta} d\eta \equiv d\eta_1^* d\eta_1 d\eta_2^* d\eta_2$$

$$\int d\bar{\eta} d\eta e^{-\bar{\eta} \eta} = \int d\eta_1^* d\eta_1 d\eta_2^* d\eta_2 \eta_1^* \eta_1 \eta_2^* \eta_2 = 1$$

$$\int d\bar{\eta} d\eta e^{-\bar{\eta} \eta} = 1 \quad (\text{eq. 63.1})$$

Fazendo uma mudança de variáveis, obtemos:

$$\eta = M \alpha$$

$$\bar{\eta} = \bar{\alpha} N$$

$$M, N \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$$

$$\eta_1 \eta_2 = (M_{11} \alpha_1 + M_{12} \alpha_2) (M_{21} \alpha_1 + M_{22} \alpha_2) =$$

$$= (M_{11} M_{22} - M_{12} M_{21}) \alpha_1 \alpha_2 = \text{DET}[M] \alpha_1 \alpha_2$$

Então, se queremos que:  $\int d\eta_1 d\eta_2 \eta_1 \eta_2 = \int d\alpha_1 d\alpha_2 \alpha_1 \alpha_2$

temos que exigir:  $d\eta_1 d\eta_2 = (\text{DET}[M])^{-1} d\alpha_1 d\alpha_2$

(como já tínhamos visto na mudança de uma variável)

da mesma forma:  $d\eta_1^* d\eta_2^* = (\text{DET}[N])^{-1} d\alpha_1^* d\alpha_2^*$

então:

$$1 = \int d\eta_1^* d\eta_1 d\eta_2^* d\eta_2 e^{-\bar{\eta} \eta} = \int \frac{d\alpha_1^* d\alpha_2^*}{\text{DET}[N]} \frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{\text{DET}[M]} e^{-\bar{\alpha} N M \alpha} =$$

$$= \frac{1}{\text{DET}[NM]} \int d\alpha_1^* d\alpha_1 d\alpha_2^* d\alpha_2 e^{-\bar{\alpha} \underbrace{NM}_A \alpha}$$

$$\int d\bar{\alpha} d\alpha e^{-\bar{\alpha} \cdot A \alpha} = \text{DET}[A] \quad (\text{eq. 63.2})$$

Provamos isso para 2D, mas a mesma coisa poderia ter sido feita para mais dimensões.

compare com:  $\int \frac{d^n \vec{z}^*}{(2\pi i)^n} \frac{d^n \vec{z}}{(2\pi i)^n} e^{-\vec{z}^* \cdot A \vec{z}} = (\text{DET} A)^{-1}$

Usando derivadas em  $a$ , podemos também mostrar que:

$$\int \prod_i d\bar{\alpha}_i d\alpha_i \alpha_i \bar{\alpha}_j e^{-\bar{\alpha} \cdot A \alpha} = (A^{-1})_{ij} \mathcal{D}_{\epsilon_T} [A] \quad (\text{eq. 64.1})$$

Podemos definir uma "função de Grassmann" (que é ímpar, para cada valor  $x$ , fornece um  $a$ -number)

como:

$$\psi(x) = \sum_i \psi_i \phi_i(x)$$

$\left\{ \phi_i \right\}$  base de funções usuais ( $\phi_i \in \mathbb{C}$ )  
 coeficientes são números de Grassmann

E generalizar as integrais funcionais Gaussianas para funções deste tipo:

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-\bar{\psi} \cdot A \psi} = \mathcal{D}_{\epsilon_T} [A] \quad (\text{eq. 64.2})$$

### O Oscilador Harmônico Fermiônico

O operador hamiltoniano de um oscilador harmônico quantizado como um férmion, antes de dispensarmos a energia do vácuo, é:

$$\hat{H}_F = \omega \left( \hat{b}^\dagger \hat{b} - \frac{1}{2} \right) \quad \left\{ \hat{b}, \hat{b}^\dagger \right\} = 1$$

Consideremos, assim como no caso bosônico, o estado coerente:

$$|\beta\rangle = e^{\hat{b}^\dagger \beta} |0\rangle = (1 + \hat{b}^\dagger \beta) |0\rangle = (1 - \beta \hat{b}^\dagger) |0\rangle$$

$$\hat{b} |\beta\rangle = \left( \hat{b} + \beta \hat{b} \hat{b}^\dagger \right) |0\rangle = \beta |0\rangle = \beta (1 - \beta \hat{b}^\dagger) |0\rangle = \beta |\beta\rangle$$

Temos a relação de completeza:

$$\hat{1} = \int d\beta^* d\beta |\beta\rangle \langle \beta^*| e^{-\beta^* \beta}$$

E o hamiltoniano na presença de fontes (oscilador forçado) será escrito como:

$$H(b^\dagger, b; t) = \omega b^\dagger b - b^\dagger \eta(t) - \bar{\eta}(t) b$$

Queremos calcular a amplitude de transição:

$$F(\beta^*, t'; \beta, t) = \langle \beta^*, t' | \beta, t \rangle$$

para a qual seguimos os mesmos passos de sempre para encontrar a integral funcional:

$$F(\beta^*, t'; \beta, t) = \int \mathcal{D}\beta^* \mathcal{D}\beta \exp \left\{ i \int_t^{t'} dt \left[ -i \dot{\beta}^*(t) \beta(t) - H(\beta^*(t), t) \right] + \beta^*(t') \beta(t) \right\}$$

As equações de Hamilton na presença de fontes são:

$$\dot{\beta}^*(z) - i\omega \beta^*(z) + i\bar{\eta}(z) = 0$$

$$\beta(t) = \beta$$

$$\dot{\beta}(z) + i\omega \beta(z) - i\eta(z) = 0$$

$$\beta^*(t') = \beta^*$$

(eq. 65.1)

Com soluções:

$$\beta_\omega(z) = \beta e^{i\omega(t-z)} + i \int_t^z e^{i\omega(z-s)} \eta(s) ds$$

$$\beta_\omega^*(z) = \beta^* e^{i\omega(z-t')} + i \int_z^{t'} e^{i\omega(z-s)} \bar{\eta}(s) ds$$

(eq. 65.2)

Que podemos projetar no vácuo fazendo:  $\left. \begin{array}{l} \beta = \beta^* = 0 \\ t \rightarrow -\infty \\ t' \rightarrow +\infty \end{array} \right\}$

E neste caso (exercício, mas a dedução prossegue de maneira análoga ao caso bosônico - pg 26):

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = F(0, \infty; 0, -\infty) = \langle 0 | 0 \rangle \exp \left\{ - \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_z^{+\infty} ds e^{i\omega(t-s)} \bar{\eta}(s) \eta(s) \right\} \quad (\text{eq. 65.3})$$

Generalizando para o caso de um campo (em 0+1 dim), teríamos:

$$\beta \rightarrow \psi \quad \beta^* \rightarrow \bar{\psi}$$

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ i \int dt \left[ \underbrace{-i \dot{\bar{\psi}} \psi}_{i \bar{\psi} \dot{\psi}} - \omega \bar{\psi} \psi + \bar{\psi} \eta + \bar{\eta} \psi \right] \right\} =$$

$$= \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ i \int dt \left[ \bar{\psi} (i \dot{\psi} - \omega) \psi + \bar{\psi} \eta + \bar{\eta} \psi \right] \right\} =$$

$\mathcal{D}_F^{-1} = -i(i \dot{\psi} - \omega)$

$$= \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ \int dt \left[ -\bar{\psi} D_F^{-1} \psi \right] + \lambda \int dt \left[ \bar{\psi} \eta + \bar{\eta} \psi \right] \right\}$$

$$\therefore Z[\eta, \bar{\eta}] = Z[0, 0] \exp \left\{ - \int ds dz \bar{\eta}(s) D_F(s, z) \eta(z) \right\} \quad (\text{eq. 66.1})$$

$$D_F(s, z) = \left[ -\lambda (\lambda \partial_t - \omega) \right]^{-1} = \lambda \int \frac{dE}{2\pi} \frac{e^{-iE(s-z)}}{E - \omega + i\epsilon} = \Theta(s-z) e^{-i\omega(s-z)} \quad (\text{eq. 66.2})$$

Note que: (1) Temos apenas um polo, em  $E = \omega - i\epsilon$

(2) Isso significa que se fizemos a integral no hemisfério superior ( $\text{Im } E > 0$ ) ela dá zero, e somos forçados a fazer isso se ( $s < \tau$ ), portanto a integral é zero para ( $s < \tau$ ). No outro hemisfério (obrigatório se  $s > \tau$ ) pegamos o polo e obtemos o resultado não nulo acima.

$$-iE(s-z) \sim \text{Im}(E)(s-z)$$

(3) Basta substituir a última expressão em 66.1 para obter 65.2 (incluindo o limite de integração, que impõe  $s > \tau$ )

Passando para o espaço Euclidiano:  $\tau = -i t_E$

$$Z_E[\eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ \int dt_E \bar{\psi}_E (-\partial_{t_E} - \omega) \psi_E + \int dt_E \bar{\psi}_E \eta_E + \bar{\eta}_E \psi_E \right\}$$

suprimindo o "E"

$$= Z[0, 0] \exp \left\{ \int dz ds \bar{\eta}(s) D(s, z) \eta(z) \right\}$$

$$-S_E = -\bar{\psi} \cdot D^{-1} \psi + \bar{\psi} \cdot \eta + \bar{\eta} \cdot \psi \quad (\text{eq. 66.3})$$

$$D[s, z] = (\partial_t + \omega)^{-1} = \lambda \int \frac{dE}{2\pi} \frac{e^{-iE(s-z)}}{E + i\omega} \quad (\text{eq. 66.4})$$

E rodando de volta para Minkowski com  $E_E = (-i + \epsilon) E$  (para evitar o polo), voltamos ao propagador em 66.2

Agora basta aumentar o número de coordenadas espaciais para obter uma teoria de campo. A lagrangeana (em Mink.) é:

$$\mathcal{L}_F^{(M)} = -\bar{\psi} (\not{\partial} + m) \psi$$

Passando para o Euclideano:

$$\mathcal{L}_F^{(E)} = \bar{\psi}(\not{\partial} + m)\psi$$

Tomando o cuidado de manter a álgebra de Clifford funcionando:  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$

$$(\gamma^0)^2 = -1 \Rightarrow (\gamma^i)^2 = +1$$

$$\gamma^1 = i\gamma^0$$

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger i\gamma^0 = \psi^\dagger \gamma^1$$

E, nesta representação:  $\gamma_\mu = \gamma^\mu = (\gamma^\mu)^\dagger$

A função de partição obtida é:

$$Z_F^{(E)}[\bar{\eta}, \eta] = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ - \int d^4x \bar{\psi}(\not{\partial} + m)\psi + \int d^4x (\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta) \right\} = \tag{eq. 67.1}$$

$$= Z(0,0) e^{\bar{\eta}(\not{\partial} + m)^{-1}\eta}$$

Atenção para o índice Espinorial:  
 $\int d^4x \bar{\eta}\psi = \int d^4x \bar{\eta}_\alpha(x)\psi_\alpha(x)$   $\alpha=1,2,3,4$   
 $\bar{\eta}(\not{\partial} + m)^{-1}\eta = \int d^4x d^4y \bar{\eta}_\alpha(x) (\not{\partial} + m)^{-1}_{\alpha\beta} \eta_\beta(y)$

$$S_F(x, y) = (\not{\partial}_x + m)^{-1} = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{i p \cdot (x-y)}}{-\not{p} + im} \tag{eq. 67.2}$$

$$(\not{\partial}_x + m) S_F(x, y) = \delta^4(x-y) \quad \text{ou} \quad \not{\partial}_x e^{ipx} = i\not{p} e^{ipx}$$

Usaremos com frequência a seguinte relação:

$$\frac{1}{-\not{p} + im} = \frac{-\not{p} - im}{p^2 + m^2} = \frac{-\not{p}_{\alpha\beta} - im \uparrow_{\alpha\beta}}{p^2 + m^2}$$

$$\not{p}\not{p} = \gamma^\mu p_\mu \gamma^\nu p_\nu = 2g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu - \underbrace{\gamma^\mu \gamma^\nu p_\mu p_\nu}_{\gamma^\nu \gamma^\mu p_\nu p_\mu} \Rightarrow 2p^2 = 2\not{p}\not{p}$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$$

Voltando para Minkowski, obtemos:

$$S_F^{(E)}(x, y) = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{i p \cdot (x-y)}}{-\not{p} + im} = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{-\not{p} - im}{p^2 + m^2} e^{i p \cdot (x-y)}$$

$$t_E = i t \quad p_E^0 = (-i + \epsilon) p^0 \quad p_E^2 + m^2 = p^2 + m^2 - i \epsilon$$

$$p^E = \gamma^1 p_E^0 + \gamma^i p_{Ei} = i \gamma^0 (-i + \epsilon) p^0 + \gamma^i p_{i} = \gamma^0 p^0 + \gamma^i p_i + i \gamma^0 \epsilon$$

$$S_F^{(M)}(x, y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{i[p^0(x^0 - y^0) + p^i(x^i - y^i)]} \frac{-\gamma^0 p^0 - \gamma^i p_i - i m}{p^2 + m^2 - i \epsilon} =$$

$$\stackrel{p_i \rightarrow -p_i}{=} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{i p(x - y)} \frac{-\not{p} - i m}{p^2 + m^2 - i \epsilon}$$

### Teorema de Wick para Campos Fermiônicos

Como um exemplo, consideremos uma teoria com um escalar  $\phi$  (com fonte  $J$ ) e um férmion  $\psi$ , interagindo por meio de um termo  $S_I[\bar{\psi}, \psi, \phi]$ , neste caso poderíamos escrever:

$$Z[\bar{\eta}, \eta, J] = e^{-S_I\left[-\frac{\delta}{\delta \eta}, \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}}, \frac{\delta}{\delta J}\right]} Z_F^{(0)}[\bar{\eta}, \eta] Z_\phi^{(0)}[J] \quad (\text{eq. 68.1})$$

que é obtida seguindo exatamente o mesmo procedimento usado na pag 42. A única diferença está no termo  $-\frac{\delta}{\delta \eta}$  que tem este sinal pois o termo de fonte tem a forma:  $\bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta$

$$\text{Logo: } \psi e^{\int d^4x \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta} = - \int \frac{\delta}{\delta \eta} e^{\int d^4x \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta}$$

O lema de Coleman (eq. 47.2) também ganha um sinal pelo mesmo motivo:

$$F\left(-\frac{\delta}{\delta \eta}, \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}}\right) Z[\bar{\eta}, \eta] = Z\left[-\frac{\delta}{\delta \psi}, \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}}\right] \left( F(\bar{\psi}, \psi) e^{\bar{\psi} \eta + \bar{\eta} \psi} \right)_{\bar{\psi} = \psi = 0} \quad (\text{eq. 68.2})$$

$$Z[\bar{\eta}, \eta, J] = e^{-S_I\left(-\frac{\delta}{\delta \eta}, \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}}, \frac{\delta}{\delta J}\right)} e^{\bar{\eta} S_F \eta} Z_\phi^{(0)}[J] =$$

(eq. 68.3)

$$= e^{-\frac{\delta}{\delta \psi} S_F \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}}} e^{-S_I(\bar{\psi}, \psi, \frac{\delta}{\delta J}) + \bar{\psi} \cdot \eta + \bar{\eta} \cdot \psi} Z_\phi^{(0)}[J] \Big|_{\psi = \bar{\psi} = J = 0} =$$

$$= e^{-\frac{\delta}{\delta \psi} S_F \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}}} e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \phi} \Delta \frac{\delta}{\delta \phi}} \left\{ e^{-S_I(\bar{\psi}, \psi, \phi) + \bar{\psi} \cdot \eta + \bar{\eta} \cdot \psi + J \cdot \phi} \right\}_{\psi = \bar{\psi} = \phi = 0}$$

Regras de Feynman para Férmions (Interação de Yukawa)

$$\mathcal{L}_Y = g \bar{\Psi} \Psi \phi$$

$$Z[\bar{\eta}, \eta, J] = e^{-\frac{\delta}{\delta \Psi} S_F \frac{\delta}{\delta \bar{\Psi}}} e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \phi} \Delta \frac{\delta}{\delta \phi}} \left\{ e^{-g \int d^4x \bar{\Psi} \Psi \phi + \bar{\Psi} \cdot \eta + \bar{\eta} \cdot \Psi + J \cdot \phi} \right\}_{\Psi = \bar{\Psi} = \phi = 0}$$

Começamos com a função de dois pontos livre (onde os dois pontos são aplicações do campo fermiônico):

$G_{(n,m)}^{(N)}$   
 ↳ ordem na expansão perturbativa  
 ↳ numero de pontos externos bosônicos  
 ↳ numero de pontos externos fermiônicos

$$G_{(2,0)}^{(0)} = \langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle = \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} \left( - \frac{\delta}{\delta \eta(y)} \right) Z_0(\bar{\eta}, \eta, J) \Big|_{\eta = \bar{\eta} = J = 0}$$

note que, trivialmente, temos  $\langle 0 | \psi \psi | 0 \rangle = \langle 0 | \bar{\psi} \bar{\psi} | 0 \rangle = 0$

$$Z_0[\bar{\eta}, \eta, J] = e^{-\frac{\delta}{\delta \Psi} S_F \frac{\delta}{\delta \bar{\Psi}}} e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \phi} \Delta \frac{\delta}{\delta \phi}} \left\{ e^{-g \int d^4x \bar{\Psi} \Psi \phi + \bar{\Psi} \cdot \eta + \bar{\eta} \cdot \Psi + J \cdot \phi} \right\}_{\Psi = \bar{\Psi} = \phi = 0}$$

↳ Só estou interessado na parte que contribui para  $G_{(2,0)}^{(0)}$  ou seja com  $\eta \cdot \bar{\eta}$

$$= - \frac{\delta}{\delta \Psi} S_F \frac{\delta}{\delta \bar{\Psi}} e^{\bar{\eta} \cdot \eta + \bar{\eta} \cdot \Psi} = \bar{\eta} \cdot S_F \cdot \eta e^{\bar{\eta} \cdot \eta + \bar{\eta} \cdot \Psi} \Big|_{\bar{\Psi} = \Psi = 0} = \bar{\eta} \cdot S_F \cdot \eta$$

$$G_{(2,0)}^{(0)} = \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} \left( - \frac{\delta}{\delta \eta(y)} \right) \bar{\eta} \cdot S_F \cdot \eta = \int d^4z_1 d^4z_2 \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} \bar{\eta}(z_1) S_F(z_1 - z_2) \delta_{\beta\gamma} \frac{\delta}{\delta \eta(y)} \eta(z_2)_{\alpha} = S_F(x - y)_{\alpha\beta}$$

$$\bar{\psi}_{\beta} \rightarrow \psi_{\alpha} = S_F(x - y)_{\alpha\beta} = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left( \frac{e^{ip(x-y)}}{-\not{p} + m} \right)_{\alpha\beta}$$

(eq. 69.1)

Note que agora o sinal do momento (ou a ordem de x e y) importa!

A regra para o vértice vem trivialmente da função de três pontos:

$$G_{(2,1)}^{(1)} = \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} \left( - \frac{\delta}{\delta \eta(y)} \right) \frac{\delta}{\delta J(z)} e^{-\frac{\delta}{\delta \Psi} S_F \frac{\delta}{\delta \bar{\Psi}}} e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \phi} \Delta \frac{\delta}{\delta \phi}} \left\{ e^{-g \int d^4x \bar{\Psi} \Psi \phi + \bar{\Psi} \cdot \eta + \bar{\eta} \cdot \Psi + J \cdot \phi} \right\}_{\Psi = \bar{\Psi} = \phi = 0}$$

↳ índice espinoriais subentendidos

$$= e^{-\frac{\delta}{\delta\psi} S_F \frac{\delta}{\delta\psi}} e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta\phi} \Delta \frac{\delta}{\delta\phi}} \left\{ \phi(z) \psi(x) \bar{\psi}(y) \underbrace{e^{-g \int d^4w \bar{\psi}(w) \psi(w) \phi(w)}}_{\text{só quero o termo } O(g^1)} \right\} =$$

só quero o termo  $O(g^1)$

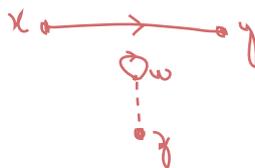
$$= e^{-\frac{\delta}{\delta\psi} S_F \frac{\delta}{\delta\psi}} e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta\phi} \Delta \frac{\delta}{\delta\phi}} (-g) \phi(z) \psi(x) \bar{\psi}(y) \int d^4w \underbrace{\bar{\psi}(w) \psi(w)}_{\text{índice espinoriais subentendidos}} \phi(w) =$$

índice espinoriais subentendidos

$$= -g \int d^4w \Delta(z-w) \frac{1}{2} \left( -\frac{\delta}{\delta\psi} S_F \frac{\delta}{\delta\psi} \right) \left( -\frac{\delta}{\delta\psi} S_F \frac{\delta}{\delta\psi} \right) \psi(x) \bar{\psi}(y) \bar{\psi}(w) \psi(w) =$$

$$\left( -\frac{\delta}{\delta\psi} S_F \frac{\delta}{\delta\psi} \right) \psi(x) \bar{\psi}(y) \bar{\psi}(w) \psi(w) =$$

$$= \int d^4z_1 d^4z_2 \left( -\frac{\delta}{\delta\psi(z_1)} S_F(z_1 - z_2) \right) \left[ -\psi(x) \delta(z_2 - y) \delta_{\alpha\beta} \bar{\psi}(w) \psi(w) + \psi(x) \bar{\psi}(y) \delta(w - z_2) \delta_{\beta\alpha} \psi(w) \right] =$$



Não quero o diagrama de bolha no vácuo:

$$= \int d^4z_1 d^4z_2 \left( -S_F(z_1 - z_2) \right) \left[ -\psi(x) \delta(z_2 - y) \bar{\psi}(w) \delta(z_1 - w) \delta_{\alpha\beta} \delta_{\beta\alpha} + \delta(x - z_1) \bar{\psi}(y) \delta(w - z_2) \psi(w) \delta_{\alpha\beta} \delta_{\beta\alpha} \right] + \text{BOLHAS}$$

$$= +S_F(w - y)_{\beta\alpha} \psi(x) \bar{\psi}(w) - S_F(x - w)_{\alpha\beta} \bar{\psi}(y) \psi(w) + \text{BOLHAS}$$

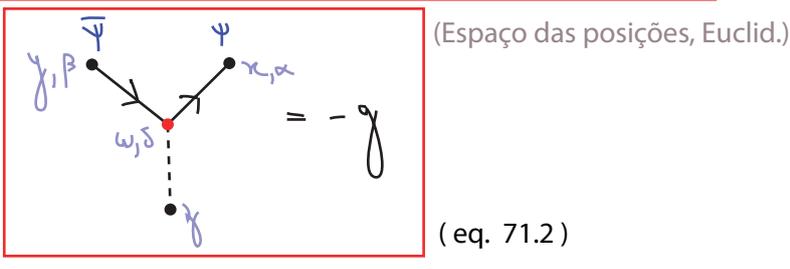
$$= -g \int d^4w \Delta(z-w) \frac{1}{2} \int d^4z_3 d^4z_4 \left( -\frac{\delta}{\delta\psi(z_3)} S_F(z_3 - z_4) \cdot \frac{\delta}{\delta\psi(z_4)} \right) \left[ +S_F(w - y) \psi(x) \bar{\psi}(w) - S_F(x - w) \bar{\psi}(y) \psi(w) \right] =$$

$$= -g \int d^4w \Delta(z-w) \frac{1}{2} \int d^4z_3 d^4z_4 \left( -S_F(z_3 - z_4) \right) \left[ -S_F(w - y) \psi(x) \delta(w - z_4) - S_F(x - w) \delta(y - z_4) \psi(w) \right] =$$

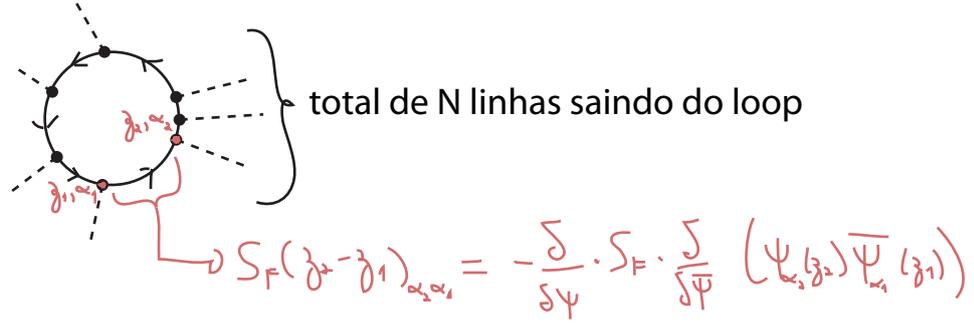
$$= -g \int d^4w \Delta(z-w) \frac{1}{2} \int d^4z_3 d^4z_4 \left( -S_F(z_3 - z_4) \right) \left[ -S_F(w - y) \delta(x - z_3) \delta(w - z_4) - S_F(x - w) \delta(y - z_4) \delta(w - z_3) \right] =$$

$$= -g \int d^4w \Delta(z-w) \frac{1}{2} \left[ S_F(x - w)_{\alpha\beta} S_F(w - y)_{\beta\alpha} + S_F(w - y)_{\beta\alpha} S_F(x - w)_{\alpha\beta} \right] =$$

$$G_{(A,1)}^{(1)} = -g \int d^4\omega \Delta(\gamma-\omega) S_F(x-\omega) S_F(\omega-\gamma) \quad (\text{eq. 71.1})$$



A importância do ordenamento do campo fermiônico cria uma importante diferença entre um loop fermiônico e um loop bosônico, pense no seguinte diagrama:



Temos vários termos deste tipo:

$$\left(-\frac{\delta}{\delta \psi} \cdot S_F \cdot \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}}\right) \dots \left(-\frac{\delta}{\delta \psi} \cdot S_F \cdot \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}}\right) \left( (\bar{\psi} \psi)_1 \dots (\bar{\psi} \psi)_N \right) \leftrightarrow (\bar{\psi} \psi)_i = \bar{\psi}(z_i) \psi(z_i)$$

note que estes vêm todos da interação, por isso a ordem  $\bar{\psi} \psi$

Para obter a combinação cíclica (já que é um loop):

$$S_F(z_N-z_1)_{\alpha_N \alpha_1} S_F(z_1-z_2)_{\alpha_1 \alpha_2} \dots S_F(z_{N-1}-z_N)_{\alpha_{N-1} \alpha_N} = \text{Tr} \left[ S_F(z_1-z_2) \dots S_F(z_{N-1}-z_N) \right]$$

(loops de férmions geram traços)

temos que trazer o último campo para a primeira posição e então aplicar as derivadas:

$$\left( (\bar{\psi} \psi)_1 \dots (\bar{\psi} \psi)_N \right) = -\psi(z_N) (\bar{\psi} \psi)_1 \dots (\bar{\psi} \psi)_{N-1} \psi_N(z_N)$$

passo por 2N-1 campos

De onde vemos que, além de qualquer sinal que venha dos vértices  $(-g)^N$ , temos uma regra de Feynman nova, devemos multiplicar por sinal total negativo toda vez que aparecer um loop fermiônico. Você pode checar, por exemplo que o mesmo loop gerado em uma teoria  $\lambda \phi^3$  não tem sinal algum além do que vem dos vértices.



Regras de Feynman para interação de Yukawa:

(direção é importante)

(multiplico por  $-1^L$ , onde  $L = \#$  loops fermiônicos)  
(a contração dos índices espinoriais vai produzir um traço)

Para uma interação geral entre férmions e um número arbitrário de escalares:

$$S_{\text{I}}(\bar{\Psi}, \Psi, \phi_1, \dots, \phi_n)$$

Temos uma expressão semelhante a 54.1, a regra do vértice é dada por:

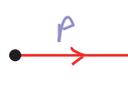
$$\int d^4x d^4y d^4z_1 \dots d^4z_n e^{-i(p \cdot x + p' \cdot y + q_1 \cdot z_1 + \dots + q_n \cdot z_n)} \times$$

$$\times \frac{\delta}{\delta \phi_1(z_1)} \dots \frac{\delta}{\delta \phi_n(z_n)} \left( -\frac{\delta}{\delta \bar{\Psi}(y)} \frac{\delta}{\delta \Psi(x)} \right) \left[ -S_{\text{I}}[\bar{\Psi}, \Psi, \phi_1, \dots, \phi_n] \right] \quad (\text{eq. 72.1})$$

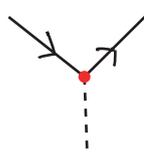
### Regras de Feynman no Espaço de Minkowsky:

Basta fazer a rotação de volta na expressão 71.1 (os propagadores já tinham sido deduzidos anteriormente) para mostrar que

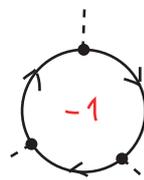
Regras de Feynman para interação de Yukawa (Minkowski):


 $= -i \frac{-i \not{p} + m}{p^2 + m^2 - i\epsilon}$ 

(direção é importante)


 $= -i g$


 $= \frac{-i}{p^2 + M^2 - i\epsilon}$



-1

(multiplico por  $-1^L$ , onde  $L = \#$  loops fermiônicos)  
(a contração dos índices espinoriais vai produzir um traço)

(Espaço dos momentos, Mink.) (eq. 72.2)

Lembrando que um estado fermiônico pode ser escrito como:

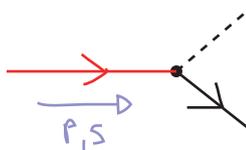
$$|p, s\rangle = \sqrt{2E_p} \alpha_p^{s+} |0\rangle$$

Então:

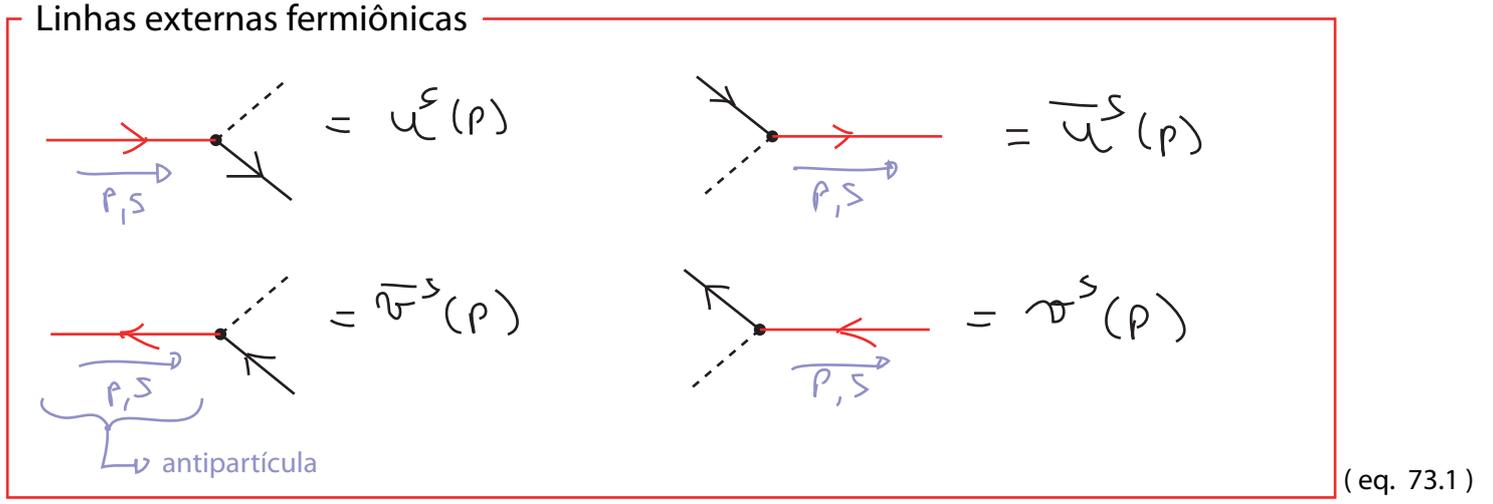
$$\Psi(x) |p, s\rangle = \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{p'}}} \sum_{s'} \alpha_{p'}^{s'} u^{s'}(p') e^{i p' \cdot x} \sqrt{2E_p} \alpha_p^{s+} |0\rangle =$$

$$= e^{i p \cdot x} u^s(p) |0\rangle \quad (\text{note que especificamos também o spin})$$

Dá para intuir que, quando convertemos isto em regras de Feynman para amplitudes de espalhamento, as exponenciais serão convertidas na conservação de momento total, deixando como regra da linha externa:


 $= u^s(p)$

usando o mesmo raciocínio para  $a^\dagger$ ,  $b$  e  $b^\dagger$ , chegamos a (note que estas regras só fazem sentido no espaço de Minkowski onde podemos definir um espalhamento):



## Quantização de Campos de Gauge

(Nastase 16, Nastase II 11 e 12, Peskin 9.4, Ryder 7.1)

Voltaremos agora ao “mundo bosônico” para lidar com um tipo bastante especial de bóson, os **Bósons de Gauge**. Estes campos vetoriais são introduzidos em teorias toda vez que assumimos a existência de alguma simetria contínua e local (simetria de Gauge), em geral postulando que o conteúdo de matéria da teoria (escalares e férmions) se transformem sobre alguma representação de um grupo de Lie (embora seja também comum pensar em teorias de puro Gauge, onde temos apenas os campos vetoriais, comumente chamadas de teorias de Yang-Mills).

Neste caso, o campo vetorial deve, para manter a invariância da ação sobre as transformações do grupo em questão, se transformar da seguinte forma:

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \frac{1}{e} \partial_\mu \lambda(x) \quad (\text{no caso de uma simetria } U(1), \text{ abeliana})$$

$e$  constantes de acoplamento

$$A_\mu^a(x) \rightarrow A_\mu^a(x) + \frac{1}{g} \partial_\mu \lambda^a(x) + f^{abc} A_\mu^b \lambda^c(x) \quad (a, b, c \rightarrow \text{índices da representação adjunta do grupo (vão de 1 até \#Geradores do Grupo)})$$

$f^{abc}$  constantes de estrutura do grupo

(no caso de uma simetria não-abeliana)

Vamos nos restringir ao caso abeliano, por enquanto, e comecemos tentando o caminho ingênuo, análogo ao que fizemos no campo escalar:

$$\begin{aligned} Z[J] &= N \int \mathcal{D}\phi \ e^{i \int (\mathcal{L} + J\phi) dx} = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\phi \ e^{-i \int dx \left[ \frac{1}{2} \phi (\square + m^2) \phi - \phi J \right]} = \\ &= \text{EXP} \left[ -\frac{i}{2} \int dx dy \ J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right] \end{aligned}$$

No caso do campo eletromagnético (sem interação com a matéria):

$$Z[J] = N \int \mathcal{D}A_\mu \ e^{i \int (\mathcal{L} + J^\mu A_\mu) dx}$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$$

$$\int d^4x (\partial_\mu A_\nu) (\partial^\mu A^\nu) = \int d^4x \partial_\mu (A_\nu \partial^\mu A^\nu) - \int d^4x A_\nu \partial_\mu \partial^\mu A^\nu = - \int d^4x g_{\mu\nu} A^\mu \square A^\nu$$

$$\int d^4x (\partial_\nu A_\mu) (\partial^\nu A^\mu) = \int d^4x \partial_\nu (A_\mu \partial^\nu A^\mu) - \int d^4x A_\mu \partial_\nu \partial^\nu A^\mu = - \int d^4x A^\mu \partial_\nu \partial_\mu A^\nu$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu + \partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu) =$$

$$= \frac{1}{2} A^\mu (g_{\mu\nu} \square - \partial_\nu \partial_\mu) A^\nu \quad (\text{eq. 74.1})$$

$$(g_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu) A^\nu = 0 \quad (\text{eq. de Maxwell})$$

Em princípio só precisaríamos inverter este operador, mas aí esbarramos em um problema: imagine uma configuração de campo específica (estamos somando sobre TODAS ELAS):

$$A^\mu(x) = \partial^\mu \alpha(x)$$

$$(g_{\mu\nu} \square - \partial_\nu \partial_\mu) \partial^\mu \alpha = (\square \partial_\nu - \partial_\nu \square) \alpha = 0$$

O operador tem autovalores zero, e portanto é singular. De fato, a integral:

$$\int \mathcal{D}A_\mu \exp \left\{ \frac{i}{2} \int d^4x A_\mu(x) (g^{\mu\nu} \partial^2 - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu(x) \right\}$$

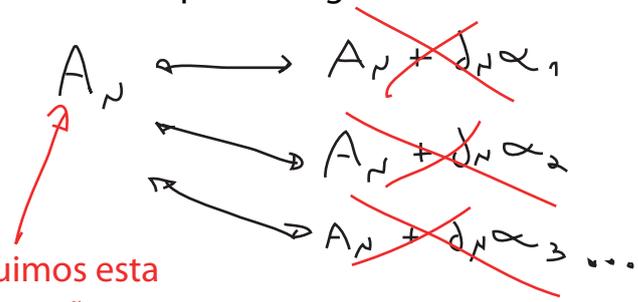
vai receber uma contribuição igual a "1" cada vez que considerarmos uma contribuição deste tipo. É divergente. Podemos ver que esta divergência é transmitida para o que seria a função de Green:

$$(g_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu) D^{\nu\lambda}(x-y) = \delta_\mu^\lambda \delta^4(x-y)$$

(tem que ser realmente grande para satisfazer isto)

$$(0 \cdot \partial_\nu) D^{\nu\lambda}(x-y) = \partial^\lambda \delta^4(x-y)$$

A raiz do problema está na invariância de gauge. Quando somamos sobre diversas configurações de  $A_\mu$ , somamos inclusive aquelas equivalentes (ligadas por uma transformação de gauge) o que é uma forma de "múltipla contagem".



já incluímos esta configuração

não devemos incluir estas

Temos que forçar a nossa integral de trajetória a considerar somente estados inequivalentes por uma transformação de gauge. Uma forma óbvia de fazê-lo é **fixar o gauge**, mas como fazemos isto em uma integral de trajetória?

### Fixação de Gauge em Integrais de Trajetória, método de Fadeev-Popov

Começamos fazendo a rotação de Wick para o espaço Euclideano. É preciso atentar para o fato de que  $A_\mu$  é um vetor de Lorentz e sua componente zero também deve ser rodada:

$$\chi^0 = t = -i \chi_4 = -i \chi^4 \quad \partial_0 = \frac{d}{dx^0} = i \frac{d}{dx^4} = i \partial_4$$

$$\chi_0 = -t = i \chi_4$$

$$A_0 = i A_4 \quad (\text{eq. 75.1})$$

$$E_i^{(m)} = F_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 = i \partial_4 A_i - i \partial_i A_4 = i F_{4i} \equiv i E_i^{(E)} \quad F^{0i} = -i F^{4i} \quad (\text{eq. 75.2})$$

$$\mathcal{L}_{EM}^{(m)} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} F_{0i} F^{0i} - \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} = -\frac{1}{4} F_{4i} F^{4i} - \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(E)} F^{(\mu\nu)}$$

$$\int d^4x \mathcal{L}_{EM}^{(m)} = \int d^4x_E \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(E)} F^{(\mu\nu)} \right) = - \int d^4x_E \underbrace{\left( F_{\mu\nu}^{(E)} \right)^2}_{\mathcal{L}_{EM}^{(E)}}$$

$$\mathcal{L}_{EM}^{(E)} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(E)} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[ \left( E_i^{(E)} \right)^2 + \left( B_i^{(E)} \right)^2 \right] \quad (\text{eq. 75.3})$$

Esquecendo o índice (E) e fazendo uma integração por parte (análogo ao que fizemos para obter 146.1, mas aqui não há termos de borda por definição):

$$S_{EM}[A] = \int d^4x \left[ -\frac{1}{2} A_\mu \left( \delta_{\mu\nu} \partial^2 - \partial_\nu \partial^\mu \right) A_\nu \right]$$

A idéia agora é que em:  $Z = \int \mathcal{D}A_\mu(x) e^{-S_{EM}[A]}$

temos duas "somadas":

- (1) uma desejável, sobre todas as configurações **fisicamente inequivalentes** do campo  $A_\mu$  que criam o comportamento quântico do campo
- (2) uma soma igual a anterior só que com todos as configurações levadas em outras **fisicamente equivalentes** por meio de uma transformação de Gauge, para um parâmetro de Gauge  $\lambda$  específico. Claramente temos uma "cópia" desta para cada escolha de  $\lambda$ , o que acaba virando uma integral em  $\lambda$ .

Se conseguirmos fatorar a integral acima em duas:  $\int \mathcal{D}A_\mu(x) = \int d\lambda \int \mathcal{D}A_\mu^{GF}(x)$

integral para os diversos "Gauges" ←

integral sobre os campos fisicamente relevantes (Gauge-fixados) ←

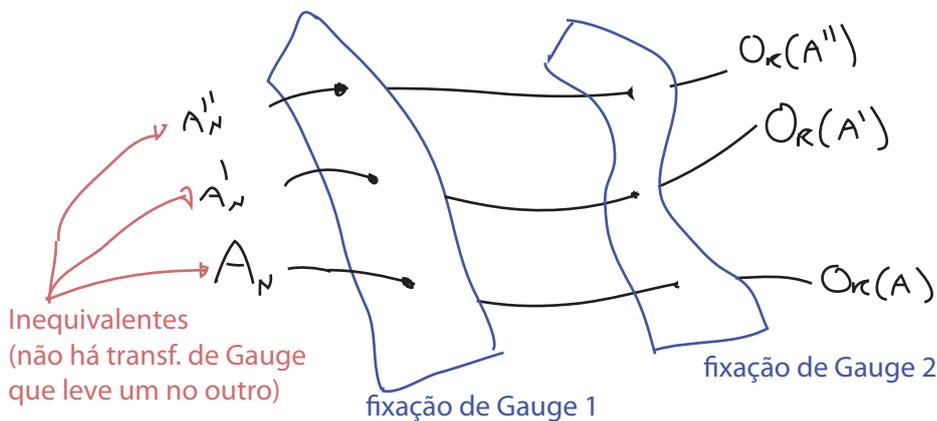
e eliminarmos toda dependência em  $\lambda$  da integral de trajetória, então a integral em  $\lambda$  vira um fator multiplicativo em  $Z$ , completamente irrelevante (é o "volume" do espaço interno definido pelo grupo  $U(1)$ ). Essa é nossa meta nas próximas páginas.

Para começar, consideremos uma fixação de Gauge covariante mais geral do que a de Lorenz:

$$\partial_\mu A_\mu = C(x) \quad (\text{eq. 76.1})$$

Dada uma configuração de campo específica  $A_\mu$ , definamos a **órbita de  $A_\mu$** ,  $Or(A)$ , como o conjunto de todas as outras configurações que podem ser obtidas a partir de  $A_\mu$  por meio de uma transformação de Gauge.

Agora imagine também o espaço de todas as possíveis condições de fixação de Gauge. Se estas são "boas" fixações de Gauge, deve haver apenas um ponto de intersecção entre este espaço e  $Or(A)$  (para cada configuração inequivalente):



Vamos assumir que a intersecção é única, mas existe um problema conhecido em teorias não Abelianas com esta suposição, as chamadas cópias de Gribov (outras intersecções, uma infinidade delas de fato). Não nos preocuparemos com elas pois (1) só aparecem no caso não Abelianas e (2) mesmo nas teorias não Abelianas, só são importantes no regime não perturbativo destas.

Considere então que estamos percorrendo a órbita fazendo a transformação:

$$A_\mu(x) \rightarrow \chi A_\mu(x) \equiv A_\mu(x) + \partial_\mu \chi(x) \quad (\text{eq. 76.2})$$

a forma:

$$\chi^A(x) / \int \mathcal{D}\chi^A(x) \exp(-\partial_\mu A_\mu(x) + C(x)) \quad (\text{eq. 76.3})$$

$$\begin{aligned} \partial^\mu \chi A_\mu &= \partial^\mu A_\mu + \partial^\mu \partial_\mu \chi^A \\ \partial^\mu \chi A_\mu &= C \end{aligned}$$

É a transformação que nos coloca exatamente na intersecção de  $Or(A)$  com a fixação 76.1.

Queremos então provar o seguinte:

$$\int \prod_{x \in \mathbb{R}^4} \mathcal{D}\chi(x) \prod_{y \in \mathbb{R}^4} \mathcal{D} \left( -\partial_\mu (\chi A_\mu(y)) + C(y) \right) = \frac{1}{\text{DET}(-\partial^2)} \quad (\text{eq. 76.4})$$

porque se isso for verdade, teremos encontrado uma identidade:

$$1 = \text{DET}(-\partial^2) \int \prod_{x \in \mathbb{R}^4} d\chi(x) \int \prod_{y \in \mathbb{R}^4} \mathcal{S}[-\partial_\nu A_\nu + c] \quad \leftarrow \text{"}\delta \text{ funcional"} \text{ no sentido em que a derivada de } A \text{ tem que ser } c \text{ para qualquer ponto } y$$

$$1 = \text{DET}(-\partial^2) \int \prod_{x \in \mathbb{R}^4} d\chi(x) \int \prod_{y \in \mathbb{R}^4} \mathcal{S}\left(-\partial_\nu({}^x A_\nu(y)) + c(y)\right) \quad (\text{eq. 77.1})$$

que pode ser inserida dentro da integral de trajetória de  $A$  e impõe, **por meio desta  $\delta$** , a condição 76.1 para qualquer valor de  $\chi$ .

——— // Demonstração // ———

$$-\partial_\nu({}^x A_\nu) + c = -\partial^2 \chi - \partial_\nu A_\nu + c = -\partial^2 \chi + \partial^2 \chi^{(A)}$$

Podemos fazer uma mudança de variáveis na integral em  $\chi$ :  $\chi \rightarrow \chi - \chi^{(A)}$

$$\int \prod_{x \in \mathbb{R}^4} d\chi(x) \int \prod_{y \in \mathbb{R}^4} \mathcal{S}\left[-\partial_\nu({}^x A_\nu(y)) + c(y)\right] = \int \prod_{x \in \mathbb{R}^4} d\chi(x) \int \prod_{y \in \mathbb{R}^4} \mathcal{S}\left[-\partial^2 \chi(y)\right]$$

$G({}^x A_\nu)$

Note que, dado o vínculo:

$$G({}^x A_\nu(y)) \equiv -\partial_\nu({}^x A_\nu(y)) + c(y) = -\partial^2 \chi(y) - \partial_\nu A_\nu(y) + c(y)$$

$$\frac{\delta G({}^x A_\nu(y))}{\delta \chi(x)} = -\partial^2 \delta(x-y) \equiv -\partial^2(x,y)$$

Mostrando que este operador  $-\partial^2(x,y)$  age como elemento de matriz do Jacobiano de uma mudança de variáveis:

$$\chi \rightarrow G({}^x A_\nu)$$

O que é uma versão contínua de:

$$\int \prod_{i=1}^n d\chi_i \int \prod_{j=1}^n \mathcal{S}(\Delta_{ij} \chi_j) = \int d^n \chi \mathcal{S}(\Delta \vec{\chi}) = \int d^n \eta \frac{\mathcal{S}(\vec{\eta})}{\text{DET}(\Delta)} = \frac{1}{\text{DET}(\Delta)}$$

$\vec{\eta} = \Delta \vec{\chi}$   
 $\eta_i = \Delta_{ij} \chi_j \rightarrow d^n \eta = \text{DET}(\Delta) d^n \chi$

Portanto:

$$\int \prod_{x \in \mathbb{R}^4} \delta\chi(x) \prod_{y \in \mathbb{R}^4} \delta[-\partial^2 \chi(y)] = \frac{1}{\mathcal{D}_{ET}(-\partial^2)}$$

que é o que queríamos demonstrar

Podemos então, a partir da identidade 77.1, obter uma outra, integrando sobre as condições de Gauge (com um peso gaussiano):

$$\underbrace{N(\alpha)}_{\text{garante a identidade}} \int \mathcal{D}c \ e^{-\frac{1}{2\alpha} \int d^4x \ c^2(x)} = 1$$

$$N(\alpha) \int \mathcal{D}c \ e^{-\frac{1}{2\alpha} \int d^4x \ c^2(x)} \mathcal{D}_{ET}(-\partial^2) \int \mathcal{D}\chi \ \delta[-\partial_\nu \chi A_\nu + c(y)] = 1$$

$$\int \mathcal{D}\chi \ N(\alpha) \ e^{-\frac{1}{2\alpha} \int d^4x \ (\partial_\nu \chi A_\nu)^2} \mathcal{D}_{ET}(-\partial^2) = 1 \quad (\text{eq. 78.1})$$

Podemos então inserir a identidade 78.1 dentro de qualquer integral de trajetória em A:

$$\int \mathcal{D}A \ e^{-S[A]} \mathcal{O}[A] = \int \mathcal{D}A \ e^{-S[A]} \mathcal{O}[A] \underbrace{\mathcal{D}_{ET}(-\partial^2)}_{\text{independe de A}} \underbrace{\int \mathcal{D}\chi \ N(\alpha) \ e^{-\frac{1}{2\alpha} \int d^4x \ (\partial_\nu \chi A_\nu)^2}}_{\text{independe de A}}$$

Não depende de A. Este passo, aparentemente inofensivo, é onde está uma das grandes diferenças entre teorias abelianas e não abelianas. Para uma teoria não abeliana este  $\mathcal{D}_{ET}[\delta G / \delta \chi]$  vai depender de A e não poderá ser tirado da integral de trajetória. Neste caso seríamos forçados a reescrevê-lo como uma integral de gaussiana, ou seja, mais um termo quadrático seria adicionado a ação. É dessa forma que nascem os fantasmas de Fadeev-Popov (como veremos em breve)

$$\int \mathcal{D}A \ e^{-S[A]} \mathcal{O}[A] = \mathcal{D}_{ET}(-\partial^2) N(\alpha) \int \mathcal{D}\chi \int \mathcal{D}A \ e^{-S[A] - \frac{1}{2\alpha} \int d^4x \ (\partial_\nu \chi A_\nu)^2} \mathcal{O}[A]$$

Fazemos uma mudança de variáveis em A:  $A \rightarrow A - \partial_\mu \chi$   
 $\partial_\mu \chi A_\nu \rightarrow \partial_\mu A_\nu$

Já sabemos que a ação é invariante de Gauge, então:  $S[A] \rightarrow S[A]$

e vamos assumir que  $O[A]$  também tenha esta propriedade (o que é obrigatório para qualquer observável):  $O[A] \rightarrow O[A]$

$$\therefore \int \mathcal{D}A e^{-S[A]} O[A] = \mathcal{D}_{\text{ET}}(-\partial^2) N(\infty) \left( \int \mathcal{D}\chi \right) \int \mathcal{D}A e^{-S[A] - \frac{1}{2\alpha} \int d^4x (\partial_\mu A_\mu)^2} O[A] \quad (\text{eq. 79.1})$$

Não há mais nada dependendo de  $\chi$ , logo esta integral é só um número (infinito).

Esta é de fato a expressão que buscávamos, pois conseguimos fatorar a integração sobre o parâmetro de Gauge. Todas as constantes fora da integral em A são irrelevantes pois qualquer correlator vai ser obtido via:

$$\langle O[A] \rangle = \frac{\int \mathcal{D}A O(A) e^{-S[A]} \uparrow}{\int \mathcal{D}A e^{-S[A]} \uparrow} = \frac{\int \mathcal{D}A O(A) e^{-S_{\text{EFF}}[A]}}{\int \mathcal{D}A e^{-S_{\text{EFF}}[A]}}$$

Onde:

$$S_{\text{EFF}}[A] \equiv \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^2 + \underbrace{\frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A_\mu)^2}_{S_{\text{GF}} \text{ (Gauge Fixing)}} \quad (\text{eq. 79.2})$$

### O propagador do Fóton:

Podemos agora usar a nova Lagrangeana para obter o propagador do fóton. Integrando por partes podemos escrever:

$$\begin{aligned} S_{\text{EFF}} &= \int d^4x \left[ -\frac{1}{2} A_\mu (\delta_{\mu\nu} \partial^2 - \partial_\mu \partial_\nu) A_\nu \right] - \underbrace{\frac{1}{2\alpha} A_\mu \partial_\mu \partial_\nu A_\nu}_{\text{parte nova}} \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x A_\mu(x) \left( -\delta_{\mu\nu} \partial^2 + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \partial_\mu \partial_\nu \right) A_\nu(x) \end{aligned} \quad (\text{eq. 79.3})$$

$(G^{(0)})_{\mu\nu}^{-1}(x)$  (que agora é inversível)

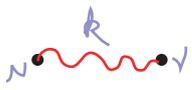
$$S_{\text{EFF}} = \frac{1}{2} \int d^4x \int d^4k A_\mu(k) e^{ikx} \left( -\delta_{\mu\nu} \partial^2 + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \partial_\mu \partial_\nu \right) \int d^4x' A_\nu(x') e^{ik'x} =$$

$$= \frac{1}{2} \int d^4k d^4k' \delta^4(k+k') A_N(k) \left[ +\delta_{\mu\nu} k'^2 - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) k'_\mu k'_\nu \right] A_\nu(k') =$$

$$\mathcal{S}_{\text{EFF}} = \frac{1}{2} \int d^4k A_N(-k) \underbrace{\left[ \delta_{\mu\nu} k^2 - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) k_\mu k_\nu \right]}_{G^{(0)-1}(k)_{\mu\nu}} A_\nu(k) \quad (\text{eq. 80.1})$$

Finalmente:

$$\left[ \delta_{\mu\nu} k^2 - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) k_\mu k_\nu \right] G^{(0)}_{\nu\rho}(k) = \delta_{\nu\rho}$$

$$G^{(0)}_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{k^2} \left( \delta_{\mu\nu} - (1-\alpha) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \quad (\text{Moment., Euclid.})$$


(eq. 80.2)

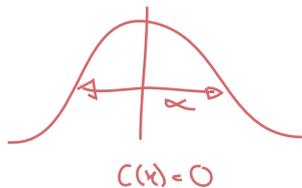
De onde vemos que o propagador de um bóson de Gauge depende deste parâmetro  $\alpha$  (que está ligado a escolha de de Gauge). No chamado "Gauge" de Feynman  $\alpha = 1$  e:

$$G^{(0)}_{\mu\nu}(k; \alpha=1) = \frac{1}{k^2} \delta_{\mu\nu} \quad (\text{Moment., Euclid., Gauge de Feynman})$$

(eq. 80.3)

fixamos o Gauge e depois integramos sobre todas as fixações possíveis com a seguinte distribuição:

$$e^{-\frac{1}{2\alpha} \int d^4x C^2(x)}$$



## Quantização de Teorias não-Abelianas

(Ryder 7.1-7.2, Peskin 16.1-16.2)

Queremos agora quantizar a teoria obtida para um campo de gauge não-abeliano:

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2$$

Assim como no caso Abeliano, temos um problema com a soma sobre configurações equivalentes. Agora as configurações equivalentes estão ligadas por:

$$A_\mu^M = A_\mu^a t^a \iff A_\mu^{M\chi} \equiv (A_\mu^a)^\chi t^a = e^{i\chi^a t^a} \left[ A_\mu^a t^a + \frac{i}{g} \mathcal{D}_\mu \right] e^{-i\chi^a t^a}$$

Podemos definir uma identidade idêntica à 76.4:

$$1 = \int \mathcal{D}\chi \, \delta(G(A_\mu^{\chi})) \, \text{DET} \left[ \frac{\delta G(A_\mu^{\chi})}{\delta \chi} \right] \quad (\text{eq. 81.1})$$

$\swarrow$  Vínculo:  $G(A_\mu^{\chi}) = 0$ 
 $\searrow$  Para o vínculo que lá usamos (pg 77):

$$\text{DET} \left[ \frac{\delta G(A_\mu^{\chi})}{\delta \chi} \right] = \text{DET} [-\delta^2]$$

Não precisamos fixar o vínculo, apenas assumir que ele é linear em  $\chi$ :

$$\text{DET} \left[ \frac{\delta G(A_\mu^{\chi})}{\delta \chi} \right] = \text{DET} \left[ \frac{\delta G(A_\mu)}{\delta \chi} \right] \equiv \Delta_G[A_\mu] = \Delta_G[A_\mu^{\chi}]$$

$\uparrow$  não dep. de  $\chi$ 
(invariante de gauge) (eq. 81.2)

e podemos tirar o determinante da integral em 81.1:

$$\Delta_G^{-1}[A_\mu] = \int \mathcal{D}\chi \, \delta(G(A_\mu^{\chi})) \quad (\text{eq. 81.3}) \quad (\text{compare com 76.4})$$

Inserindo a identidade 81.1 na integral do funcional gerador, temos:

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}A_\mu^M \, e^{i \int d^4x \, \mathcal{L}_{YM}} \int \mathcal{D}\chi \, \delta(G(A_\mu^{\chi})) \, \Delta_G[A_\mu^{\chi}] = \\ & \quad \uparrow \quad \searrow \\ & \quad \mathcal{L}_{YM}(A_\mu^M) = \mathcal{L}_{YM}(A_\mu^{\chi}) \equiv \mathcal{L}_{YM}^{\chi} \quad (\text{invariante de gauge}) \\ & \quad \text{note que estamos em Minkowski} \\ &= \int \mathcal{D}\chi \int \mathcal{D}A_\mu^M \, e^{i \int d^4x \, \mathcal{L}_{YM}^{\chi}} \, \delta(G(A_\mu^{\chi})) \, \Delta_G[A_\mu^{\chi}] \end{aligned}$$

Podemos então fazer uma mudança de variáveis em A, que é a transformação de gauge que leva

$$A_\mu^{\chi} \rightarrow A_\mu^M$$

A medida de integração não muda, a final de contas a transformação de A não passa de uma translação seguida por uma rotação (unitária) do vetor  $A^a$ , então:

$$Z = \left( \int \mathcal{D}\chi \right) \int \mathcal{D}A_\mu^M \, e^{i \int d^4x \, \mathcal{L}_{YM}} \, \delta(G(A_\mu^M)) \, \Delta_G[A_\mu^M]$$

Nada na integral em A depende de  $\chi$ , isto não passa de um infinito multiplicativo.

É aqui que surge a diferença entre os casos abeliano e não-abeliano. No caso abeliano, para uma fixação de gauge genérica:

$$G(A_\mu) = \partial^\mu A_\mu(x) - w(x) \Rightarrow G(A_\mu^x) = \partial^\mu A_\mu + \partial^\mu x - w$$

$$\Delta_G[A_\mu^x] = \frac{\delta G}{\delta x} = \frac{\delta}{\delta x}(\partial^\mu x)$$

$\Delta_G[A_\mu]$  também independe de A e pode ser tirado da integral e ignorado (outro fator multiplicativo)

Agora temos:

$$G(A_\mu^x) = \partial^\mu A_\mu^x(x) - w(x) \Rightarrow G(A_\mu^x) = \partial^\mu \left( A_\mu^a + \frac{1}{g} \partial_\mu x^a + f^{abc} A_\mu^b x^c \right) - w^a(x)$$

$$\Delta_G[A_\mu^x] = \frac{\delta G}{\delta x^a} = \frac{\delta}{\delta x^a} \left( \frac{1}{g} \partial^\mu \partial_\mu x^a + \partial^\mu f^{abc} A_\mu^b x^c \right) = \frac{1}{g} \partial^\mu D_\mu^{ac}$$

Agora  $\Delta_G[A_\mu^x]$  depende de A

$$(A_\mu^x)^a = A_\mu^a + \frac{1}{g} \partial_\mu x^a + f^{abc} A_\mu^b x^c = A_\mu^a + \frac{1}{g} \left( \delta^{ac} \partial_\mu + g f^{abc} A_\mu^b \right) x^c \equiv A_\mu^a + \frac{1}{g} D_\mu^{ac} x^c$$

$\frac{\delta G(A_\mu^x)}{\delta x^a}$  é uma matriz quadrada (índices a e b) de dimensão  $N^2-1$  (a,b são índices que numeram os geradores do grupo e estamos pensando em SU(N))

Podemos escrever o determinante como uma integral funcional de funções de números de Grassmann:

$$\text{DET } M = \int D\bar{c} Dc \exp \left\{ \int d^4x \bar{c}_a M_{ab} c_b \right\}$$

matriz nxn

campo de números de Grassmann. Multipleteo com n componentes, no caso em questão isso significa campos se transformando na rep. adjunta de SU(N)

Finalmente:

$$\Delta_G[A_\mu^x] = \text{DET} \left[ \frac{\delta G(A_\mu^x)}{\delta x} \right] = \int D\bar{c} Dc \exp \left[ \int d^4x \bar{c}_a \left( -\partial^\mu D_\mu^{ac} \right) c_c \right]$$

fatores g e -i incluídos na definição de c

$C$  {  
 Adjunta de SU(N)  
 Anti-comutam (estatística de férmions)  
 Escalares de Lorentz (spin 0)  
 Relação spin-estatística errada!  
 Fantasmas (Ghosts) de Faddeev-Popov

$$\mathcal{L}_{\text{FPG}} \equiv \bar{c}_a (-D^\mu D^\mu) c_c = \bar{c}_a (-\partial^\mu \partial^\mu - g f^{abc} D^\mu A_\mu^b) c_c =$$

$$= -\bar{c}_a \square c_a - g f^{abc} \bar{c}_a D^\mu (A_\mu^b c_c) \quad (\text{eq. 83.1})$$

Termo cinético:  $D^\mu \bar{c}_a D^\mu c_c$

$$\langle C^a(x) \bar{C}^b(y) \rangle = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2} \delta^{ab} e^{-ik(x-y)}$$

Interação Ghost-Gauge

$$g f^{abc} (D^\mu \bar{c}_a) A_\mu^b c_c$$

$$\equiv \frac{\delta^{ab}}{p^2} \quad (\text{eq. 83.2})$$

(Espaço dos momentos, Mink)

$$\equiv g f^{abc} p^\mu$$

(eq. 83.3)  
(Espaço dos momentos, Mink)

Acoplamento de gauge

Com isso em mente, temos:

$$Z[J] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A_\mu^a \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{YM}} + \mathcal{L}_{\text{FPG}}} \delta(G(A_\mu^a))$$

Esta  $\delta$  é tratada da mesma forma que o caso abeliano, e temos para uma fixação genérica:

$$\delta(G(A_\mu^a)) = \delta(D^\mu A_\mu^a - w)$$

Basta multiplicar Z pela identidade  $N(\xi) \int \mathcal{D}w e^{-i \int d^4x \frac{1}{2\xi} w^2} = 1$

Escolhido de forma a garantir a ident.

E fazer a integral em  $\omega$  usando a delta:

$$Z[\bar{J}] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\hat{A}_\mu \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_{FPG}} \quad \text{EXP} \left[ i \int d^4x \left( - \frac{(\partial^\mu A_\mu)^2}{2\xi} \right) \right]$$

↳ Absorve as normalizações

 $\mathcal{L}_{GF}$   
 (Gauge Fixing)

Atenção! No trecho que segue (e com frequência cada vez maior daqui para frente) siga a convenção mais usual:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Podemos inclusive incluir os férmions para a lagrangeana final:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu^a)^2 + \bar{\Psi} (i \not{D} - m) \Psi + \bar{c}_a (-\partial^\nu D_\nu^{ac}) c_c \quad (\text{eq. 84.1})$$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

$$D = \not{\partial} ( \partial_\mu - i g A_\mu^a t^a )$$

$$D_\nu^{ac} = ( \delta^{ac} \partial_\nu + g f^{abc} A_\nu^b )$$

Lembrando que ainda restam índices escondidos nos férmions:

$$\bar{\Psi} \not{D} \Psi \rightarrow \bar{\Psi} \not{\partial} t^a \Psi = \bar{\Psi}_{iA} \not{\partial}_{ij} t^a_{AB} \Psi_{jB}$$

↳ Índices spinoriais

↳ Índices da representação em que os férmions se transformam (neste caso a fundamental de SU(N) (A,B = 1... N))

Depende da rep. em que os  $\psi$  se transformam (esta forma é para a fundamental)

As regras de Feynman da parte fermiônica não mudam muito, basta lembrar que temos um número de férmions igual à dimensão da representação do grupo. O propagador só muda para incluir o índice da simetria interna:

$$\langle \Psi_{iA}(x) \bar{\Psi}_{jB}(y) \rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left( \frac{i}{\not{k} - m} \right)_{ij} \delta_{AB} e^{-ik(x-y)}$$

$$A \xrightarrow{P} B = \frac{i (\not{P} + m) \delta_{AB}}{P^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (\text{eq. 84.2})$$

$$A \xrightarrow{P} B = -i \frac{(-i \not{P} + m) \delta_{AB}}{P^2 + m^2 - i\epsilon}$$

(Espaço dos momentos, Mink.,  $g_{\mu\nu} = \text{Diag}\{1, -1, -1, -1\}$ )

(Espaço dos momentos, Mink.,  $g_{\mu\nu} = \text{Diag}\{-1, 1, 1, 1\}$ )

Uma vez fixado o Gauge, podemos obter o propagador para os bósons de Gauge a partir dos termos:

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) (\partial^\mu A^{\alpha\nu} - \partial^\nu A^{\alpha\mu})} \\
 & \int d^4x \left[ \frac{1}{2} A^{\alpha\mu} (g_{\mu\nu} \square - \partial_\nu \partial_\mu) A^{\alpha\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^{\alpha\mu})^2 \right] = \\
 & = \int d^4x \left[ \frac{1}{2} A^{\alpha\mu} (g_{\mu\nu} \square - \partial_\nu \partial_\mu) A^{\alpha\nu} + \frac{1}{2\xi} A^{\alpha\mu} (\partial_\mu \partial_\nu) A^{\alpha\nu} \right] \\
 & = \int d^4x \frac{1}{2} A^{\alpha\mu} \left[ g_{\mu\nu} \square + \left( \frac{1}{\xi} - 1 \right) \partial_\mu \partial_\nu \right] A^{\alpha\nu} = \text{temos que inverter este operador} \\
 & = \int d^4x \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \tilde{A}^{\alpha\mu}(k_1) e^{-ik_1x} \left[ g_{\mu\nu} \square + \left( \frac{1}{\xi} - 1 \right) \partial_\mu \partial_\nu \right] \tilde{A}^{\alpha\nu}(k_2) e^{-ik_2x} = \\
 & = \int d^4k \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \tilde{A}^{\alpha\mu}(k_1) e^{-ik_1x} \left[ -g_{\mu\nu} k_2^2 - \left( \frac{1}{\xi} - 1 \right) k_{2\mu} k_{2\nu} \right] \tilde{A}^{\alpha\nu}(k_2) e^{-ik_2x} = \\
 & = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \tilde{A}^{\alpha\mu}(k) \delta_{ab} \left[ \left( 1 - \frac{1}{\xi} \right) k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu} k^2 \right] \tilde{A}^{\alpha\nu}(-k)
 \end{aligned}$$

Este operador tem inverso e podemos mostrar que este é:

$$\tilde{D}(k)_{\mu\nu}^{ab} = \frac{-i}{k^2 - i\epsilon} \left[ g_{\mu\nu} + \left( \xi - 1 \right) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 - i\epsilon} \right] \delta_{ab} \iff \begin{matrix} a & & b \\ \swarrow & \text{---} & \searrow \\ \mu & \text{---} & \nu \end{matrix} \quad (\text{eq. 85.1})$$

(Mink., Momento)

Notando que temos N<sup>2</sup>-1 propagadores idênticos.

A interação dos férmions vem de (assumindo que se transformem na rep. fundamental):

$$\bar{\Psi}(i \not{D} - m)\Psi \Rightarrow \gamma \bar{\Psi}_A \gamma^\mu A_\mu^a t_{AB}^a \Psi_B$$

$$= ig \gamma^\mu t_{AB}^a$$

(eq. 85.2)

(Mink., Momento)

Temos ainda alguns termos provenientes de  $-\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2$ :



A introdução dos Ghosts de Fadeev-Popov pode ser incômoda, mas não leva a nenhum resultado observável que contrarie o estabelecido experimentalmente. Em especial, não introduz nenhum grau de liberdade adicional na teoria (que continua sendo uma teoria de bósons de gauge, férmions e escalares, conforme o caso), e portanto não há escalar com a estatística errada. Não faremos isto em detalhes, mas é possível mostrar que:

polarizações longitudinais dos bósons de Gauge

o que nos indica que os Ghosts agem como graus de liberdade “negativos” e sua única função é cancelar as polarizações não físicas dos bósons de Gauge.

Este cancelamento nos loops deve estar ligado ao mesmo tipo de cancelamento nas pernas externas, fazendo com que não seja possível observar nem Ghosts nem bósons de gauge com a polarização indesejada. É possível usar as transformações BRST para definir os estados físicos da teoria e então mostrar que estes estados (que incluem apenas as polarizações transversais dos bósons de Gauge) nunca são levados nos estados não físicos (Ghosts e Bósons Longitudinais) pela evolução temporal do sistema. Para mais detalhes veja as notas do curso de campo de 2013, pgs 153 a 165 em

[http://www.ift.unesp.br/users/matheus/files/courses/2013tqc2/tudo\\_TQC2.pdf](http://www.ift.unesp.br/users/matheus/files/courses/2013tqc2/tudo_TQC2.pdf)



## Correções Radiativas

(Peskin 7.1, S. Weinberg QTF - Vol1 - 10.7)

Vamos agora olhar mais profundamente o que acontece com as funções de Green da teoria quando "ligamos" a interação. Começemos com o seguinte objeto:

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | \Omega \rangle$$

estado fundamental (vácuo) da teoria interagente

Como interpretamos este objeto? Tomemos auto-estados de  $\hat{H}$  e  $\hat{\vec{P}}$ :

$|\lambda_p\rangle$

Lagrangiana completa

podem ter uma ou mais partículas

Notem que estamos assumindo que  $\hat{H}$  e  $\hat{\vec{P}}$  comutam. Isto só é verdade porque se tratam de estados livres (a interação corrige o propagador por meio de loops) ou estados representando um conjunto de partículas (ligadas ou não) que tratamos como um único corpo (a energia de ligação já está incluída na massa do estado composto, que por sua vez é livre). Não estamos falando agora de espalhamentos.

Definamos:  $|\lambda_0\rangle \rightarrow \hat{\vec{P}} |\lambda_0\rangle = 0$

$\lambda$  carrega todos os outros números quânticos dos possíveis estados

estado de momento zero

$\hat{H} |\lambda_0\rangle = E_0(\lambda) |\lambda_0\rangle$

$$|\lambda_0\rangle \xrightarrow{\text{Boost } \vec{P}} |\lambda_p\rangle$$

A invariância de Lorentz de  $\hat{H}$  me diz que  $|\lambda_p\rangle$  também é auto-estado de  $\hat{H}$

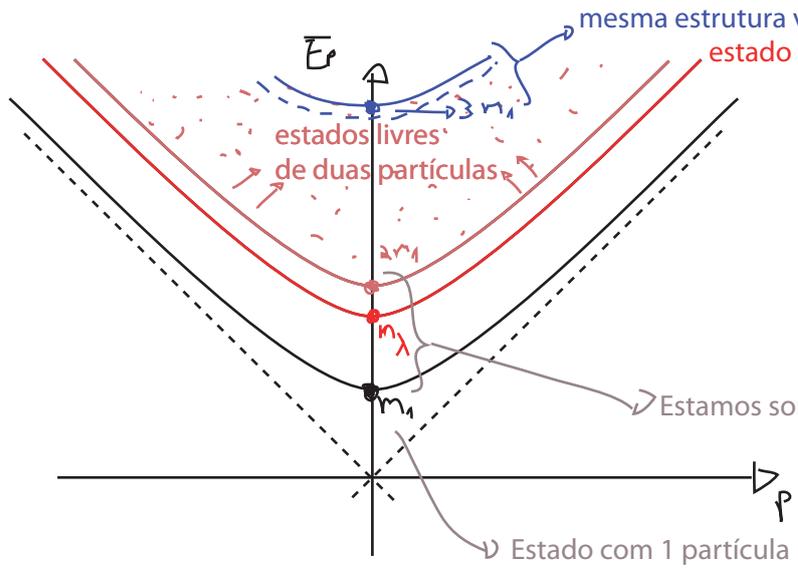
$$\hat{H} |\lambda_p\rangle = E_p(\lambda) |\lambda_p\rangle$$

$$E_p(\lambda) \equiv \sqrt{|\vec{p}|^2 + m_\lambda^2}$$

Estou definindo como "massa", a energia do estado em seu referencial de repouso (o que faz todo sentido para estados de 1 partícula ou mesmo estados ligados)

Qualquer autovalor de  $H$  pode ser escrito como um boost de um outro autovalor com momento zero.

Autovalores de  $\hat{P}^\mu = (\hat{H}, \hat{\vec{P}})$ :



$$\hat{1} = |\Omega\rangle\langle\Omega| + \sum_{\lambda} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p(\lambda)} |\lambda_p\rangle\langle\lambda_p|$$

Estamos somando sobre estes pontos e integrando sobre as curvas

$$x^0 > y^0$$

$$\langle\Omega|T\{\phi(x)\phi(y)\}|\Omega\rangle = \langle\Omega|\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle =$$

$$= \underbrace{\langle\Omega|\phi(x)|\Omega\rangle}_{0} \langle\Omega|\phi(y)|\Omega\rangle + \sum_{\lambda} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p(\lambda)} \langle\Omega|\phi(x)|\lambda_p\rangle \langle\lambda_p|\phi(y)|\Omega\rangle$$

$$\langle\Omega|\phi(x)|\lambda_p\rangle = \langle\Omega| e^{i\hat{P}x} \underbrace{\phi(0)}_{\text{translação}} e^{-i\hat{P}x} |\lambda_p\rangle = \langle\Omega|\phi(0)|\lambda_p\rangle e^{-iPx}$$

$P^0 = E_p$

$$= \langle\Omega|U^{-1}U\phi(0)U^{-1}U|\lambda_p\rangle e^{-iPx} = \langle\Omega|\phi(0)|\lambda_0\rangle e^{-iPx}$$

$P^0 = E_p$        $P^0 = E_p$

boost de  $\vec{p}$  para 0  
 $U|\lambda_p\rangle = |\lambda_0\rangle$

$$U\phi(0)U^{-1} = \phi(0) \quad \langle\Omega|U^{-1} = \langle\Omega|$$

↳ para campos de spin maior teríamos que ter mais cuidado aqui (vai para a lista)

$$\langle \Omega | \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p(\lambda)} |\langle \Omega | \phi(\omega) | \lambda_0 \rangle|^2 e^{+i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} e^{-iE_p(x-y_0)} =$$

$$\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{e^{+i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} e^{-iE_p(x-y_0)}}{2E_p(\lambda)} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-i p(x-y)}$$

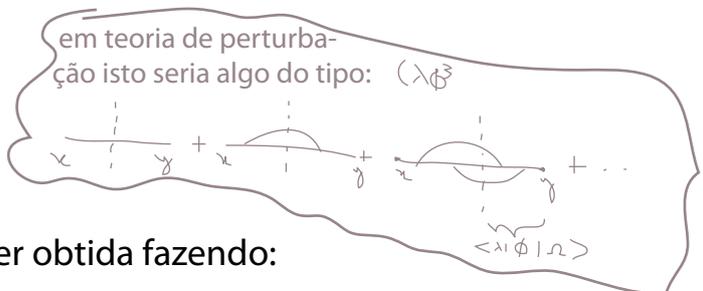
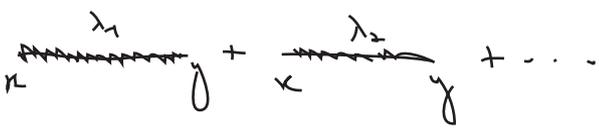
$$D_F(k, m) = \frac{i}{p^2 - m^2}$$

$$= \sum_{\lambda} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m_{\lambda}^2 + i\epsilon} e^{-i p(x-y)} |\langle \Omega | \phi(\omega) | \lambda_0 \rangle|^2$$

Poderíamos fazer o mesmo para o caso  $y_0 > x_0$  e obter:

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | \Omega \rangle = \sum_{\lambda} |\langle \Omega | \phi(\omega) | \lambda_0 \rangle|^2 D_F(x-y, m_{\lambda}^2)$$

Note que obtemos o propagador de Feynman com a massa substituída por  $m_{\lambda}$ . Para cada estado  $\lambda$  contribuindo para a função de 2 pontos temos também um "peso" dado pela amplitude de criação daquele estado a partir do vácuo.



Uma forma útil de escrever esta soma pode ser obtida fazendo:

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | \Omega \rangle = \int_0^{\infty} \frac{dM^2}{2\pi} \sum_{\lambda} (2\pi) \delta(M^2 - m_{\lambda}^2) |\langle \Omega | \phi(\omega) | \lambda_0 \rangle|^2 D_F(x-y, M^2) =$$

$$\rho(M^2) = \sum_{\lambda} (2\pi) \delta(M^2 - m_{\lambda}^2) |\langle \Omega | \phi(\omega) | \lambda_0 \rangle|^2$$

Densidade espectral

$$= \int_0^{\infty} \frac{dM^2}{2\pi} \rho(M^2) D_F(x-y, M^2)$$

(representação espectral de Källén-Lehmann)

É importante notar que, para um estado intermediário de uma partícula:

$$\kappa \xrightarrow{\phi} \eta$$

teremos  $m_\lambda = m$ , onde  $m$  é o autovalor de energia (para a Hamiltoniana interagente) no referencial de repouso da partícula. Esse estado contribui com uma função  $\delta(M^2 - m^2)$  para a densidade espectral

$$\rho(M^2) = 2\pi \delta(M^2 - m^2) \cdot \underbrace{Z}_{|\langle \Omega | \phi(0) | 1_0 \rangle|^2} + \underbrace{\sigma(M^2)}_{\text{contribuições de estados de 2 ou mais partículas.}}$$

↑ estado de 1 partícula com momento zero

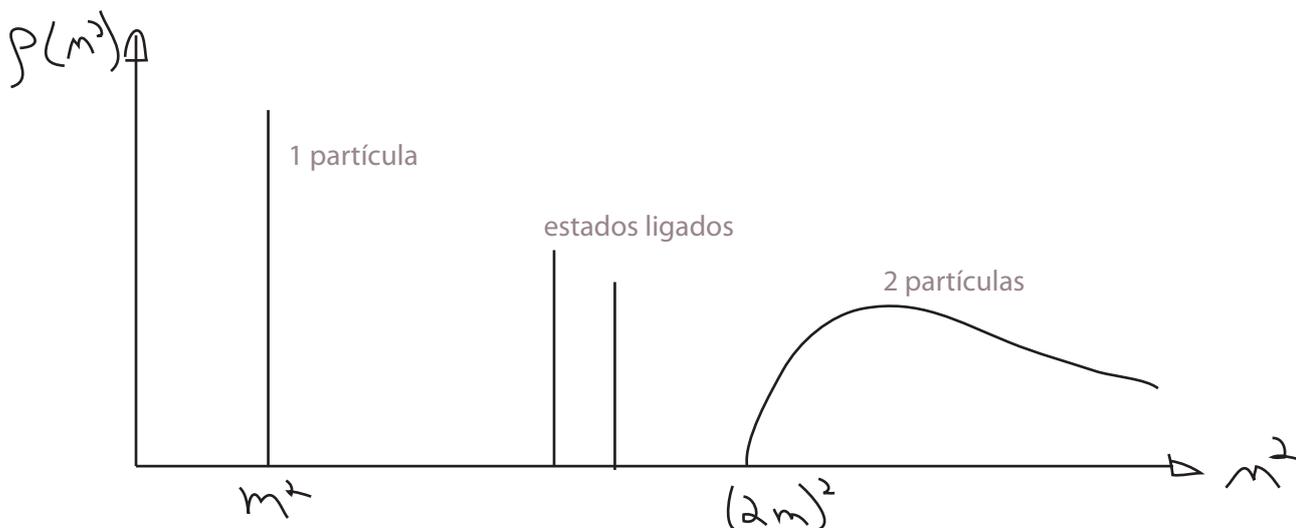
$Z \rightarrow$  Field Strength Renormalization

Esta massa "m" é a massa observável da partícula interagente e vai, em geral, diferir daquela que aparece na lagrangeana, que chamaremos de  $m_0$

$m \rightarrow$  Massa física

$m_0 \rightarrow$  Massa nua (bare mass)

Em relação às contribuições de mais partículas,  $\sigma(M^2)$ , temos essencialmente duas possibilidades: a partir da energia em que podemos produzir duas ou mais partículas reais "livres" temos um espectro contínuo da massa  $m_\lambda$ . Mas abaixo desta energia podemos, dependendo da interação específica, ter estados ligados de duas ou mais partículas. Neste caso teremos polos adicionais em massas entre  $m$  e  $2m$ . Isto nos leva a uma forma tipicamente do tipo:

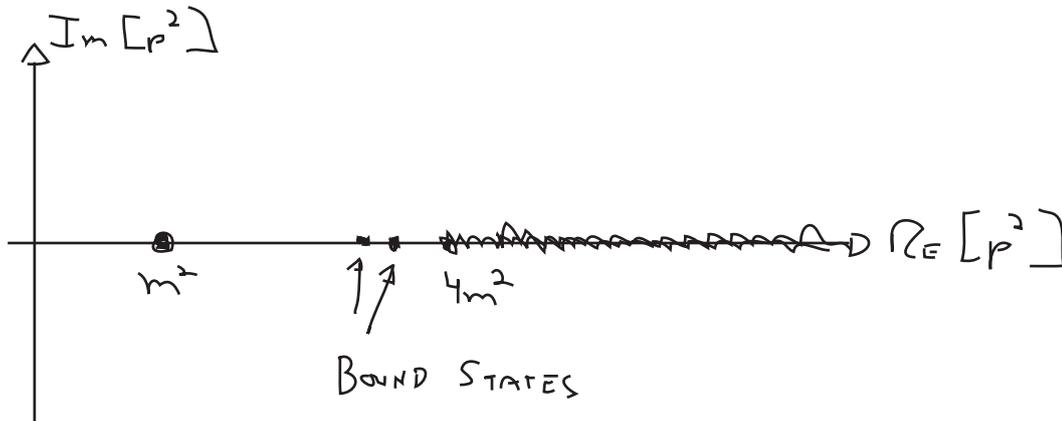


Passando para o espaço dos momentos:

$$\int d^4x e^{iPx} \langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(0) \} | \Omega \rangle = \int_0^\infty \frac{dM^2}{2\pi} \rho(M^2) \frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon}$$

$$= \frac{i Z}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + (\text{BOUND STATES}) + \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dM^2 \sigma(M^2)}{2\pi} \frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon}$$

Que tem a seguinte estrutura analítica no plano complexo:



Comparemos este resultado com o caso de um campo livre:

$$\int d^4x e^{iPx} \langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(0) \} | 0 \rangle = \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon}$$

Os dois são semelhantes e fica claro que temos que levar  $Z$  para 1 quando “desligamos” a interação. De fato, é possível mostrar que (veja Weinberg, 10.7):

$$\int_0^{\infty} \rho(M^2) dM^2 = 1$$

&

$$1 = Z + \int_0^{\infty} \sigma(M^2) dM^2$$

O que também nos garante que a contribuição de estados de muitas partículas desaparece na teoria livre.

PS: no caso de espinores de Dirac, o mesmo raciocínio nos levaria a:

$$\int d^4x e^{iPx} \langle \Omega | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(0) \} | \Omega \rangle = \frac{i Z_2 \sum_s \psi^s(p) \bar{\psi}^s(p)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \dots = \frac{i Z_2 (\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \dots$$

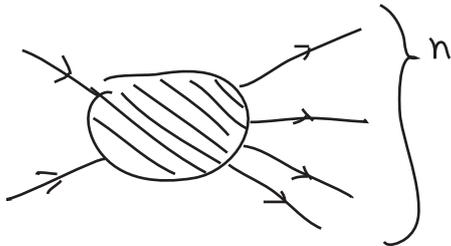
$$\langle \Omega | \psi(0) | p, s \rangle = \sqrt{Z_2} \psi^s(p)$$

PS2: obter de fato a forma da densidade espectral é uma tarefa árdua por se tratar de um cálculo não-perturbativo. Um método envolve a utilização de relações de dispersão. Quem estiver interessado pode ler: Weinberg, sec 10.8 ou Peskin, sec 18.4

### A matriz S e a fórmula de redução LSZ (Lehmann, Symanzik, Zimmerman)

(Peskin 7.2, Ryder 6.8 e 7.3)

Vamos ver o que acontece quando generalizamos estas idéias para correlatores maiores



$$\Rightarrow \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle$$

Vamos escolher um dos pontos acima (que chamaremos de  $x$ ) e fazer a transformada de Fourier nele:

$$\int d^4x e^{iPx} \langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

$$\int d^4x = \underbrace{\int_{T_+}^{\infty} dx^0}_{\text{I}} + \underbrace{\int_{T_-}^{T_+} dx^0}_{\text{II}} + \underbrace{\int_{-\infty}^{T_-} dx^0}_{\text{III}}$$

$$T_+ > \forall z_i^0 > T_-$$

Na região I o tempo  $x^0$  é maior que os outros, portanto:

$$\int_{T_+}^{\infty} dx^0 \int d^3k e^{iP^0 x^0} e^{-i\vec{P} \cdot \vec{x}} \langle \Omega | \phi(x) T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle =$$

$$\sum_{\lambda} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{k}}(\lambda)} \langle \Omega | \phi(x) | \lambda_{\vec{k}} \rangle \langle \lambda_{\vec{k}} | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

$$\langle \Omega | \phi(x) | \lambda_k \rangle = \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle e^{-i k x} \quad \left. \begin{array}{l} \text{v. pag 89} \\ k^0 = E_k(\lambda) \end{array} \right\}$$

$$= \sum_{\lambda} \int_{T_+}^{\infty} d^4 x^0 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \underbrace{\int d^3 x e^{+i \vec{k} \vec{x}} e^{-i \vec{p} \cdot \vec{x}}}_{(2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{p})} \frac{1}{2E_p(\lambda)} e^{i p^0 x_0} e^{-i E_k x^0} \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle \times \langle \lambda_k | T \{ \phi(z_1), \dots, \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle =$$

$$= \sum_{\lambda} \int_{T_+}^{\infty} d^4 x^0 \frac{1}{2E_p(\lambda)} e^{-i(E_p - p^0)x_0 - \epsilon x^0} \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle \times \langle \lambda_p | T \{ \phi(z_1), \dots, \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle =$$

Para garantir convergência

$$= \sum_{\lambda} \frac{1}{2E_p(\lambda)} \frac{i e^{-i(E_p - p^0)T_+ - \epsilon T_+}}{[p^0 - E_p(\lambda) + i\epsilon]} \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle \langle \lambda_p | T \{ \phi(z_1), \dots, \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

será suprimido no que segue, já que próximo ao polo é igual a 1

Esta é uma função de  $p_0$  com singularidades em todos os pontos  $E_p(\lambda)$ . Se estas singularidades são polos isolados ou cortes vai depender da teoria específica. Vamos nos interessar com o que ocorre próximo ao polo, que equivale a uma partícula de massa (física)  $m$ .

$$p^2 - m^2 = p_0^2 - |\vec{p}|^2 - m^2 = p_0^2 - \underbrace{(|\vec{p}|^2 + m^2)}_{E_p^2} = (p_0 + E_p)(p_0 - E_p)$$

$$\lim_{p_0 \rightarrow +E_p} p^2 - m^2 = 2E_p(p_0 - E_p)$$

$$\int d^4 x e^{i p x} \langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

$$\underbrace{\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}}_{p_0 \rightarrow E_p} \sqrt{z} \langle \vec{p} | T \{ \phi(z_1), \dots, \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

estado de 1 partícula com momento  $\vec{p}$

$\langle \Omega | \phi_0 | \Omega \rangle$  estado de 1 partícula com momento zero

este símbolo quer dizer "tem polos iguais a" (estamos desprezando os termos finitos)

Se fizermos o mesmo para a região III, veremos que

$$\int d^4x e^{iP \cdot x} \langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

$$\underbrace{P_0 \rightarrow -E_P}_{\substack{P_0 \rightarrow -E_P \\ p^2 - m^2 + i\epsilon}} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \sqrt{Z} \langle \Omega | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | -\vec{p} \rangle$$

A região II não possui polos em  $P_0 \rightarrow E_P$  ou  $P_0 \rightarrow -E_P$  se tentássemos o mesmo procedimento chegaríamos a algo na forma:

$$\int d^3k \frac{i}{P_0 - E_{k+p} + E_k}$$

Gostaríamos de continuar fazendo isso para todos os outros campos dentro do produto temporalmente ordenado, mas temos que ter cuidado com o isolamento das partículas externas. A forma de fazer isso é voltar na página 6 e, ao invés da transformada de Fourier, usamos um pacote de onda estreito:

$$\int d^4x e^{iP^0 x_0} e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \longrightarrow \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int d^4x e^{iP^0 x_0} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \psi(\vec{k})$$

$\psi(\vec{k})$ : distribuição estreita centrada em  $\vec{p}$  (voltamos a transformada de Fourier se fizemos esta distribuição virar uma delta de Dirac)

Esta pequena indeterminação no momento da partícula associada faz com que ela fique com a posição contida em uma região do tamanho deste pacote. Retraçando todo o raciocínio acima teremos agora:

$$\sum_{\lambda} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \psi(\vec{k}) \frac{1}{2E_k(\lambda)} \frac{i}{p^0 - E_k(\lambda) + i\epsilon} \langle \Omega | \phi(x) | \lambda_0 \rangle \langle \lambda_k | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

$$\underbrace{\sim}_{P^0 \rightarrow E_P} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{i \psi(\vec{k})}{\tilde{p}^2 - m^2 + i\epsilon} \sqrt{Z} \langle \vec{k} | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

$$\tilde{p} = (P_0, \vec{k})$$

Na prática agora o polo "anda" conforme variamos  $\vec{k}$ , ou seja, o polo de uma partícula virou um pequeno corte cujo comprimento é a largura de  $\psi(\vec{k})$ . A volta ao caso anterior é bem definida conforme estreitamos  $\psi(\vec{k})$  até que vire uma delta e o corte volta a ser um polo.

Se fizermos o mesmo para todos os pontos na função de  $n+2$  pontos da página 93, obteremos:

$$\int \prod_{i=1}^{n+2} \left( \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3} d^4 x_i e^{i \tilde{P}_i x_i} \varphi_i(\vec{k}_i) \right) \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle$$

De novo temos três regiões:



Se tomarmos os tempos que dividem as regiões suficientemente grandes (para o passado ou futuro) podemos assumir que nestas regiões já não há mais sobreposição alguma dos pacotes e dividir cada uma das integrais anteriores em três regiões, assim como fizemos antes. Mais uma vez, não precisamos nos preocupar com a região II, pois as integrais nessa região resultam em funções analíticas. Pensemos nas regiões I e III, e no caso em que só "empacotamos" dois campos:

$$x_1^0, x_2^0 \in \text{I}$$

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle = \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} T \{ \phi(x_3) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle$$

$$\sum_{\lambda} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} \int \prod_{i=1,2} \left( \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3} d^4 x_i e^{i \tilde{P}_i x_i} \varphi_i(\vec{k}_i) \right)$$

$$\times \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} | \lambda_k \rangle \langle \lambda_k | T \{ \phi(x_3) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle$$

É aqui os pacotes de onda se tornam importantes. Como este estado tem que ser aniquilado por campos que sofrem a restrição de só serem diferentes de zero em locais isolados do espaço ele tem que ser composto de duas excitações distintas e isoladas espacialmente. Neste caso podemos fazer a aproximação:

$$\sum_{\lambda} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} | \lambda_k \rangle \langle \lambda_k | \Omega \rangle =$$

$$= \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{k_1}} \int \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{k_2}} \langle \Omega | \phi(x_1) | \lambda_{k_1} \rangle \langle \Omega | \phi(x_2) | \lambda_{k_2} \rangle \langle \lambda_{k_1} \lambda_{k_2} | \Omega \rangle$$



\* se pudermos inverter a ordem das duas operações indicadas, fica bem fácil obter os elementos da matriz S. Na prática esquecemos todo o caminho que envolve os pacotes e calculamos o correlator da teoria interagente no espaço dos momentos:

$$\prod_{i=1}^n \int d^4x_i e^{i p_i x_i} \prod_{j=1}^m \int d^4y_j e^{-i k_j y_j} \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \phi(y_1) \dots \phi(y_m) \} | \Omega \rangle$$

$$\sim \left( \prod_{i=1}^n \frac{\sqrt{Z}^i}{p_i^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \left( \prod_{j=1}^m \frac{\sqrt{Z}^i}{k_j^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n | S | \vec{k}_1 \dots \vec{k}_m \rangle$$

(eq. 98.1)

ai basta olhar a função resultante na região em que todas as partículas externas estão "on-shell", perto de seus polos. O coeficiente do produto de todos os polos é o elemento de matriz S.

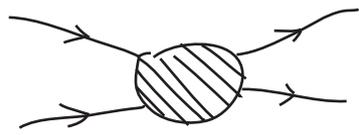
ps: no caso de partículas com spin, teremos fatores tais como  $u^s(p)$  acompanhando os propagadores, neste caso temos também que separar estes fatores da matriz S, multiplicando por polarizações que projetem nos estados de spin finais e iniciais de espalhamento que queremos calcular

ps2: também temos que lidar com o fator  $\sqrt{Z}$ , podemos identificar quanto ele vale na função de dois pontos de cada partícula e "separá-lo" junto com os propagadores para obter a matriz S

**Importante:** note que o fator Z e a massa física apareceram neste desenvolvimento geral, mesmo sem termos identificado qualquer divergência nas correções radiativas. Suponha que estivessemos trabalhando em poucas dimensões e as integrais de loop convergissem. Teríamos que introduzir Z e uma massa m diferente daquela na lagrangeana ( $m_0$ )?

De fato, a possibilidade de fazer esta inversão foi provada por Lehmann, Symanzik, and Zimmermann e a equação 98.1 acima é conhecida como **Fórmula de Redução de LSZ**

Vamos tentar expressar esta fórmula por meio de diagramas de Feynman. Consideremos um caso simples:



Consideramos apenas os diagramas conectados, já que os desconectados não possuem a multiplicação de 4 polos que procuramos.

lembre-se, por exemplo, da teoria  $\lambda\phi^4$  -

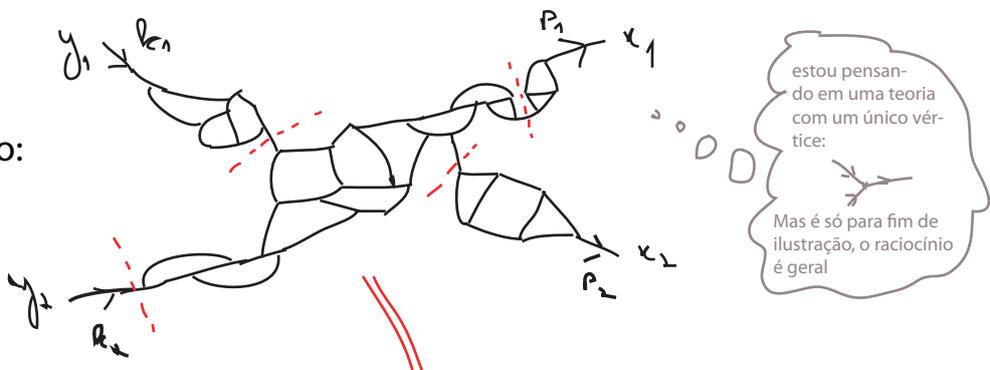
$$\text{X} = \Delta_F(x_1-z) \Delta_F(x_2-z) \Delta_F(x_3-z) \Delta_F(x_4-z)$$

$$\text{---} + \text{---} \sim \Delta_F \Delta_F$$

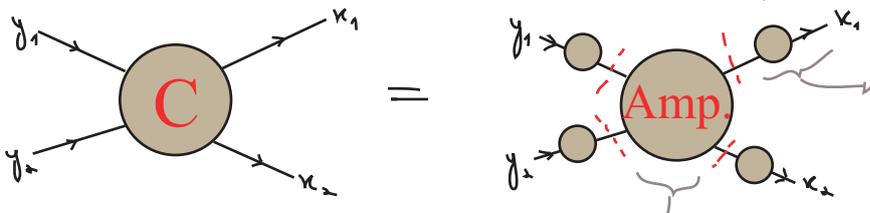
A função de quatro pontos no espaço dos momentos é:

$$\left( \prod_1^2 \int d^4 k_i e^{i P_\mu x_\mu} \right) \left( \prod_1^2 \int d^4 y_i e^{-i k_i y_i} \right) \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(y_1) \phi(y_2) \} | \Omega \rangle$$

Isso pode ser bem complicado:



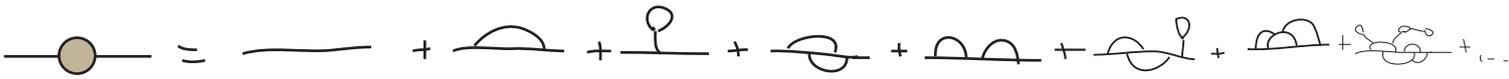
Mas podemos agrupar as correções da seguinte forma



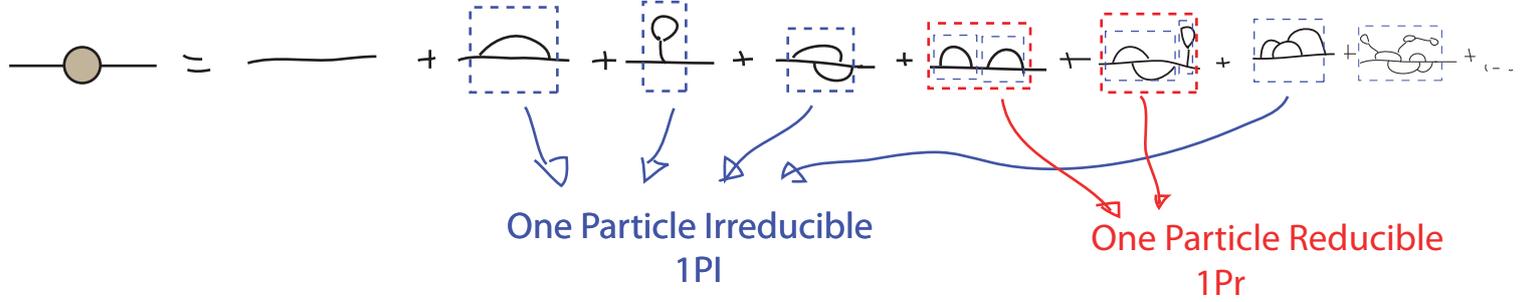
com isso agrupamos todas correções que só modificam o propagador nestas "pernas" - os **Propagadores Vestidos ou Completos**

Resta a parte que modifica o vértice da interação que chamamos de diagrama **Amputado**

Pensemos primeiro na estrutura dos propagadores:



Podemos dividir as correções em dois grupos:



Se definirmos um objeto que coleciona todas as correções 1PI:

$$-i M^2(p^2) = \rightarrow \text{1PI} \rightarrow$$

fica claro que as correções 1Pr serão dadas por:  $\text{1PI} + \text{1PI} \text{1PI} + \text{1PI} \text{1PI} \text{1PI} + \dots$

De forma que a função de dois pontos completa pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
 & \int d^4x \langle \Omega | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(0) \} | \Omega \rangle e^{i p x} = \text{Diagrama} = \\
 & = \text{Diagrama} + \text{Diagrama com 1PI} + \text{Diagrama com 2PI} + \text{Diagrama com 3PI} + \dots = \\
 & = \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \frac{i}{p^2 - m_0^2} (-i M^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \frac{i}{p^2 - m_0^2} (-i M^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2} (-i M^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \dots = \\
 & = \frac{i}{p^2 - m_0^2} \left( 1 + (-i M^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2} + (-i M^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2} (-i M^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \dots \right) = \\
 & = \frac{i}{p^2 - m_0^2} \left( 1 - \frac{M^2}{p^2 - m_0^2} \right)^{-1} = \frac{i}{p^2 - m_0^2 - M(p^2)^2}
 \end{aligned}$$

O propagador completo é dado por uma função complicada, que envolve a **auto energia M**. Conforme a discussão das pags 91-92, sabemos que perto de  $p^0 = E_p$  o único polo presente é o da massa física:

$$\frac{i}{p^2 - m_0^2 - M(p^2)^2} \underset{p^0 \rightarrow E_p}{\sim} \frac{i Z}{p^2 - m^2} + (\text{função sem polos})$$

Isso quer dizer que se formos para a região:  $\left. \begin{array}{l} p_1^0 \rightarrow E_{p_1} \\ p_2^0 \rightarrow E_{p_2} \\ k_1^0 \rightarrow E_{k_1} \\ k_2^0 \rightarrow E_{k_2} \end{array} \right\}$

A função de quatro pontos terá o seu termo mais singular na forma:

$$\text{Diagrama de 4 pontos} = \frac{i Z}{p_1^2 - m^2} \frac{i Z}{p_2^2 - m^2} \frac{i Z}{k_1^2 - m^2} \frac{i Z}{k_2^2 - m^2} \text{Diagrama Amp.} + \dots$$

+ ... termos regulares

onde, do lado direito, resta apenas o vértice e suas correções (diagramas Amputados)

Comparando isto com o lado direito da fórmula de LSZ (eq. 98.1), reconhecemos os produtos dos polos e vemos que a matriz S deve ser:

$$\langle P_1 P_2 | S | k_1 k_2 \rangle = Z^2 \text{ Amp.}$$

Para fins de ilustração, no caso  $\lambda\phi^4$ , (em teoria de perturbação) tínhamos:

$$\begin{aligned} \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(y_1) \phi(y_2) \} | \Omega \rangle = \\ = -3 \left[ \text{diagrama desconectado} \right] - \frac{i\lambda}{4!} \left[ \text{diagrama com 2 propagadores} \right] + 2i \left[ \text{diagrama com 4 propagadores} \right] + \mathcal{O}(\lambda^2) \end{aligned}$$

desconectados ( $\Delta_F \Delta_F$ )  $\Delta_F \Delta_F \Delta_F \Delta_F$

$$\begin{aligned} -i\lambda \int \Delta_F(z-x_1) \Delta_F(z-x_2) \Delta_F(z-x_3) \Delta_F(z-x_4) dz \\ = -i\lambda \int dz \int \frac{d^4k_1 d^4k_2 d^4k_3 d^4k_4}{(2\pi)^{16}} \frac{i e^{-ik_1(z-x_1)}}{k_1^2 - m_0^2} \dots \frac{i e^{-ik_4(z-x_4)}}{k_4^2 - m_0^2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int dz e^{-iz(\dots)} \rightarrow (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \\ = -i\lambda \int \frac{d^4k_1 d^4k_2 d^4k_3 d^4k_4}{(2\pi)^{16}} \frac{i}{k_1^2 - m_0^2} \dots \frac{i}{k_4^2 - m_0^2} \delta^4(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) e^{ik_1 x_1} \dots e^{ik_4 y_4} \end{aligned}$$

que é a função no espaço das posições. Passando para o espaço dos momentos:

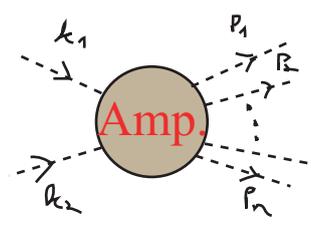
$$\begin{aligned} \int d^4k_1 e^{iP_1 x_1} \int d^4k_2 e^{iP_2 x_2} \int d^4k_3 e^{-ik_3 y_3} \int d^4k_4 e^{-ik_4 y_4} \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(y_1) \phi(y_2) \} | \Omega \rangle = \\ = -i\lambda (2\pi)^4 \delta^4(-P_1 - P_2 + k_1 + k_2) \left[ \frac{i}{P_1^2 - m_0^2} \frac{i}{P_2^2 - m_0^2} \frac{i}{k_1^2 - m_0^2} \frac{i}{k_2^2 - m_0^2} \right] \end{aligned}$$

↑  
amputação

notem que nessa caso não temos o Z (pois estamos em Leading Order)

Uma análise equivalente para funções de mais pontos nos leva a:

$$\langle p_1 \dots p_n | S | k_1, k_2 \rangle = (\sqrt{Z})^{n+2}$$



Note que para campos com spin teríamos fatores de polarização no lado direito, tal como  $u_s(k)$  ou  $\epsilon_\mu(k)$

### Funções de Vértice

(Ryder 7.3)

Da mesma forma que fizemos para o propagador, podemos também definir uma soma para todas as correções do vértice (por exemplo em  $\lambda\phi^4$ ):

$$\begin{aligned}
 -i\lambda\Gamma &= \text{tree} + \text{loop} + \text{loop} + \text{loop} + \dots \\
 -i\lambda\Gamma(p_1, p_2, p_3, p_4) &= -i\lambda + \dots \\
 \Gamma(p_1, p_2, p_3, p_4) &= 1 + \dots
 \end{aligned}$$

No caso da QED:  $-ie\Gamma^\mu(p', p) = -ie\gamma^\mu + \dots$

$$\Gamma^\mu(p', p) = \gamma^\mu + \dots$$

Note que no caso da teoria  $\lambda\phi^4$  temos um vértice com 4 pernas externas e na QED com três. Podemos também (em ambas as teorias) definir uma função de vértice para duas pernas externas.

$$\begin{aligned}
 \Pi^{(2)}(p) &= \text{tree} + \text{loop} + \dots \\
 \Pi^{(2)}(p) &= \text{tree} + \text{loop} + \text{loop} + \dots
 \end{aligned}$$

Mais para frente ficará claro porque eu chamei a função com duas pernas externas de  $\Pi^{(2)}$  ao invés de  $\Gamma^{(2)}$

Vamos ver como podemos definir estas funções para qualquer ordem o obter um funcional gerador para elas. Primeiro definimos:

$$\phi_{cl}[J]_{(x)} = \frac{\delta W}{\delta J(x)} = -i \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)}$$

para  $J=0$   $\left\{ \begin{aligned} \frac{\delta Z[J]}{\delta J} &= \langle 0 | \phi | 0 \rangle = 0 \\ Z[J] &= 1 \end{aligned} \right.$

$W = -i \ln[Z[J]]$

mas estamos pensando em  $J \neq 0$

$$\phi_{ce}(\mathcal{J}(x)) = -i \frac{\langle \Omega | \phi | \Omega \rangle_{\mathcal{J}}}{\langle \Omega | \Omega \rangle_{\mathcal{J}}}$$

Pensemos neste objeto em uma teoria escalar livre:

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\phi \left( -\frac{1}{2} \phi (\square + m^2) \phi + \phi \mathcal{J} \right) \rightarrow \mathcal{Z}_0[\mathcal{J}] = e^{-\frac{i}{2} \int \mathcal{D}^4x \mathcal{D}^4y \mathcal{J}(x) \Delta_F(x-y) \mathcal{J}(y)}$$

$$\Delta_F(x) = \frac{1}{p^2 - m^2}$$

$$W_0 = -i \ln \mathcal{Z}_0 = -\frac{1}{2} \int \mathcal{D}^4x \mathcal{D}^4y \mathcal{J}(x) \Delta_F(x-y) \mathcal{J}(y)$$

$$\phi_{ce}(\mathcal{J}(x)) = -\int \mathcal{D}^4y \Delta_F(x-y) \mathcal{J}(y) \quad \xrightarrow{\text{DIAGRAMA}} \quad \begin{array}{c} \text{---} \times \\ \color{red}{\kappa} \qquad \color{red}{\gamma} \end{array}$$

↳ que é a solução clássica do sistema

$$d_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \phi \mathcal{J}$$

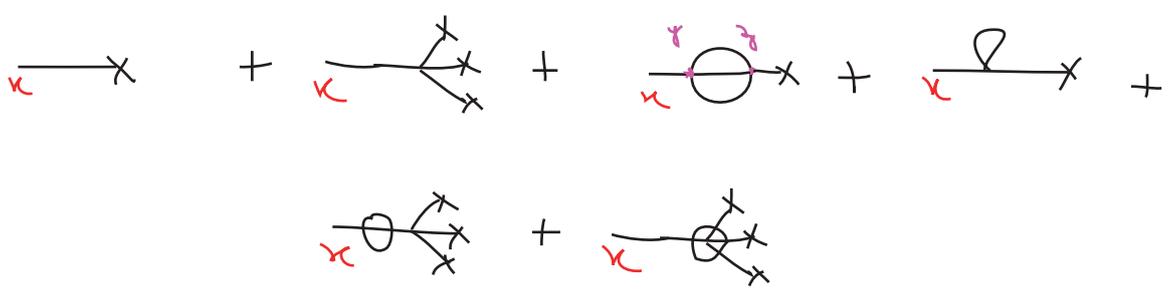
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi + \mathcal{J}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi$$

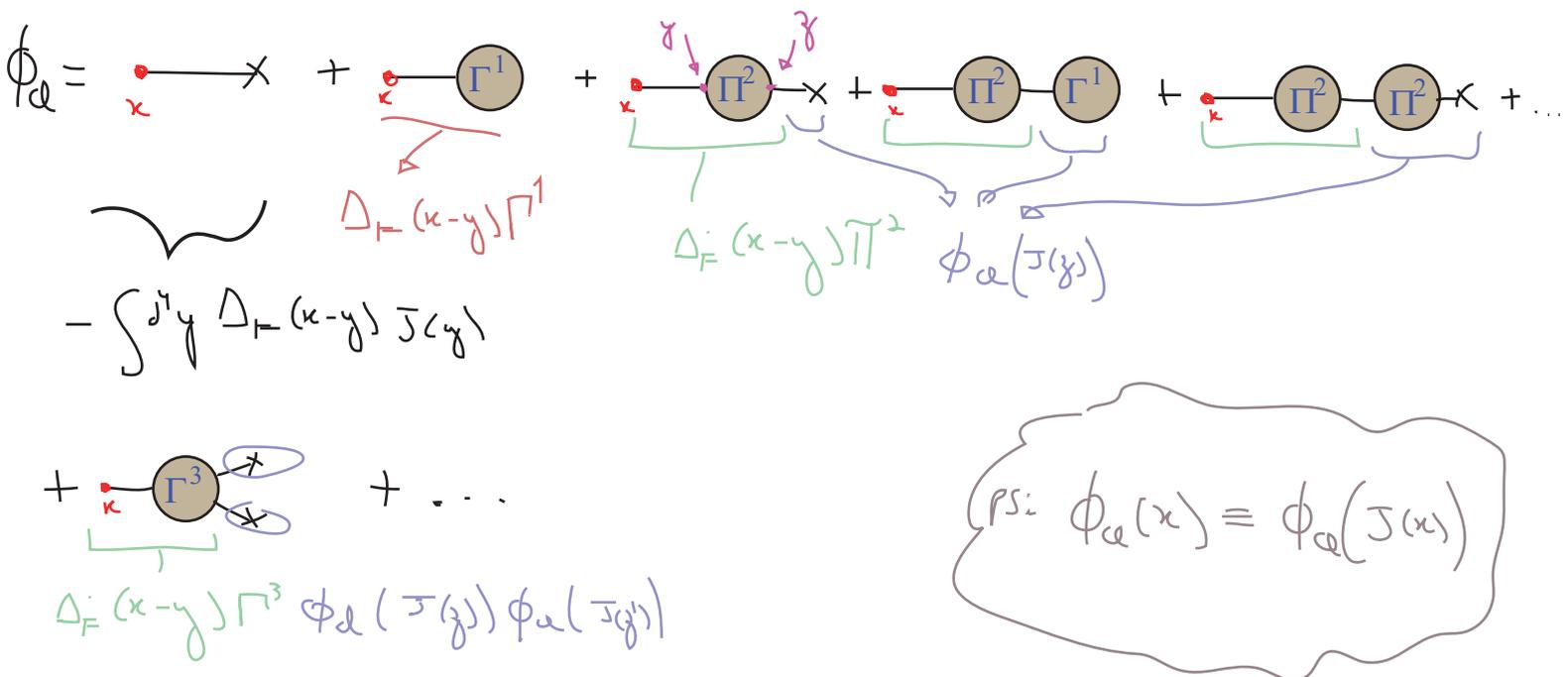
$$\square \phi - m^2 \phi + \mathcal{J} = 0 \Rightarrow (\square - m^2) \phi = -\mathcal{J}$$

$$\phi_{ce} = -(\square - m^2)^{-1} \mathcal{J}$$

Supondo agora que eu "ligasse" a interação, as contribuições para esta função de um ponto seriam (pensando em  $\lambda \phi^4$ ):



Pensando em termos de diagramas 1PI (e em uma teoria mais geral):



$$- \int d^4y \Delta_F(x-y) J(y)$$

$$+ \Delta_F(x-y)\Gamma^3 \phi_\alpha(J(y))\phi_\alpha(J(y)) + \dots$$

$$\phi_\alpha(x) = - \int d^4y \Delta_F(x-y) \left\{ J(y) + \left( \Gamma^{(1)}(y) + \int d^4z \Pi^{(2)}(y,z) \phi_\alpha(z) + \frac{1}{2} \int d^4z d^4z' \Pi^{(3)}(y,z,z') \phi_\alpha(z) \phi_\alpha(z') + \dots \right) \right\}$$

(eq. 104.1)

Vamos definir o funcional gerador para estas funções de vértice:

$$\hat{\Gamma}[\phi_\alpha] \equiv \int d^4x \Gamma^{(1)}(x) \phi_\alpha(x) + \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \Pi^{(2)}(x,y) \phi_\alpha(x) \phi_\alpha(y) + \dots$$

$$\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta}{\delta \phi_\alpha(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta \phi_\alpha(x_n)} \hat{\Gamma}[\phi_\alpha] \Big|_{\phi_\alpha=0} \quad (n \neq 2)$$

Comparando isto com 104.1, temos (toda a parte entre parênteses é basicamente isto com uma potência do campo clássico a menos):

$$\frac{\delta W}{\delta J(x)} = \phi_\alpha(J(x)) = - \int d^4y \Delta_F(x-y) \left( J(y) + \frac{\delta \hat{\Gamma}[\phi_\alpha]}{\delta \phi_\alpha(y)} \right)$$

$$(\square_x + m^2) \phi_a(\mathcal{J}(x)) = - \int d^4y \underbrace{(\square_x + m^2) \Delta_F(x-y)}_{-\delta(x-y)} \left( \mathcal{J}(y) + \frac{\delta \hat{\Gamma}[\phi_a]}{\delta \phi_a(y)} \right)$$

$$(\square_x + m^2) \phi_a(\mathcal{J}(x)) - \frac{\delta \hat{\Gamma}[\phi_a]}{\delta \phi_a(x)} = \mathcal{J}(x)$$

$$\frac{\delta}{\delta \phi_a(x)} \left[ \int d^4y \phi_a(y) (\square_y + m^2) \phi_a(y) \right] = \int d^4y \delta(x-y) (\square_y + m^2) \phi_a(y) = (\square_x + m^2) \phi_a(x)$$

$$\frac{\delta}{\delta \phi_a(x)} \left( \underbrace{\hat{\Gamma}[\phi_a] - \frac{1}{2} \int d^4y \phi_a(\mathcal{J}(y)) (\square_y + m^2) \phi_a(\mathcal{J}(y))}_{\Gamma[\phi_a]} \right) = -\mathcal{J}(x) \quad (\text{eq. 105.1})$$

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_a(x)} = -\mathcal{J}(x)$$

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_a(x) \delta \phi_a(y)} \Big|_{\phi_a=0} = \underbrace{\Pi^{(2)}(x,y)}_{\Gamma^{(2)}(x,y)} - (\square_x + m^2) \delta(x-y)$$

$$n \geq 2 \Rightarrow \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta}{\delta \phi_a(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta \phi_a(x_n)} \Gamma[\phi_a] \Big|_{\phi_a=0}$$

Suponha que definamos  $\Gamma[\phi_a]$  com a expressão:

$$W[\mathcal{J}] = \Gamma[\phi_a] + \int d^4x \mathcal{J}(x) \phi_a(x) \quad (\text{eq. 105.2})$$

$$\frac{\delta W[\mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}(x)} = \phi_a(x) \quad (\text{eq. 105.3})$$

$$\frac{\delta}{\delta \phi_a(y)} \left( \Gamma[\phi_a] = W[\mathcal{J}] - \int d^4x \mathcal{J}(x) \phi_a(x) \right)$$

$$\frac{\delta \Gamma[\phi_a]}{\delta \phi_a(y)} = \frac{\delta W[\mathcal{J}]}{\delta \phi_a(y)} - \frac{\delta \mathcal{J}(x)}{\delta \phi_a(y)} \phi_a(x) \Big|_{\phi_a=\phi_a(y)} - \mathcal{J}(y)$$



$$\frac{\delta W[\mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}(y)} \frac{\delta \mathcal{J}(x)}{\delta \phi_a(y)} \Big|_{\phi_a=\phi_a(y)}$$

$$\frac{\delta \Gamma[\phi_a]}{\delta \phi_a(y)} = -J(y)$$

que é justamente como o definimos antes (eq. 105.1) - usaremos esta nova definição porque é mais fácil generalizá-la quando tivermos mais campos.

Note que a função 1PI de dois pontos é  $\Pi^{(2)}(x,y)$  e não  $\Gamma^{(2)}(x,y)$

Temos uma interpretação para  $\Gamma^{(2)}$  ?

TEORIA LIVRE  
 $\Delta_F^C(x-y) = i \Delta_F(x-y) = \frac{-i}{p^2 - m_0^2}$

$$\phi_a(x) = \frac{\delta W}{\delta J(x)} \quad \Delta_F^C(x-y) \text{ Propagador completo}$$

$$\frac{\delta \phi_a(x)}{\delta J(y)} = \frac{\delta^2 W}{\delta J(y) \delta J(x)} = i \langle n | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | n \rangle$$

eq. 104.1

$$- \Delta_F(x-y) \left( 1 + \int d^4z \Pi^{(2)}(y,z) \frac{\delta \phi_a(z)}{\delta J(y)} + \dots \right) = i \Delta_F^C(x-y)$$

$i \Delta_F^C(z-y) \rightarrow 0 \text{ / } J = \phi_a = 0$

Quando faço  $J=0 \rightarrow \phi_a = 0$  (pg 103)

$$- \Delta_F(x-y) - i \Delta_F(x-y) \int d^4z \Pi^{(2)}(y,z) \Delta_F^C(z-y) = i \Delta_F^C(x-y)$$

$$-(\square + m^2)_x \left( \int d^4z \left( \delta^4(z-x) + \Delta_F(x-y) \Pi^{(2)}(y,z) \right) \Delta_F^C(z-y) = i \Delta_F^C(x-y) \right)$$

$$\int d^4z \left( -(\square + m^2)_x \delta^4(z-x) + \delta(x,y) \Pi^{(2)}(y,z) \right) \Delta_F^C(z-y) = i \delta(x-y)$$

$\Gamma^{(2)}(x,y)$  (pg 105)

$$\int d^4y \Gamma^{(2)}(x,y) \Delta_F^C(y-y) = i \delta(x-y)$$

(eq. 107.1)

$\Gamma^{(2)}(x,y)$  é a inversa do propagador completo! No espaço dos momentos:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma^{(2)}(x,y) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-i p(x-y)} \Gamma^{(2)}(p) \\ \Delta_F^C(y,y) &= \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} e^{-i p'(y-y)} \Delta_F^C(p') \end{aligned} \right\} \begin{cases} \int d^4y \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-i p(x-y)} \Gamma^{(2)}(p) \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} e^{-i p'(y-y)} \Delta_F^C(p') = i \delta(x-y) \\ \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} \delta^4(p-p') \Gamma^{(2)}(p) \Delta_F^C(p') e^{-i p x} e^{i p' y} = i \delta(x-y) \\ \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \Gamma^{(2)}(p) \Delta_F^C(p) e^{-i p(x-y)} = i \delta(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} i e^{-i p(x-y)} \end{cases}$$

$$\Gamma^{(2)}(p) \Delta_F^C(p) = i$$

(eq. 107.2)

$$\Delta_F^C(p) = \frac{i}{p^2 - \underbrace{m^2}_{m^2 = m_0^2 + M^2(p^2)}}$$

↑ massa física ↑ correções 1PI ao propagador (pg 100)  
↑ massa livre

função de Green de 2-pontos completa

$$\Gamma^{(2)}(p) = -i (p^2 - m_0^2 - M^2(p^2)) = i (M^2(p^2) - (p^2 - m_0^2))$$

$$\Gamma^{(2)}(x,y) = \Gamma^{(2)}(x,y) - (0 + m^2) \delta(x-y)$$

Queremos achar relações análogas a 107.1 e 107.2 para vértices de mais pontos. Notando que:

$$\Delta_F^C(y-y) = \left( -i \frac{\delta^2 W}{\delta J(y) \delta J(y)} \right) = -i \frac{\delta \phi_a(y)}{\delta J(y)} \tag{105.3}$$

Podemos escrever a seguinte derivada

$$\frac{\delta}{\delta J(x'')} = \int d^4z'' \frac{\delta \phi_a(z'')}{\delta J(x'')} \frac{\delta}{\delta \phi_a(z'')} = i \int d^4z'' \Delta_F^C(z'', x'') \frac{\delta}{\delta \phi_a(z'')} \tag{eq. 107.3}$$

$$\int \frac{\delta}{\delta \mathcal{J}(x'')} dz \Delta_F^c(x, z) \Gamma^{(2)}(z, y) = 0$$

$$\int dz \left( \frac{\delta}{\delta \mathcal{J}(x'')} \Delta_F^c(x, z) \right) \Gamma^{(2)}(z, y) + \int dz \Delta_F^c(x, z) \left( \frac{\delta}{\delta \mathcal{J}(x'')} \Gamma^{(2)}(z, y) \right) = 0$$

107.3



$$\int dz \left( -i \frac{\delta^3 W[\mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}(x'') \delta \mathcal{J}(x) \delta \mathcal{J}(y)} \right) \Gamma^{(2)}(z, y) + i \int dz d z'' \Delta_F^c(x, z) \times \Delta_F^c(z'', x'') \left( \frac{\delta^3 \Gamma[\phi]}{\delta \phi_\alpha(z'') \delta \phi_\alpha(z) \delta \phi_\alpha(y)} \right) = 0$$

Red arrow pointing down with text:  $\times i \Delta_F^c(x', y)$  and  $\int dy$

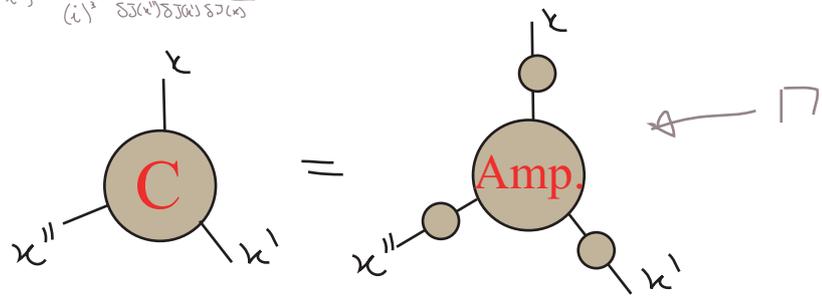
$$\int dz \frac{\delta^3 W[\mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}(x'') \delta \mathcal{J}(x) \delta \mathcal{J}(y)} \int dy \underbrace{(\Delta_F^c(x', y) \Gamma^{(2)}(z, y))}_{i \delta(x' - y)} +$$

$$- \int dz d z'' dy \Delta_F^c(x, z) \Delta_F^c(z'', x'') \Delta_F^c(x', y) \frac{\delta^3 \Gamma[\phi]}{\delta \phi_\alpha(z'') \delta \phi_\alpha(z) \delta \phi_\alpha(y)} = 0$$

Red arrow pointing down with text:  $y \rightarrow z'$

$$i \frac{\delta^3 W[\mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}(x'') \delta \mathcal{J}(x) \delta \mathcal{J}(z')} = \int dz d z'' dz' \Delta_F^c(x, z) \Delta_F^c(z'', x'') \Delta_F^c(x', z') \frac{\delta^3 \Gamma[\phi]}{\delta \phi_\alpha(z'') \delta \phi_\alpha(z) \delta \phi_\alpha(z')}$$

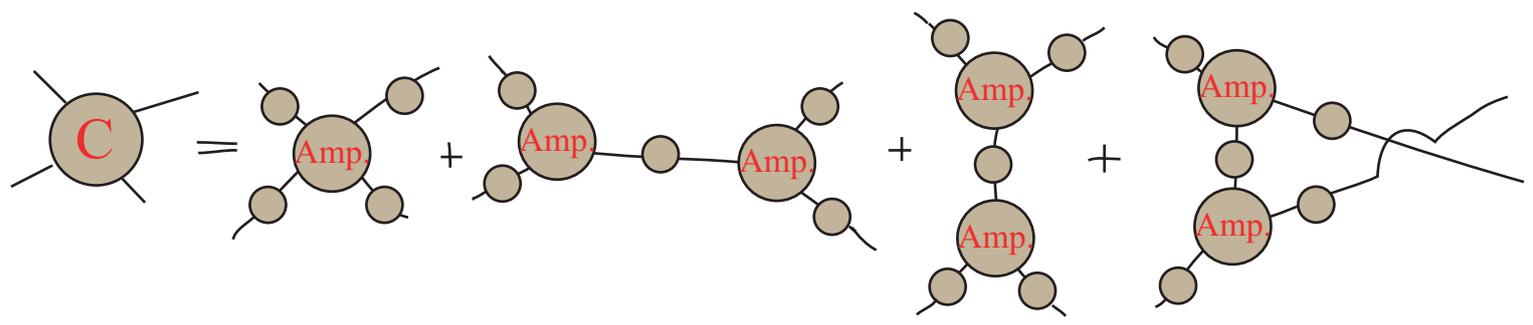
$$\phi(x, x', x'') = \frac{1}{(i)^3} \frac{\delta^3 W}{\delta \mathcal{J}(x) \delta \mathcal{J}(x') \delta \mathcal{J}(x')}$$



O que nos mostra que a função de vértice de fato contém os diagramas amputados que queríamos. Outra forma de ver isso é invertendo a expressão acima:

$$\frac{\delta^3 \Gamma[\phi]}{\delta\phi(z'') \delta\phi(z) \delta\phi(z')} = - \int dx dx' dx'' \underbrace{\Gamma^{(A)}(x, z) \Gamma^{(A)}(x', z') \Gamma^{(A)}(x'', z'')}_{\text{como estes são os inversos dos propagadores completos, o efeito deles sobre o correlator será o de "amputar" os propagadores.}} \frac{\delta^3 W[J]}{\delta J(x'') \delta J(x) \delta J(x')} \quad (\text{eq. 109.1})$$

Podemos continuar derivando para obter expressões para as funções de ordem superior. Em termos de diagramas, a expressão para a função de 4 pontos seria:



Obs: note que na pg 105, trocamos a definição de  $\Gamma[\phi_a]$  dada por 105.1 por:

$$W[J] = \Gamma[\phi_a] + \int dx J(x) \phi_a(x)$$

com  $\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \phi_a(x)$        $\frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_a(x)} = -J(x)$

$f(x) \rightarrow g(\mu) \quad \mu = \frac{df}{dx}$   
 $g(\mu) = f(x) - \mu x$

o que é uma generalização da transformada de Legendre

(Detalhes sobre o gerador das funções conectadas e ação efetiva -> Campos I 2015, pgs 157-168)

### Identidades de Ward-Takahashi na QED

(Ryder 7.4, Peskin 7.4)

Com as definições feitas nas últimas páginas podemos agora provar uma generalização das identidades de Ward para os propagadores e vértices completos, as identidades de Ward-Takahashi. Começamos notando que quando quantizamos o campo eletromagnético fomos obrigado a fixar o gauge, pensando na Lagrangeana da QED:

$$\mathcal{L}_{\text{EFF}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i \bar{\Psi} \not{\partial} \Psi + i e \bar{\Psi} \not{A} \Psi - m \bar{\Psi} \Psi - \underbrace{\frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2}_{\mathcal{L}_{\text{GF}}} \quad (\text{eq. 109.2})$$

A Lagrangeana fixada, no entanto, não é invariante de gauge - mas precisamos que os observáveis da teoria - que vêm das funções de Green - o sejam. Portanto o funcional gerador deve ser invariante. Assim, dada uma transformação de gauge infinitesimal:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha \quad \alpha = \alpha(x)$$

$$\psi \rightarrow \psi - i e \alpha \psi$$

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} + i e \alpha \bar{\psi}$$

vamos ver o que acontece com Z. Lembrando que no funcional gerador aparece:

$$S = \int d^4x \left( \mathcal{L}_{\text{EFF}} + \bar{J}^\mu A_\mu + \bar{\eta} \psi + \bar{\Psi} \eta \right)$$

Quase toda a lagrangeana efetiva é invariante de gauge, com exceção do termo de gauge-fixing:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2 &\rightarrow -\frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu + \square \alpha) (\partial^\nu A_\nu + \square \alpha) = \\ &= -\frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2 - \frac{1}{\xi} \underbrace{(\partial^\mu A_\mu)(\square \alpha)}_{\text{integração por partes}} + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ &\int d^4x (\partial^\mu A_\mu)(\square \alpha) = \int d^4x (\square \partial^\mu A_\mu) \alpha(x) \end{aligned}$$

As fontes também contribuem para a variação:

$$\begin{aligned} \underbrace{\bar{J}^\mu A_\mu + \bar{\eta} \psi + \bar{\Psi} \eta}_{\mathcal{L}_F} &\rightarrow \mathcal{L}_F + \underbrace{\bar{J}^\mu \partial_\mu \alpha}_{\text{integração por partes}} - i e \alpha \bar{\eta} \psi + i e \alpha \bar{\Psi} \eta \\ \int d^4x \bar{J}^\mu \partial_\mu \alpha &= - \int d^4x (\partial_\mu \bar{J}^\mu) \alpha(x) \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} Z = N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\psi e^{iS} &\rightarrow N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ i \int d^4x \left[ -\frac{1}{\xi} (\square \partial^\mu A_\mu) - \partial_\mu \bar{J}^\mu + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - i e \bar{\eta} \psi + i e \bar{\Psi} \eta \right] \alpha(x) \right\} e^{iS} \end{aligned}$$

Considerando que  $\alpha(x)$  é pequeno, podemos expandir a exponencial e obter:

$$Z \rightarrow Z + N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi \left\{ \int d^4x \underbrace{\left[ -\frac{1}{\xi} (\square \partial^\nu A_\nu) - \partial_\mu \bar{J}^\mu - i e (\bar{\eta} \Psi - \bar{\Psi} \eta) \right]}_{\mathcal{O}[A_\mu, \bar{\Psi}, \Psi]} \alpha(x) \right\} e^{iS}$$

Uma forma simples de tratar  $\mathcal{O}$  é usar o mesmo método que usamos para tratar interações anteriormente - transformamos ele em um operador diferencial agindo na exponencial da ação, fazendo as substituições:

*\* parece errado no Ryder*

$$\Psi \rightarrow \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} \quad \bar{\Psi} \rightarrow -\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta} \quad A_\mu \rightarrow \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J^\mu}$$

$Z = N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi e^{iS_{\text{eff}} + i \int d^4x (\bar{J}^\mu A_\mu + \bar{\eta} \Psi + \bar{\Psi} \eta)}$

Então:

$$\hat{\mathcal{O}}[A_\mu, \bar{\Psi}, \Psi] = \left[ +\frac{i}{\xi} \square \partial^\nu \frac{\delta}{\delta J^\nu} - \partial^\mu \bar{J}_\mu - e \left( \bar{\eta} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} - \eta \frac{\delta}{\delta \eta} \right) \right]$$

$$Z \rightarrow \left( 1 + \int d^4x \alpha(x) \hat{\mathcal{O}} \right) Z$$

Para garantir a invariância de  $Z$ , qualquer que seja  $\alpha$ , precisamos que:  $\hat{\mathcal{O}} Z = 0$  *zero!*

$$\left[ +\frac{i}{\xi} \square \partial^\nu \frac{\delta}{\delta J^\nu} - \partial^\mu \bar{J}_\mu - e \left( \bar{\eta} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} - \eta \frac{\delta}{\delta \eta} \right) \right] Z = 0$$

$$Z = e^{iW}$$

$$\left[ -\frac{1}{\xi} \square \partial^\nu \frac{\delta W}{\delta J^\nu} - \partial^\mu \bar{J}_\mu - i e \left( \bar{\eta} \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}} - \eta \frac{\delta W}{\delta \eta} \right) \right] e^{iW} = 0$$

$$-\frac{1}{\xi} \square \partial^\nu \frac{\delta W}{\delta J^\nu} - \partial^\mu \bar{J}_\mu - i e \left( \bar{\eta} \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}} + \frac{\delta W}{\delta \eta} \eta \right) = 0$$

Fazemos então uma generalização da definição para as funções de vértice, usando a transformação de Legendre mas três variáveis:

$$\Gamma[\Psi_\mu, \bar{\Psi}_\mu, A_\mu^0] = W[\eta, \bar{\eta}, \bar{J}_\mu] - \int d^4x (\bar{\eta} \Psi_\mu + \bar{\Psi}_\mu \eta + \bar{J}^\mu A_\mu^0)$$

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu^a} = -J^\mu \quad \frac{\delta W}{\delta \bar{J}} = A_\mu^a$$

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \psi_a} = +\bar{\eta} \quad \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}} = \psi_a$$

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}_a} = -\eta \quad \frac{\delta W}{\delta \eta} = -\bar{\psi}_a$$

\* parece errado no Ryder

\* tem um i na derivada em A e um sinal errado entre os fermiônicos

$$\frac{\delta}{\delta A_\mu^a} \left( \frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu^a} + \int d^4x \left( \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi_a} \psi_a + \bar{\psi}_a \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}_a} \right) \right) = 0$$

alguns autores se referem a esta equação como Ward Takahashi ou W-T Generalizada

(eq. 112.1)

Esta relação entre os geradores das funções de vértice garante a invariância de gauge de Z em todas as ordens de perturbação. A partir dela podemos obter algumas relações mais conhecidas:

(I) aplicando as derivadas abaixo de ambos os lados de 112.1

$$\frac{\delta}{\delta \psi_a(y)} \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}_a(x)} \left( \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi_a(x)} \psi_a(x) \right) = \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}_a(x)} \left[ \delta(x-y) \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi_a(x)} + \dots \right] = -\delta(x-y) \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi_a(x) \delta \bar{\psi}_a(x)} + \dots$$

$$\frac{\delta}{\delta \psi_a(y)} \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}_a(x)} \left( \bar{\psi}_a(x) \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}_a(x)} \right) = \frac{\delta}{\delta \psi_a(y)} \left[ \delta(x-x) \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}_a(x)} + \dots \right] = \delta(x-x) \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi_a(y) \delta \bar{\psi}_a(x)}$$

e então fazemos:  $\psi_a = \bar{\psi}_a = A_\mu^a = 0$

$$\frac{\delta^3 \Gamma[0]}{\delta \psi_a(y) \delta \bar{\psi}_a(x) \delta A_\mu^a(x)} = +i e \left( -\delta(x-y) \frac{\delta^2 \Gamma[0]}{\delta \psi_a(x) \delta \bar{\psi}_a(x)} + \delta(x-x) \frac{\delta^2 \Gamma[0]}{\delta \psi_a(y) \delta \bar{\psi}_a(x)} \right)$$

$$\Gamma_{ijN}^{(3)}(y_1, x_1, x) = i e \delta(x-x_1) [S_F^c(y_1-x)]^{-1} - i e \delta(x-y_1) [S_F^c(x-x_1)]^{-1}$$

$$\Gamma_{ijN}^{(3)}(y_1, x_1, x) = i e \delta(x-x_1) [S_F^c(y_1-x)]^{-1} - i e \delta(x-y_1) [S_F^c(x-x_1)]^{-1}$$

(eq. 112.2)

Passando para o espaço dos momentos temos:

$$\begin{aligned} & \int d^4x \, d^4y_1 \, d^4x_1 \, e^{iP_1 y_1} e^{-iP_2 x_1} e^{ikx} \, \delta(x-x_1) \left[ \Sigma_F^<(y_1-x) \right]^{-1} = \\ & = \int d^4x \, d^4y_1 \, d^4x_1 \, e^{iP_1 y_1} e^{-iP_2 x_1} e^{ikx} \, \delta(x-x_1) \int \frac{d^4P_1'}{(2\pi)^4} e^{-iP_1'(y_1-x)} \left[ \Sigma_F^<(P_1') \right]^{-1} = \\ & = \int d^4y_1 \, d^4x_1 \, e^{iP_1 y_1} e^{-iP_2 x_1} e^{ikx_1} \int \frac{d^4P_1'}{(2\pi)^4} e^{-iP_1'(y_1-x_1)} \left[ \Sigma_F^<(P_1') \right]^{-1} = \\ & = (2\pi)^4 \int d^4P_1' \, \delta(P_1 - P_1') \, \delta(P_2 + k + P_1') \left[ \Sigma_F^<(P_1') \right]^{-1} = (2\pi)^4 \delta(k + P_1 - P_2) \left[ \Sigma_F^<(P_1) \right]^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int d^4x \, d^4y_1 \, d^4x_1 \, e^{iP_1 y_1} e^{-iP_2 x_1} e^{ikx} \, \delta(x-y_1) \left[ \Sigma_F^<(x-x_1) \right]^{-1} = \\ & = \int d^4x \, d^4y_1 \, d^4x_1 \, e^{iP_1 y_1} e^{-iP_2 x_1} e^{ikx} \, \delta(x-y_1) \int \frac{d^4P_1'}{(2\pi)^4} e^{-iP_1'(x-x_1)} \left[ \Sigma_F^<(P_1') \right]^{-1} = \\ & = \int d^4y_1 \, d^4x_1 \, e^{iP_1 y_1} e^{-iP_2 x_1} e^{iky_1} \int \frac{d^4P_1'}{(2\pi)^4} e^{-iP_1'(y_1-x_1)} \left[ \Sigma_F^<(P_1') \right]^{-1} = \\ & = (2\pi)^4 \int d^4P_1' \, \delta(P_1 + k - P_1') \, \delta(-P_2 + P_1') \left[ \Sigma_F^<(P_1') \right]^{-1} = (2\pi)^4 \delta(P_1 + k - P_2) \left[ \Sigma_F^<(P_2) \right]^{-1} \end{aligned}$$

$$\int d^4x \, d^4y_1 \, d^4x_1 \, e^{iP_1 y_1} e^{-iP_2 x_1} e^{ikx} \, d_x^N \Gamma_{ijN}^{(3)}(y_1, x_1, x) = -k^N \Gamma_{ijN}^{(3)}(P_1, -P_2, k)$$

$$\begin{aligned} -k^N \Gamma_{ijN}^{(3)}(P_1, -P_2, k) &= i e (2\pi)^4 \delta(k + P_1 - P_2) \left\{ \left[ \Sigma_F^<(P_1) \right]^{-1} - \left[ \Sigma_F^<(P_2) \right]^{-1} \right\} \\ -i k^N \Gamma_{ijN}^{(3)}(P_1, -P_2, k) &= e (2\pi)^4 \delta(k + P_1 - P_2) \left\{ \left[ \Sigma_F^<(P_1 + k) \right]^{-1} - \left[ \Sigma_F^<(P_1) \right]^{-1} \right\} \end{aligned}$$

Da forma como está definida,  $\Gamma_{ijN}^{(3)}$  contém a carga e conservação de momento, para separar estes de forma explícita:

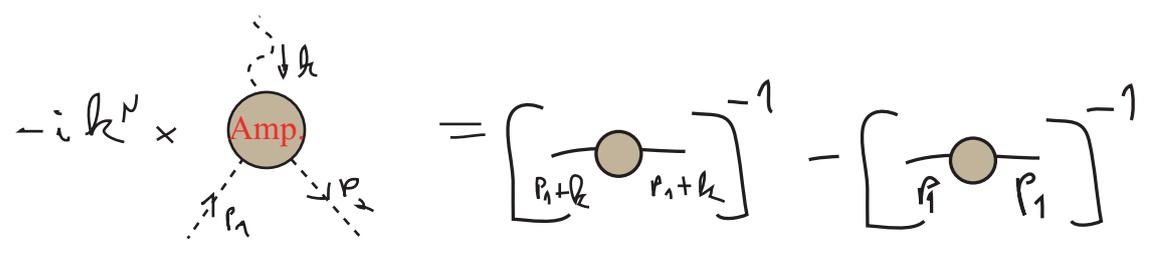
$$\Gamma_{ij;N}^{(3)}(p_1, p_2; k) \equiv e (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + k - p_2) \Gamma_{ij;N}^{QED(3)}(p_1, p_2; k)$$

$$-i k^N \Gamma_{ij;N}^{QED(3)}(p_1, p_2; k) = \left[ \Sigma_F^<(p_1+k) \right]^{-1} - \left[ \Sigma_F^<(p_1) \right]^{-1}$$

(eq. 114.1)

**Identidade de Ward-Takahashi**

Que, em diagramas, fica:

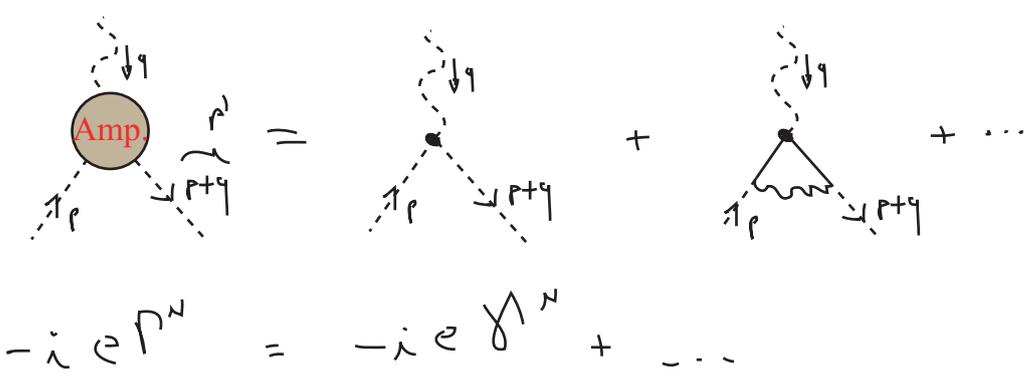


A partir da equação 114.1 podemos fazer outras combinações de derivações funcionais para obter relações entre diagramas com mais pontos ou diferentes campos.

## Correções Radiativas na QED

### Função de Vértice

(Peskin secs 6.2 e 6.3)



Considerando simplesmente a estrutura de Lorentz e a restrição oriunda da indentidade de Ward, podemos escrever uma forma geral para a função de vértice (veja Peskin, pg 186)

$$\Gamma^N = \gamma^N F_1(q^2) + i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_2(q^2)$$

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

L.O.  $\rightarrow$   $F_1^{LO}(q^2) = 1$   
 $F_2^{LO}(q^2) = 0$  (eq. 114.2)

Fatores de Forma

L.O. - leading order (primeira contrib. não nula em teoria de perturbação)

Tanto  $F_1$  quanto  $F_2$  têm interpretação física. O espalhamento em um potencial eletrostático é dado por:

$$A_{\mu}^{EXT}(x) = (\phi(\vec{x}), 0, 0, 0) \quad A_{\mu}^{EXT}(q) = (2\pi \delta(q^0) \tilde{\phi}(\vec{q}), 0, 0, 0)$$

estático e varia muito pouco no espaço

$$i\mathcal{M} = -ie \bar{u}(p') \Gamma^0 u(p) \tilde{\phi}(\vec{q})$$

(para lembrar como tratamos um potencial externo clássico, ver problema 4.4 do Peskin)

$\hookrightarrow \sim S(q)$

$q \rightarrow 0 \Rightarrow \Gamma^0 = \gamma^0 F_1(0)$

$$i\mathcal{M} = -ie F_1(0) \bar{u}(p') \gamma^0 u(p)$$

De onde vemos que  $F_1(0)$  é a carga do elétron, em unidades de  $e$ .  $\Rightarrow \boxed{F_1(0) = 1}$

(eq. 115.1)

$$\left( \begin{aligned} F_1(q) &= F_1^{LO}(q^2) + F_1^{>LO}(q^2) \\ F_1(0) &= 1 + F_1^{>LO}(0) \end{aligned} \right)$$

Como ele já é 1 em primeira ordem pert., vemos que as correções a este fator devem ser 0 para  $q^2 = 0$

O mesmo pode ser feito para  $F_2$  em um campo vetorial constante:

$$A_{\mu}^{EXT}(x) = (0, \vec{A}(\vec{x}))$$

$$i\mathcal{M} = -ie \bar{u}(p') \Gamma^i u(p) A^i(\vec{q})$$

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \end{pmatrix}$$

$$i\mathcal{M} = -ie \bar{u}(p') \Gamma^i u(p) A^i(\vec{q})$$

$q \rightarrow 0$   
 $\sim$  RELATIVIST.

$$i\mathcal{M} = -ie (2m) \cdot e \sum^{iT} \left( -\frac{1}{2m} \sigma^k [F_1(0) + F_2(0)] \right) \underbrace{(-ie \epsilon^{ijk} q^i A^j(\vec{q}))}_{B^k(\vec{q})}$$

comparando com a aprox. de Born

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p-p') i\mathcal{M} = \langle p' | iT | p \rangle = -ie \tilde{V}(q) 2\pi \delta(E_{p'} - E_p)$$

$\hookrightarrow$  A MENOS DE UM FATOR  $(2m) \delta^{(3)}(p-p')$

$$V(\vec{x}) = - \underbrace{\langle \vec{\mu} \rangle}_{\substack{\text{Momento} \\ \text{magnético} \\ \text{do elétron}}} \cdot \vec{B}^p(x)$$

$$\langle \vec{\mu} \rangle = \frac{e}{m} [1 + F_2(0)] \left\{ \vec{L} + \frac{\sigma^p}{2} \right\}$$

Spin do e<sup>-</sup>

Se escrevermos o momento magnético da forma usual:  $\vec{\mu} = g \left( \frac{e}{2m} \right) \vec{S}$

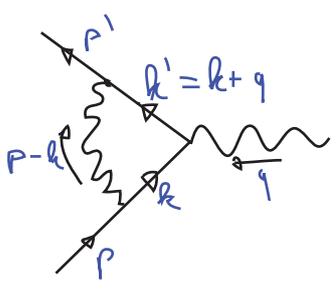
$$g = 2 + 2 F_2(0)$$

Vimos (eq 114.2) que F2 = 0 em primeira ordem pert. portanto g = 2 nesta ordem. Mas ele será corrigido em ordens superiores:

$$g = 2 + \underbrace{O(\alpha)}_{\substack{\text{Momento} \\ \text{magnético} \\ \text{anômalo} \\ \text{do elétron}}} + \dots$$

Vamos calcular as correções de primeira ordem ao vértice:  $\Gamma^N = \gamma^N + \delta \Gamma^N$

Lembrando sempre que isto aparece em:



$$\bar{u}(p') (-ie \delta \Gamma^N) u(p) \frac{(-i) g_{NB}}{q^2} \dots$$

$$\delta \Gamma^N = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-ie \gamma_{VP}}{(k-p)^2 + i\epsilon} (-ie \gamma^V) i \frac{(\not{k}' + m)}{k'^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^N i \frac{(\not{k} + m)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} (-ie \gamma^P) =$$

$$\gamma_P \gamma^N \gamma^P = -2 \gamma^N$$

$$\gamma^N \cdot \not{k} = \gamma^N \gamma^V k_V = [2g^{NV} - \gamma^V \gamma^N] k_V = 2 k^N - \not{k} \gamma^N$$

$$-m (\gamma^N \not{k} + \not{k} \gamma^N + \gamma^N \not{k}' + \not{k}' \gamma^N) = -m (2k^N + 2k'^N) = -2m (k + k')^N$$

$$= 2ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{[\not{k} \gamma^\mu \not{k}' + m^2 \not{0} - 2m(\not{k} + \not{k}')^\mu]}{[(k-p)^2 + i\epsilon][k^2 - m^2 + i\epsilon][k'^2 - m^2 + i\epsilon]} \quad (\text{eq. 117.1})$$

Para fazer esta integral usaremos o método conhecido como **parametrização de Feynman**. A idéia é transformar o denominador acima em um único polinômio de grau 2 em k (que por sua vez estará elevado a 3). Fica fácil ver com fazemos isso no caso da integral simples:

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{[xA + (1-x)B]^2} = \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) \frac{1}{[xA + yB]^2}$$

Que poderia ser usada para integrar:

parâmetros de Feynman

$$\int d^4k \frac{1}{(k-p)^2 (k^2 - m^2)} = \int d^4k \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) \frac{1}{[x(k-p)^2 + y(k^2 - m^2)]^2} =$$

$$= \int d^4k \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) \frac{1}{[(x+y)k^2 - 2xk \cdot p + xp^2 - m^2 y]^2}$$

$$l \equiv k - xp \Rightarrow [l^2 - m^2 y]$$

$$d^4k = d^4l$$

ficaria bem fácil fazer a integral em L, uma vez que é esfericamente simétrica

Temos uma identidade mais geral para o caso de vários fatores no denominador:

$$\frac{1}{A_1 A_2 \dots A_n} = \int_0^1 dx_1 \dots dx_n \delta(\sum x_i - 1) \frac{(n-1)!}{[x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n]^n} \quad (\text{eq. 117.2})$$

Aplicando isso ao denominador de 117.1 temos:



$$\begin{aligned}
 &= m^2 \left( \underbrace{-2xy + z}_{-(1-z)^2} \underbrace{-x-y-z}_{z-1} - \cancel{z^2 + 2yz} \right) + \underbrace{(-xy - y^2 + y)}_{xy} q^2 = \\
 &= -(1-z)^2 m^2 + xy q^2 \quad \leftarrow q^2 < 0 \\
 &\Delta = -xy q^2 + (1-z)^2 m^2 > 0
 \end{aligned}$$

$$D = \not{\partial}^2 + i\varepsilon - \Delta = \not{\partial}^2 + i\varepsilon + xy q^2 - (1-z)^2 m^2$$

$$\int \pi^N = 2i e^2 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{2}{D^3} [\not{m}]$$

Falta fazer a mudança de variáveis no numerador

$$[\not{m}] = [\not{\epsilon} \not{\gamma}^N \not{\epsilon}' + m^2 \not{\sigma}^N - 2m(\not{\epsilon} + \not{\epsilon}')^N]$$

Isso envolve um bocado de álgebra, é necessário lembrar que:

$$\text{(I)} \quad D = D(\ell^2) \Rightarrow \begin{cases} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{\ell^N}{D^3} = 0 \\ \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{\ell^N \ell^\nu}{D^3} = \frac{1}{4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{g^{\nu N} \ell^2}{D^3} \end{cases}$$

$$\text{(II)} \quad [\not{m}] \text{ está entre espinores: } \bar{u}(p') [\not{m}] u(p)$$

portanto podemos trocar  $\not{p} u(p) = m u(p)$

De resto é só usar relações de comutação e as relações entre os momentos para chegar em:

$$[\not{m}] = \left[ \not{\gamma}^N \left( -\frac{1}{2} \ell^2 + (1-x)(1-y) q^2 + (1-2z-z^2) m^2 \right) + (\not{p}' + \not{p}) \cdot m z(z-1) - \right.$$

$$+ \gamma^\mu \cdot m(z-2)(x-y)]$$

pois é ímpar sobre a troca  $x \leftrightarrow y$  (todo o resto da integral é par)

Usando a identidade de Gordon:

$$\bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p') \left[ \frac{p'^\mu + p^\mu}{2m} + \frac{i \sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \right] u(p)$$

podemos fazer:  $p'^\mu + p^\mu \rightarrow 2m \delta^\mu - i \sigma^{\mu\nu} q_\nu$

obtendo:

$$\int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{2}{D^3} x$$

$$x \left[ \gamma^\mu \left( -\frac{1}{2} \ell^2 + (1-x)(1-y) q^2 + (1-y) z + y^2 \right) m^2 + \frac{i \sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} (2m^2 z(1-z)) \right] \quad (\text{eq. 120.1})$$

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i \sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_2(q^2)$$

Fica bem mais fácil fazer a integral em 4D caso possamos passar para coordenadas esféricas em 4D, podemos fazer isso se passarmos para o espaço Euclidiano por meio de uma **rotação de Wick**

$$l^0 = i l_E^0$$

$$d^4 l = i d^4 l_E \quad d^3 \vec{l}_E = i d^3 \vec{l}$$

$$\vec{l} = \vec{l}_E$$

$$l^2 = - (l_E^0)^2 - (\vec{l}_E)^2 = - l_E^2$$

$$\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{[l^2 - \Delta]^m} = i \int \frac{d^4 l_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{[-l_E^2 - \Delta]^m} = \frac{i}{(-1)^m} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 l_E \frac{1}{[l_E^2 + \Delta]^m}$$

$$= \frac{\lambda(-1)^m}{(2\pi)^4} \int d^4\ell \int_0^\infty d\ell_E \frac{\ell_E^3}{[\ell_E^2 + \Delta]^m} =$$

$\mu = \ell_E^2 + \Delta$   
 $d\mu = 2\ell_E d\ell_E$

$$\Rightarrow \int_\Delta^\infty \frac{d\mu}{2} \frac{\mu - \Delta}{\mu^m} = \frac{1}{2} \frac{\Delta^{2-m}}{(m-1)(m-2)}$$

$m \geq 3$

$$= \frac{\lambda(-1)^m}{(2\pi)^4} (2\pi)^2 \frac{1}{2} \frac{\Delta^{2-m}}{(m-1)(m-2)} = \frac{\lambda(-1)^m}{(4\pi)^2} \frac{1}{(m-1)(m-2)} \frac{1}{\Delta^{m-2}}$$

$m \geq 3$

(eq. 121.1)

$$\int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{\ell^2}{[\ell^2 - \Delta]^m} = i \int \frac{d^4\ell_E}{(2\pi)^4} \frac{-\ell_E^2}{[-\ell_E^2 - \Delta]^m} = \frac{\lambda(-1)^{m+1}}{2^3 \pi^2} \int_0^\infty d\ell_E \frac{\ell_E^5}{[\ell_E^2 + \Delta]^m} =$$

$m \geq 4$

$$\int_\Delta^\infty \frac{d\mu}{2} \frac{(\mu - \Delta)^2}{\mu^m} = \frac{\Delta^{3-m}}{(m-3)(m-2)(m-1)}$$

$$= \frac{\lambda(-1)^{m+1}}{(4\pi)^2} \frac{1}{(m-3)(m-2)(m-1)} \frac{1}{\Delta^{m-3}}$$

(eq. 121.2)

Aqui temos um problema, já que estamos justamente interessados em integrar termos com  $D^3$  no denominador e a integral é divergente neste caso

$$\int_\Delta^\infty \frac{d\mu}{2} \frac{\mu^2 - 3\mu\Delta + \Delta^2}{\mu^3} = \lim_{k \rightarrow \infty} \ln \left[ \frac{k}{\Delta} \right]$$

Estudaremos o significado desta divergência em breve. Por enquanto vamos dar um jeito de isolar esta divergência na integral, este procedimento é chamado de **regularização** e existem muitas técnicas diferentes para executá-la. O importante é não confundir este procedimento com a renormalização, tudo que a regularização faz é colocar a resposta numa forma em que a divergência fique mais fácil de analisar, separada de uma parte finita (o que ajuda muito na hora de renormalizar). O método que usaremos é conhecido como **regularização de Pauli-Villars** e consiste em introduzir uma nova partícula fictícia de massa  $\Lambda$ . Nosso objetivo é fazer a seguinte modificação no propagador do fóton que está no loop:

$$\frac{1}{(k-p)^2 + i\epsilon} \longrightarrow \frac{1}{(k-p)^2 + i\epsilon} - \frac{1}{(k-p)^2 - \Lambda^2 + i\epsilon}$$

Note que recuperamos o propagador usual fazendo  $\Lambda^2 \rightarrow \infty$

mas para  $k^2 \gg \Lambda^2$  podemos desprezar  $\Lambda^2$  e os dois propagadores se cancelam.

Se voltarmos na pg 118 vemos que ganhamos uma nova contribuição em que a única mudança introduzida é (nada muda nos numeradores):

$$\Delta_\lambda = -xyq^2 + (1-z)^2 m^2 + z\Lambda^2$$

De forma que agora temos:

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \left( \frac{l^2}{[l^2 - \Delta]^3} - \frac{l^2}{[l^2 - \Delta_\lambda]^3} \right) = \frac{2i}{(4\pi)^2} \int_0^\infty dl_E \left( \frac{l_E^5}{[l_E^2 + \Delta]^3} - \frac{l_E^5}{[l_E^2 + \Delta_\lambda]^3} \right) = \\ & = \frac{2i}{(4\pi)^2} \lim_{K \rightarrow \infty} \left[ \int_\Delta^K \frac{d\mu}{2} \left( \frac{\mu^2 - 2\mu\Delta + \Delta^2}{\mu^3} \right) - \int_{\Delta_\lambda}^K \frac{d\mu}{2} \left( \frac{\mu^2 - 2\mu\Delta_\lambda + \Delta_\lambda^2}{\mu^3} \right) \right] = \\ & = \frac{i}{(4\pi)^2} \lim_{K \rightarrow \infty} \left[ \ln \left[ \frac{K}{\Delta} \right] + \frac{3}{2} - 2 \frac{\Delta}{K} + \frac{\Delta^2}{2K^2} - \left( \ln \left[ \frac{K}{\Delta_\lambda} \right] + \frac{3}{2} - 2 \frac{\Delta_\lambda}{K} + \frac{\Delta_\lambda^2}{2K^2} \right) \right] = \\ & = \frac{i}{(4\pi)^2} \ln \left[ \frac{\Delta_\lambda}{\Delta} \right] \end{aligned}$$

As integrais finitas mudam da seguinte forma:

$$\int \frac{d^3 \ell}{(2\pi)^3} \left( \frac{1}{[\ell^2 - \Delta]^3} - \frac{1}{[\ell^2 - \Delta_\Lambda]^3} \right) \stackrel{\text{eq 121.1} / m=3}{=} -\frac{i}{2(4\pi)^2} \left( \frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Delta_\Lambda} \right)$$

$\mathcal{O}(\Lambda^2)$  ←

podemos ignorar esta modificação se  $\Lambda \gg 1 \Delta$

Voltando com os resultados das integrais na equação 120.1, temos:

$$\delta \Gamma^N = 2i e^2 \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \gamma^\mu \left[ \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{\Delta_\Lambda}{\Delta} \right] + \frac{1}{2\Delta} \left( (1-x)(1-y) q^2 + (1-y) z + y^2 \right) m^2 \right] \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\Delta} \frac{i \sigma^{\mu\nu} q_\nu (2m^2 z(1-z))}{2m} \right]$$

$\rightarrow F_2$

$$\Delta_\Lambda \underset{\Lambda \gg 1}{\sim} \Delta \approx \Lambda^2$$

$$\frac{e^2}{4\pi} = \alpha$$

constante de estrutura fina

$$\delta \Gamma^N = \gamma^\mu \delta F_1(q^2) + \frac{i \sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \delta F_2(q^2)$$

(eq. 123.1)

$$\delta F_1(q^2) = \left( \frac{\alpha}{2\pi} \right) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left\{ \ln \left[ \frac{\Lambda^2}{\Delta} \right] + \frac{1}{\Delta} \left[ (1-x)(1-y) q^2 + (1-y) z + y^2 \right] m^2 \right\}$$

(eq. 123.2)

$$\delta F_2(q^2) = \left( \frac{\alpha}{2\pi} \right) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{1}{\Delta} 2m^2 z(1-z)$$

(eq. 123.3)

### Recapitulando o método usado:

- (1) Usamos os **diagramas de Feynman** para escrever a amplitude
- (2) Combinamos os denominadores dos propagadores usando os **parâmetros de Feynman**
- (3) Completamos quadrados no denominador, mudando a variável de integração para  $\ell$  (somando uma constante a  $k$ )
- (4) Passamos o **numerador para  $\ell$**  e notamos que as integrais das potências ímpares são nulas. As potências pares são escritas em termos de  $\ell^2, \ell^4, \dots$  (o uso da equação de movimento ajuda muito a simplificação do numerador)
- (5) fazemos a **rotação de Wick** e integramos no espaço Euclideano. Caso as integrais sejam divergentes, usamos algum tipo de **regularização**.

Notamos que  $\int \bar{F}_2$  não tem qualquer divergência, de fato podemos calculá-lo:

$$\begin{aligned} \int \bar{F}_2(0) &= \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{2k^2 y(1-z)}{(1-y)^2 m^2} = \\ & \quad \swarrow x_0 = 1-y-z \\ & \quad 0 < x_0 < 1 \Rightarrow 0 < 1-y-z < 1 \Rightarrow 1-z > y > -z \\ &= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{z}{1-z} = \frac{\alpha}{2\pi} \approx 0,0011614 \end{aligned}$$

O valor experimental atual é 0,00115965218073 (28) - tão preciso que é necessário considerar as correções  $O(\alpha^4)$ . Uma vez consideradas, estas correções concordam com este valor em  $1/10^8$

$\int \bar{F}_1$ , no entanto, contém divergências de dois tipos. A primeira, e mais óbvia, está ligada a grandes momentos no loop e é chamada de **divergência ultravioleta**. Na expressão que obtivemos ela aparece quando retiramos a partícula fictícia da teoria, fazendo:

$$\Lambda \rightarrow \infty$$

$$\int \bar{F}_1 \sim L_N \left[ \frac{\Lambda}{\Delta} \right]$$

A outra está associada a momentos muito pequenos do fóton no loop, e é chamada de **divergência no infravermelho**. Ela fica evidente se tomarmos, por exemplo, o seguinte termo de  $F_1$  e fizermos  $q = 0$

$$\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{1}{\Delta} \left[ (1-y+z^2) m^2 \right] \quad \Delta = -2xy q^2 + (1-z)^2 m^2$$

$$q^2=0 \Rightarrow \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{(1-y+z)^2}{(1-y)^2} =$$

$$= \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{-2 + (1-z)(3-z)}{(1-y)^2} = \int_0^1 dz \frac{-2 + (1-z)(3-z)}{(1-z)}$$

→ problema em  $z=1$

É relevante notar que esta divergência não existiria caso o fóton tivesse uma massa  $\mu$ , já que nesse caso teríamos:

$$\Delta(q^2) = -xy q^2 + (1-y)m^2 + y\mu^2 \Rightarrow \Delta(q^2=0) = (1-y)m^2 + y\mu^2$$

De fato, divergências infravermelhas estão ligadas a partículas sem massa (e o quão fácil é produzi-las) e aparecerão em teorias que as contenham.

### Divergência Infravermelha

Começaremos pela divergência de baixas energias. Para facilitar a discussão, vamos assumir que a divergência ultravioleta foi devidamente "resolvida", por enquanto isso significa forçar a condição da eq. 115.1:

$$F_1(0) = 1$$

$$\text{Como: } F_1(q^2) = \underbrace{F_1^e(q^2)}_1 + \underbrace{\delta F_1(q^2)}_{O(\epsilon^3)} + \dots$$

Precisamos que a correção se anule para  $q^2=0$ . O jeito mais rápido de conseguir isso é redefinindo a correção para subtrair o infinito:

$$\delta F_1'(q^2) = \delta F_1(q^2) - \delta F_1(0)$$

Com isso obtemos

$$\delta F_1'(q^2) = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left\{ \ln \left[ \frac{z\Lambda^2}{\Delta} \right] + \frac{1}{\Delta} \left[ (1-x)(1-y)q^2 + (1-y+z)^2 m^2 \right] \right.$$

$$\left. - \ln \left[ \frac{z\Lambda^2}{\Delta_0} \right] - \frac{1}{\Delta_0} \left[ (1-y+z)^2 m^2 \right] \right\} =$$

$\Delta_0 = (1-y)^2 m^2$

$$= \left(\frac{\kappa}{2\pi}\right) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left\{ \ln \left[ \frac{\Delta_0}{\Delta} \right] + \frac{(1-x)(1-y)q^2 + (1-yz+z^2)m^2}{(1-z)^2 m^2 - xyq^2} + \right. \\ \left. - \frac{(1-yz+z^2)m^2}{m^2(1-z)^2} \right\}$$

É claro que a esta altura esta subtração "a força" é totalmente arbitrária e nos deixa com uma profunda sensação de injustiça, mas quando tratarmos da divergência ultravioleta veremos que ela é justificada. Portanto aguarde mais um pouco.

Voltando à divergência infravermelha, vimos que esta não existe no caso de um fóton com massa. Portanto, uma forma de "regularizar" esta divergência é dar uma pequena massa  $\mu$  para o fóton depois ver o que acontece quando fazemos o limite  $\mu \rightarrow 0$

Temos:

$$SF_1' = \left(\frac{\kappa}{2\pi}\right) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left\{ \ln \left[ \frac{\Delta_0 + \mu^2 z}{\Delta + \mu^2 z} \right] + \frac{(1-x)(1-y)q^2 + (1-yz+z^2)m^2}{(1-z)^2 m^2 - xyq^2 + \mu^2 z} + \right. \\ \left. - \frac{(1-yz+z^2)m^2}{m^2(1-z)^2 + \mu^2 z} \right\}$$

REGULAR  
EM  $\mu \rightarrow 0$

Como estamos apenas interessados no limite  $\mu \rightarrow 0$  desprezaremos tudo que não diverge neste limite. A divergência vem dos termos  $(1-z)^2$ , portanto ela ocorre em um "canto" do espaço de parâmetros de Feynman:

$$\left. \begin{array}{l} z \sim 1 \\ x \sim 0 \\ y \sim 0 \end{array} \right\} \text{podemos fazer estas substituições no numerador e no } z \text{ que multiplica } \mu$$

$$SF_1' = \left(\frac{\kappa}{2\pi}\right) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left\{ \frac{q^2 - 2m^2}{(1-z)^2 m^2 - xyq^2 + \mu^2} - \frac{-2m^2}{m^2(1-z)^2 + \mu^2} \right\} = \\ = \left(\frac{\kappa}{2\pi}\right) \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \left\{ \frac{q^2 - 2m^2}{(1-z)^2 m^2 - (1-z-y)yq^2 + \mu^2} + \frac{2m^2}{m^2(1-z)^2 + \mu^2} \right\} =$$

$$y = (1-z)\xi = w\xi$$

$$w = (1-z)$$

$$z = 1-w$$

$$dz dy = -w dw d\xi$$

$z=0 \rightarrow w=1 \Rightarrow \int_0^1 dw \int_0^1 d\xi \Rightarrow y=w \rightarrow \xi=1$   
 $z=1 \rightarrow w=0 \Rightarrow y=0 \rightarrow \xi=0$

$$= \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) \int_0^1 w dw \int_0^1 d\xi \left\{ \frac{q^2 - 2m^2}{w^2 m^2 - w(1-\xi)\xi q^2 + N^2} + \frac{2m^2}{m^2 w^2 + N^2} \right\} =$$

$$= \left(\frac{\alpha}{4\pi}\right) \int_0^1 d\xi \int_0^1 dw^2 \left\{ \frac{q^2 - 2m^2}{w^2(m^2 - (1-\xi)\xi q^2) + N^2} + \frac{2m^2}{m^2 w^2 + N^2} \right\} =$$

$$= \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 d\xi \left[ \frac{-2m^2 + q^2}{m^2 - q^2\xi(1-\xi)} \text{Log} \left( \frac{m^2 - q^2\xi(1-\xi) + N^2}{N^2} \right) + 2m^2 \frac{1}{m^2} \text{Log} \left( \frac{m^2 + N^2}{N^2} \right) \right] =$$

Para  $N^2 \rightarrow 0 \Rightarrow \text{LN} \left( \frac{m^2 - q^2\xi(1-\xi)}{N^2} \right) \equiv \text{LN} \left( \frac{m^2 - q^2}{N^2} \right)$

$$= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 d\xi \left[ \frac{-2m^2 + q^2}{m^2 - q^2\xi(1-\xi)} + 2 \right] \text{LN} \left( \frac{m^2 - q^2}{N^2} \right) =$$

Os detalhes do numerador não interessam, indicaremos desta forma

$$\Delta F_1 = - \frac{\alpha}{2\pi} \underbrace{\int_0^1 d\xi \left[ \frac{m^2 - q^2/2}{m^2 - q^2\xi(1-\xi)} - 1 \right]}_{f_{IR}(q^2)} \text{LN} \left( \frac{m^2 - q^2}{N^2} \right)$$

Este fator de forma modifica a carga, então ele é transportado diretamente para a seção de choque:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{L.O.} \left[ 1 - \frac{\alpha}{\pi} f_{IR}(q^2) \text{LN} \left( \frac{m^2 - q^2}{N^2} \right) + \mathcal{O}(\alpha^2) \right]$$

↳ Resultado em "Leading Order" (primeira ordem na expansão pert.)

Como  $\begin{cases} q^2 < 0 \\ 0 < \xi(1-\xi) < \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow 1 < \frac{m^2 + 1q^{3/2}}{m^2 + 1q^{1/4}} < \frac{m^2 + 1q^{3/2}}{m^2 + 1q^2\xi(1-\xi)} = \frac{m^2 - q^2/2}{m^2 - q^2\xi(1-\xi)}$

$\therefore \rho_{\text{IR}}(q^2) > 0$

Portanto, não só temos uma seção de choque enorme, mas ainda por cima ela é negativa. Para entender melhor o que está acontecendo, vamos calcular  $f_{\text{IR}}$  no limite de alto  $q^2$

$$\int_0^1 d\xi \left[ \frac{m^2 - q^2/2}{m^2 - q^2\xi(1-\xi)} - 1 \right] \xrightarrow{q^2 \rightarrow -\infty} \int_0^1 d\xi \left( \frac{-q^2/2}{m^2 - q^2\xi(1-\xi)} - 1 \right) =$$

$$= \frac{2(-q^2)}{\sqrt{(-q^2)(-q^2+4m^2)}} \text{COTH}^{-1} \left( \sqrt{\frac{1 + \frac{4m^2}{(-q^2)}}{(-q^2)}} \right) - 1 =$$

$$= \text{LN} \left( \frac{1 - 2\frac{m^2}{q^2} + 1}{1 - 2\frac{m^2}{q^2} - 1} \right) - 1 = \text{LN} \left( -\frac{q^2}{m^2} \right) - 1$$

*note que abandonamos a notação  $\text{LN}(-q^2/m^2)$  porque no limite de grandes  $-q^2$ , só estamos interessados nos coeficientes de  $\text{LN}(-\frac{q^2}{m^2}) \approx \text{LN}(-q^2)$*

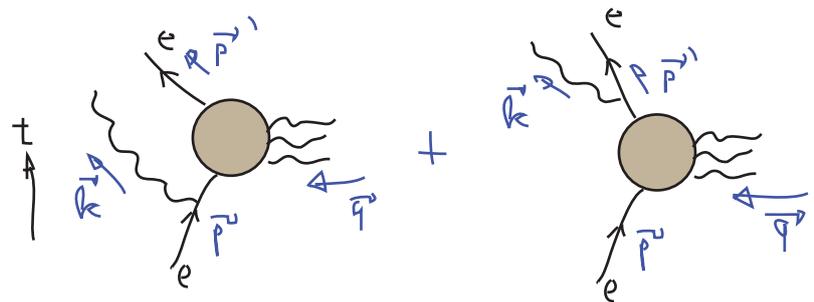
*O  $\text{LN}(m^2)$  é justamente o "1" que foi desprezado aqui*

Temos enfim:

$$F_1(-q^2 \rightarrow \infty) = 1 - \frac{\alpha}{2\pi} \ln \left( -\frac{q^2}{m^2} \right) \ln \left( -\frac{q^2}{\mu^2} \right) + O(\alpha^2)$$

(eq. 128.1)

Esta estrutura de dois logaritmos (chamada de "Sudakov double logarithm,") aparece em outro cálculo famoso de QED, o "soft bremsstrahlung", a radiação emitida em baixas frequências por um eletron acelerado. Do ponto de vista de diagramas de Feynman, estamos falando do seguinte processo:



Não calcularemos isto em detalhes (se estiver interessado, olhe a sec 6.1 do Peskin) - o importante é saber que, no limite em que os fotons emitidos tem pouco momento:

$$|k^\nu| \ll |p' - p| = |q^\nu|$$

podemos fazer a separação:

$$\hat{i} M = \hat{i} M_{el} \cdot f_r$$

fator que dá conta da emissão de 1 fóton  
 amplitude do espalhamento elástico (sem emissão de fóton)  
 amplitude total

na seção de choque ocorre algo semelhante

$$d\sigma(p \rightarrow p' + \gamma) = d\sigma(p \rightarrow p') \cdot \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k} \sum_{\lambda=1,2} e^2 \left| \frac{p' \cdot \epsilon^{(\lambda)}}{p' \cdot k} - \frac{p \cdot \epsilon^{(\lambda)}}{p \cdot k} \right|^2$$

polarizações do fóton  
 densidade de probabilidade para emissão de um fóton com momento k

Esta probabilidade não pode ser integrada para qualquer k, precisamos respeitar a premissa de que k é pequeno colocando um limite superior na integral:

$$|\vec{k}| < |\vec{q}| = |\vec{p} - \vec{p}'|$$

Com um pouco de álgebra, conseguimos colocar a integral na forma:

$$P_{\text{prob}} \approx \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{|\vec{q}|} dk \frac{1}{k} I(\vec{v}, \vec{v}')$$

velocidades associadas a  $\vec{p}, \vec{p}'$   
 função que não depende de k  
 probabilidade total de emitir um fóton com  $0 < |\vec{k}| < |\vec{q}|$

Esta probabilidade diverge! Temos uma **infinita probabilidade de emitir um fóton de baixo momento** ("soft photons"). Este fato é conhecido como divergência infravermelha da QED. A regularização possível é novamente introduzir uma pequena massa para o fóton, neste caso obtemos:

$$\int_0^{|\vec{q}|} d|\vec{k}| \frac{1}{|\vec{k}|} = \int_0^{|\vec{q}|} \frac{d|\vec{k}|^2}{2|\vec{k}|^2} = \int_{\mu^2}^{|\vec{q}|^2 + \mu^2} \frac{dE^2}{2E^2} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{|\vec{q}|^2 + \mu^2}{\mu^2} \right)$$

No limite:  $|\vec{q}|^2 \rightarrow \infty$   $\left\{ \begin{array}{l} |\vec{q}|^2 \approx -q^2 \end{array} \right.$  (Peskin pg 201)

queremos comparar com 128.1, onde também tomamos este limite. Isto significa olhar a região em que o elétron sofreu uma grande mudança de momento.

$$I(\vec{v}, \vec{v}') = 2 \ln \left( \frac{q^2}{m^2} \right) \approx 2 \ln \left( -\frac{q^2}{m^2} \right)$$

Assim, temos:

$$d\sigma(p \rightarrow p' + \gamma) \underset{-q^2 \rightarrow \infty}{\sim} d\sigma_0(p \rightarrow p') \cdot \frac{\alpha}{\pi} \ln\left(\frac{-q^2}{\nu^2}\right) \ln\left(-\frac{q^2}{m^2}\right)$$

(eq. 130.1)

que é a expressão que queríamos, comparemos isto com o que obtivemos em 128.1

$$(128.1) \rightarrow F_1(-q^2 \rightarrow \infty) = 1 - \frac{\alpha}{2\pi} \ln\left(-\frac{q^2}{m^2}\right) \ln\left(-\frac{q^2}{\nu^2}\right) + O(\alpha^2)$$

Que modifica a seção de choque de forma que:

$$d\sigma(p \rightarrow p') \underset{-q^2 \rightarrow \infty}{\sim} d\sigma_0(p \rightarrow p') \left[ 1 - \frac{\alpha}{\pi} \ln\left(\frac{-q^2}{\nu^2}\right) \ln\left(-\frac{q^2}{m^2}\right) + O(\alpha^2) \right]$$

$d\sigma \sim e^2 \rightarrow d\sigma \sim e^2 F_1^2 \sim \left[ 1 + 2 \frac{\alpha}{\pi} \ln \ln + \alpha^2 \ln^2 \ln + \dots \right]$

Vemos que, pelo menos até ordem  $\alpha$ , a soma destas duas seções de choque está livre de divergências já que as contribuições se cancelam. Mas o que uma tem a ver com o outra? O fato é que, do ponto de vista prático, não faz muito sentido diferenciar "medi um elétron" de "medi um elétron + um fóton quase sem energia", até porque fótons de energia infinitamente pequena são objetos estranhos (sem momento, nem energia e nem massa). Qualquer medida vai ter uma sensibilidade máxima a fótons "soft", que podemos expressar em termos de uma energia limite  $E_\ell$ , abaixo da qual o fóton não é observado. Assim, a seção de choque total de espalhamento de eletrons é dada por:

$$\frac{d\sigma_{\text{Exp}}}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega}(p \rightarrow p') + \frac{d\sigma}{d\Omega}(p \rightarrow p' + \gamma(\ell < E_\ell))$$

Se abandonamos o limite  $-q^2 \rightarrow \infty$  obtemos:

A integral em k na página 42 é feita só até  $E_\ell$

$$\frac{d\sigma_{\text{Exp}}}{d\Omega} = \frac{d\sigma_0}{d\Omega} \left[ 1 - \frac{\alpha}{\pi} \ln\left(\frac{-q^2/m^2}{\nu^2}\right) P_{\text{IR}}(q^2) + \frac{\alpha}{\pi} \ln\left(\frac{E_\ell^2}{\nu^2}\right) P_{\text{IR}}(q^2) + \dots \right]$$

$$= \frac{d\sigma_0}{d\Omega} \left[ 1 - \frac{\alpha}{\pi} P_{\text{IR}}(q^2) \ln\left(\frac{-q^2/m^2}{E_\ell^2}\right) + O(\alpha^2) \right]$$

(eq. 130.2)

Onde já não temos mais  $\mu$ , e podemos tomar o limite  $\nu \rightarrow 0$  sem medo de divergências

É possível mostrar que este cancelamento ocorre para todas as ordens de perturbação (Peskin sec 6.5), neste caso a seção de choque medida é:

$$\frac{d\sigma_{\text{Exp}}}{d\Omega} = \frac{d\sigma_0}{d\Omega} \text{EXP} \left[ -\frac{\alpha}{\pi} \ln(q^2) L_N \left( -\frac{q^2}{E_e^2} \right) \right]$$

Auto-energia do elétron

(Peskin 7.1)

Resta tratar a divergência ultravioleta do vértice elétron-elétron-fóton, veremos agora que ela está ligada às correções radiativas do propagador do elétron. Vamos a elas:

Primeiramente vale lembrar o resultado obtido na pag 92:

$$\int d^4x e^{iPx} \langle \Omega | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(0) | \Omega \rangle = i \frac{Z_2 (\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \dots$$

$$\langle \Omega | \psi(0) | p, s \rangle = \sqrt{Z_2} u^s(p)$$

↳  $m^2 = m_0^2 + \delta m^2$

↳  $1 + \delta Z_2$

Nosso objetivo é agora obter as contribuições perturbativas para  $Z_2$  e  $m$

$$\langle \Omega | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(y) \} | \Omega \rangle = \underbrace{\text{---} \text{---}}_p + \underbrace{\text{---} \text{---} \text{---}}_{k \quad p-k \quad p} + \dots$$

$$\frac{i(\not{p} + m_0)}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} + \frac{i(\not{p} + m_0)}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} \left[ -i \Sigma_2(p) \right] \frac{i(\not{p} + m_0)}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon}$$

basicamente é a contribuição de ordem  $e^2$  para um objeto análogo ao que chamamos de  $M^2$  na pág 100

$$-i \Sigma_2(p) = (-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma^\mu \frac{i(\not{k} + m_0)}{k^2 - m_0^2 + i\epsilon} \gamma^\nu \frac{-i}{(p-k)^2 - \mu^2 + i\epsilon}$$

"massa" do fóton no fim faremos:  $\mu^2 \rightarrow 0$

↳ ordem perturbativa

Temos, novamente, que usar o maquinário desenvolvido para o cálculo de loops. A parametrização de Feynman fornece (já integrando em  $y$  com o uso da delta):

$$\frac{1}{k^2 - m_0^2 + i\epsilon} \frac{1}{(p-k)^2 - \mu^2 + i\epsilon} = \int_0^1 dx \frac{1}{[k^2 - 2xkp + x p^2 - x \mu^2 - (1-x)m_0^2 + i\epsilon]^2}$$

o termo linear em  $\ell$  no numerador já foi cancelado

$$l = k - x p$$

$$-i \Sigma_2(p) = -e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{-2x \not{p} + 4 m_0}{[\ell^2 - \Delta_\nu + i\epsilon]^2}$$

$$\Delta_\nu = -x(1-x)p^2 + x\nu^2 + (1-x)m_0^2$$

Podemos usar a regularização de Pauli-Villars:

$$\frac{1}{(p-k)^2 - \nu^2 + i\epsilon} \rightarrow \frac{1}{(p-k)^2 - \nu^2 + i\epsilon} - \frac{1}{(p-k)^2 - \Lambda^2 + i\epsilon}$$

$$-i \Sigma_2(p) = -e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{-2x \not{p} + 4 m_0}{[\ell^2 - \Delta_\nu + i\epsilon]^2} - e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{-2x \not{p} + 4 m_0}{[\ell^2 - \Delta_\Lambda + i\epsilon]^2}$$

E fazendo a rotação de Wick:

$$\int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \left[ \frac{1}{\ell^2 - \Delta_\nu} - \frac{1}{\ell^2 - \Delta_\Lambda} \right] = \frac{i}{(4\pi)^2} \text{Ln} \left( \frac{\Delta_\Lambda}{\Delta_\nu} \right)$$

$$\Delta_\Lambda \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} x \Lambda^2$$

$$\Sigma_2(p) = \frac{x}{2\pi} \int_0^1 dx (2m_0 - x \not{p}) \text{Ln} \left( \frac{x \Lambda^2}{(1-x)m_0^2 + x\nu^2 - x(1-x)p^2} \right)$$

(eq. 132.1)

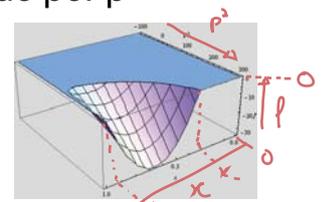
Podemos entender a estrutura analítica desta correção. A função Ln tem uma ramificação a partir do ponto em que seu argumento fica negativo, como o numerador é positivo a condição é:

$$f(x, p^2) = (1-x)m_0^2 + x\nu^2 - x(1-x)p^2 < 0$$

$0 < x < 1 \Rightarrow (> 0) \quad (> 0) \quad \hookrightarrow$  só será possível acima de algum valor mínimo de  $p^2 > 0$

Em termos de x, a função f é uma parábola cujo mínimo é determinado por  $p^2$

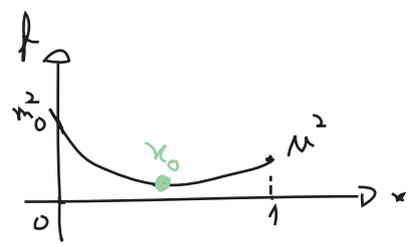
$$f(x, p^2) = p^2 x^2 + (\nu^2 - p^2 - m_0^2) x + m_0^2$$



$$\frac{d}{dx} f(x, p^2) = 2x p^2 + m_0^2 - p^2 - m_0^2 = 0$$

$$\hookrightarrow x_0 = \frac{m_0^2 + p^2 - \mu^2}{2p^2}$$

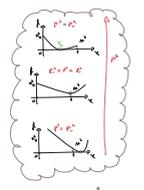
$$f(x_0, p^2) = -\frac{(m_0^2 - \mu^2)^2}{4p^2} + \frac{1}{2}(m_0^2 + \mu^2) - \frac{1}{4}p^2$$



O mínimo passa para baixo de zero em:

$$f(x_0, p^2) = 0 \rightarrow p_{\pm}^2 = (m_0 \pm \mu)^2$$

$$f < 0 \leftrightarrow \begin{cases} p^2 > p_+^2 \\ p^2 < p_-^2 \end{cases}$$



$$x_0(p_-^2) = \frac{m_0}{m_0 - \mu} \Rightarrow x = \frac{m_0}{m_0 - \mu} > 1$$

$$x_0(p_+^2) = \frac{m_0}{m_0 + \mu} \Rightarrow x = \frac{m_0}{m_0 + \mu} < 1$$

como  $f(1, p^2) = \mu^2 > 0 \forall p^2$  não há como uma região negativa passar de  $x > 1$  para  $x < 1$

Logo, para  $0 < x < 1$  temos uma ramificação que em:  $p^2 \geq (m_0 + \mu)^2$

o que está de acordo com o que vimos na pg 92 - temos uma ramificação a partir da energia em que podemos produzir duas partículas reais (nessa caso um elétron de massa  $m_0$  e um fóton de massa  $\mu$ )

Também é possível encontrar o polo, basta seguir o mesmo procedimento que usamos no caso do campo escalar para somar as contribuições 1PI (pg 100)

$$-i \Sigma(p) = -i \bar{\Sigma}(p) = \text{1PI} = \dots = 0$$

$\text{com } \langle \Omega | T \{ \bar{\psi}(x) \psi(x) \} | \Omega \rangle = \langle \Omega | T \{ j(x) \} | \Omega \rangle$

$$= \text{---} + \underbrace{\text{---} + \text{---}}_{-i \Sigma_x} + \underbrace{\text{---} + \text{---}}_{-i \Sigma_y} + \dots =$$

$$\int d^4x \langle \Omega | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(x) \} | \Omega \rangle e^{i p x} = \text{---} \rightarrow \text{---} =$$

$$= \text{---} + \text{---} \text{1PI} + \text{---} \text{1PI} \text{1PI} + \text{---} \text{1PI} \text{1PI} \text{1PI} + \dots =$$

$$= \frac{i}{\not{p} - m_0 - \Sigma(p)} \rightarrow$$

A massa física é dada por:

$$\left[ \not{p} - m_0 - \Sigma(p) \right]_{\not{p} = m} = 0 \quad (\text{eq. 133.1})$$

$$\delta m = m - m_0 = \sum (\not{p} = m)$$

Bem perto do polo vale:

$$\not{p} - m_0 - \Sigma(\not{p}) \approx (\not{p} - m) \cdot \left( 1 - \left. \frac{d\Sigma}{d\not{p}} \right|_{\not{p}=m} \right) + \mathcal{O}((\not{p} - m)^2)$$

$$\int d^4x \langle \Omega | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(0) \} | \Omega \rangle e^{i p x} = \frac{i \left( 1 - \left. \frac{d\Sigma}{d\not{p}} \right|_{\not{p}=m} \right)^{-1}}{\not{p} - m} = \frac{i (\not{p} + m) \left( 1 - \left. \frac{d\Sigma}{d\not{p}} \right|_{\not{p}} \right)^{-1}}{p^2 - m^2}$$

Comparando com o resultado obtido para o propagador completo (pg 92):

$$\int d^4x \langle \Omega | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(0) \} | \Omega \rangle e^{i p x} = \frac{i Z_2 (\not{p} + m)}{p^2 - m^2}$$

$$Z_2^{-1} = 1 - \left. \frac{d\Sigma}{d\not{p}} \right|_{\not{p}=m} \quad (\text{eq. 134.1})$$

rigorosamente seria  $m$ , mas a diferença entre  $m$  e  $m_0$  é proporcional a  $\alpha$ , o que já é uma correção superior (uma vez que já temos  $\alpha$  na frente de tudo)

Em ordem  $\alpha$ , as correções são:

$$\delta m = \sum_2 (\not{p} = m_0) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx (2m_0 - x m_0) L_N \left( \frac{x \Lambda^2}{(1-x)m_0^2 + x \Lambda^2 - x(1-x)m_0^2} \right) =$$

$$= \frac{\alpha}{2\pi} m_0 \int_0^1 dx (2-x) L_N \left( \frac{x \Lambda^2}{(1-x)^2 m_0^2 + x \Lambda^2} \right)$$

mathematica

Integrate[(Alpha)/2/Pi\*m0\*(2-x)\*Log[x\*(Lambda^2)/(Lambda^2-x\*(1-x)\*m0^2],{x,0,1},Assumptions->{Lambda>0,m0>0}]

$$I_\lambda = \frac{1}{8 m_0^3 \pi \sqrt{4 m_0^2 - \mu^2}}$$

$$\alpha \left( 2 \mu (-8 m_0^4 - 2 m_0^2 \mu^2 + \mu^4) \text{ArcTan} \left[ \frac{\mu}{\sqrt{4 m_0^2 - \mu^2}} \right] - \right.$$

$$\left. 2 \mu (-8 m_0^4 - 2 m_0^2 \mu^2 + \mu^4) \text{ArcTan} \left[ \frac{-2 m_0^2 + \mu^2}{\mu \sqrt{4 m_0^2 - \mu^2}} \right] + \right.$$

$$\left. \sqrt{4 m_0^2 - \mu^2} \left( 3 m_0^4 + 2 m_0^2 \mu^2 - 12 m_0^4 \text{Log} \left[ \frac{m_0}{\Lambda} \right] - 2 \mu^4 \text{Log} \left[ \frac{\mu}{m_0} \right] \right) \right)$$

Primeiramente, notemos que não há divergência quando  $\Lambda \rightarrow 0$

$$\lim_{\Lambda \rightarrow 0} \delta m = \frac{3 \alpha m_0}{8 \pi} \left( 1 + 2 \log \left[ \frac{\Lambda^2}{m_0^2} \right] \right) \quad \circ \circ \circ \quad \lim_{\Lambda \rightarrow 0} \tan^{-1} \left( \frac{1}{\Lambda} \right) = \frac{\pi}{2}$$

E que, de qualquer forma, a divergência ultravioleta está em um termo que independe de  $\mu$

$$\delta m \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{3 \alpha m_0}{4 \pi} \log \left[ \frac{\Lambda^2}{m_0^2} \right]$$

Temos então a massa do elétron sendo corrigida por uma grandeza divergente. Isto não é novidade, classicamente temos a energia de repouso de uma partícula dada pelo potencial eletrostático da seguinte forma (carga pontual):

$$\int d^3 R \frac{1}{2} |\vec{E}|^2 = \int d^3 R \frac{1}{2} \left( \frac{e}{4 \pi R^2} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{e^2}{(4 \pi)^2} \int d\Omega \int \frac{1}{R^2} dR$$

Dim [R] = GeV<sup>-1</sup>  
Dim [1/R<sup>2</sup> =  $\Lambda$ ] = GeV<sup>2</sup>

$$= \frac{\alpha}{2} \int_0^\infty \frac{1}{R^2} dR \sim \alpha \lim_{\Lambda \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{R} \right] = \alpha \Lambda$$

Nota-se de fato que a divergência quântica é menos forte que a clássica. Quanticamente temos uma divergência logarítmica com a escala de energia, classicamente ela é linear. Dá para entender que não poderia ser diferente por análise dimensional: suponha que  $m_0 = 0$ , pense no termo de massa:

$$\Psi = \Psi_L + \Psi_R \Rightarrow m_0 \bar{\Psi} \Psi = m_0 (\bar{\Psi}_L \Psi_R + \bar{\Psi}_R \Psi_L)$$

$$\bar{\Psi} \Psi = \bar{\Psi}_R \Psi_R + \bar{\Psi}_L \Psi_L$$

se este termo é zero, não temos mais nada na Lagrangeana que "acople"  $\Psi_L$  e  $\Psi_R$ . Com isso obtemos duas teorias separadas, uma para cada quiralidade, e não há correção radiativa que vá produzir um termo de massa.

$$\delta m \sim m_0 \quad (\text{note que isso quer dizer que um elétron de massa zero nunca ganharia massa})$$

Portanto a única dependência possível com a energia é logarítmica. Essa "pequena correção infinita" parece invalidar todo o procedimento perturbativo, mas logo veremos que podemos reescrever nossa lagrangeana em termos de parâmetros físicos finitos desde o começo, evitando assim o problema. Por enquanto assumiremos que já fizemos isso e trocar  $m_0$  por  $m$  nas contas que seguem

No caso de  $Z_2$  temos:

$$Z_2 = 1 + \delta Z_2$$

$$(1-x)^{-1} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1+x+O(x^2)$$

$$\delta Z_2 = Z_2 - 1 = \left( 1 - \frac{d\Sigma}{d\phi} \Big|_{\phi=m} \right)^{-1} - 1 \underset{\text{Lim } x \rightarrow 0}{\sim} \frac{d\Sigma_2}{d\phi} \Big|_{\phi=m}$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\phi} \left[ \frac{x}{2\pi} \int_0^1 dx (2m-x\phi) L_v \left( \frac{x\Lambda^2}{(1-x)m^2 + x\nu^2 - x(1-x)\phi^2} \right) \right] = \\ &= \frac{x}{2\pi} \int_0^1 dx (-x) L_v \left( \frac{x\Lambda^2}{(1-x)m^2 + x\nu^2 - x(1-x)\phi^2} \right) + \frac{x}{2\pi} \int_0^1 dx (2m-x\phi) \frac{(1-x)m^2 + x\nu^2 - x(1-x)\phi^2}{x\Lambda^2} \cdot \frac{-x\Lambda^2}{[(1-x)m^2 + x\nu^2 - x(1-x)\phi^2]^2} \cdot (-2x(1-x)\phi) = \\ &= \frac{x}{2\pi} \int_0^1 dx \left[ -x L_v \left( \frac{x\Lambda^2}{(1-x)m^2 + x\nu^2 - x(1-x)\phi^2} \right) + (2m-x\phi) \frac{2x(1-x)\phi}{[(1-x)m^2 + x\nu^2 - x(1-x)\phi^2]} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{d\Sigma_2}{d\phi} \Big|_{\phi=m} = \frac{x}{2\pi} \int_0^1 dx \left[ -x L_v \left( \frac{x\Lambda^2}{(1-x)m^2 + x\nu^2} \right) + (2-x) \frac{2x(1-x)m^2}{[(1-x)m^2 + x\nu^2]} \right]$$

O que nos dá a primeira contribuição perturbativa à "field strength renormalization"  $Z_2$ , do elétron. Com isso podemos, finalmente, voltar a questão da divergência ultravioleta do vértice da QED (se você já não lembra o que estamos fazendo, volte na página 131 e leia a introdução desta seção). Na pg 125 eliminamos a divergência ultravioleta do vértice fazendo uma subtração "força bruta", o que subtraímos foi:

$$\delta \bar{F}_1(0) = \left( \frac{x}{2\pi} \right) \int_0^1 dx \int_0^y dy \int_0^z dz \delta(x+y+z-1) \left\{ \ln \left[ \frac{z\Lambda^2}{(1-y)^2 m^2 + z\nu^2} \right] + \frac{(1-y+z^2)m^2}{(1-y)^2 m^2 + z\nu^2} \right\} =$$

na pg 125 fizemos a subtração antes de introduzir  $\mu$ , mas é mais geral pensar na introdução de  $\mu$  antes

$$= \left( \frac{x}{2\pi} \right) \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \left\{ \ln \left[ \frac{z\Lambda^2}{(1-y)^2 m^2 + z\nu^2} \right] + \frac{(1-y+z^2)m^2}{(1-y)^2 m^2 + z\nu^2} \right\} = \left( \frac{x}{2\pi} \right) \int_0^1 dz (1-z) \left\{ \ln \left[ \frac{z\Lambda^2}{(1-z)^2 m^2 + z\nu^2} \right] + \frac{(1-y+z^2)m^2}{(1-z)^2 m^2 + z\nu^2} \right\} =$$

Calculamos a soma destas duas expressões ( $x \rightarrow z$  em  $\delta Z_2$ ):

$$\delta \bar{F}_1(0) + \delta Z_2 = \left( \frac{x}{2\pi} \right) \int_0^1 dz \left\{ (1-2z) \ln \left[ \frac{z\Lambda^2}{(1-z)^2 m^2 + z\nu^2} \right] + \frac{P(z)}{(1-z)^2 m^2 + z\nu^2} \right\}$$

$$\begin{aligned} P(z) &= (2-z) 2z(1-z)m^2 + (1-z)(1-y+z^2)m^2 = \\ &= m^2(1-z)^2(z+1) \end{aligned}$$

$$\int_0^1 dz (1-2z) \ln \left[ \frac{z \Lambda^2}{(1-z)^2 m^2 + z \mu^2} \right] = \int_0^1 \underbrace{dz (1-2z)}_{d\mu} \underbrace{\ln[z]}_{\mu'} +$$

$$\mu = z(1-z)$$

$$d\mu = \frac{1}{z}$$

$$d\mu = \frac{2m^2(1-z) - \mu^2}{m^2(z-1)^2 + z\mu^2}$$

$$+ \int_0^1 \underbrace{dz (1-2z)}_{d\mu} \underbrace{\ln \left[ \frac{\Lambda^2}{(1-z)^2 m^2 + z \mu^2} \right]}_{\mu} =$$

$$= \underbrace{(z-z^2) \ln z} \Big|_0^1 + \underbrace{(z-z^2) \ln \left[ \frac{\Lambda^2}{(1-z)^2 m^2 + z \mu^2} \right]} \Big|_0^1 - \int_0^1 dz (1-z) +$$

$$- \int_0^1 dz z(1-z) \frac{2m^2(1-z) - \mu^2}{m^2(z-1)^2 + z\mu^2} =$$

$$= - \int_0^1 dz (1-z) - \int_0^1 dz \frac{(1-z) [2m^2(1-z)z - z\mu^2] + (1-z)(1-z^2)m^2 - (1-z)(1-z^2)m^2}{m^2(z-1)^2 + z\mu^2} =$$

$$= - \int_0^1 dz (1-z) - \int_0^1 dz \frac{(1-z) [2m^2(1-z)z - \underbrace{(1-z^2)m^2}_{\text{green}} - z\mu^2] + (1-z)(1-z^2)m^2}{m^2(z-1)^2 + z\mu^2} =$$

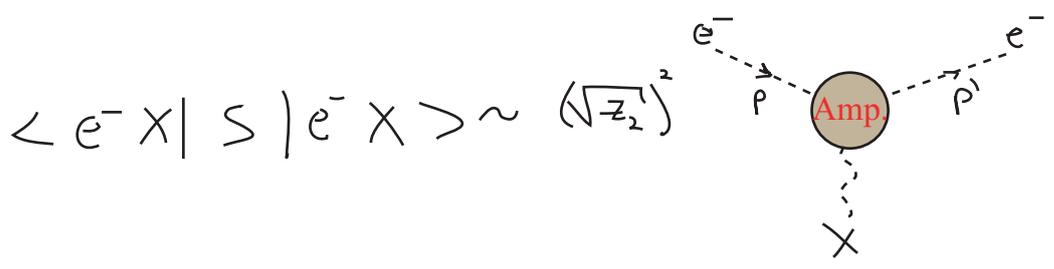
$$= - \int_0^1 dz (1-z) - \int_0^1 dz \left[ (1-z)(-1) + \frac{(1-z)(1-z^2)m^2}{m^2(z-1)^2 + z\mu^2} \right] = - \int_0^1 dz \frac{(1-z)(1-z^2)m^2}{m^2(z-1)^2 + z\mu^2}$$

$$\Delta F_1(0) + \Delta Z_2 = \left( \frac{\mu}{2\pi} \right) \int_0^1 dz \left\{ - \frac{(1-z)(1-z^2)m^2}{m^2(z-1)^2 + z\mu^2} + \overbrace{\frac{m^2(1-z)^2(z+1)}{(1-z)^2 m^2 + z\mu^2}}^{P(z)} \right\} = 0$$

$$(1-z)^2(z+1) - (1-z)(1-z^2) = 0$$

$$\delta \bar{F}_1(0) + \delta Z_2 = 0$$

Agora, considerando a fórmula de LSZ (eq. 98.1), sabemos que:



Por isso, em qualquer espalhamento que envolva este vértice, teremos não apenas  $-i e \Gamma^\mu$  mas sim:

$$-i e \Gamma^\mu \rightarrow -i e \Gamma^\mu Z_2$$

Considerando isso na definição dos fatores de forma obtemos:

$$Z_2 \Gamma^\mu = \gamma^\mu \bar{F}_1(q^2) + i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \bar{F}_2(q^2)$$

a "linha" é para indicar a nova correção, agora que consideramos  $Z_2$   
 todos os  $\delta$  são em ordem  $\alpha$

$$1 + \gamma^\mu \delta Z_2 + \delta \Gamma^\mu + \mathcal{O}(\alpha^2) = \gamma^\mu + \gamma^\mu \delta \bar{F}_1(q^2) + i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \delta \bar{F}_2(q^2)$$

$$\gamma^\mu \delta \bar{F}_1(q^2) + \frac{i \sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \delta \bar{F}_2(q^2)$$

$$\sigma^{\mu\nu} q_\nu \Rightarrow \delta \bar{F}_2(q^2) = \delta \bar{F}_2(0) \quad (\text{nada muda para esta estrutura})$$

$$\gamma^\mu \Rightarrow \delta \bar{F}_1(q^2) = \delta \bar{F}_1(q^2) + \delta Z_2 = \delta \bar{F}_1(q^2) - \delta \bar{F}_1(0)$$

que é exatamente a subtração que fizemos na pg 125

Isto nos mostra que, apesar de termos estas divergências circulando pela teoria, pelo menos nessa grandeza observável (o fator de forma elétrico) as divergências se cancelam. É claro que, feito desta forma, parece apenas um milagre numérico com pouca chance de se sustentar em ordens superiores de  $\alpha$ .

De uma forma mais geral, para que o fator de forma satisfaça as condições que desejamos:

$$\bar{F}_1(0) = 1$$

representa o que tínhamos antes da subtração na pg 38

podemos introduzir um novo fator Z no vértice, definido por:  $\Gamma^\mu(q^2=0) \equiv Z_1^{-1} \gamma^\mu$  (eq. 138.1)

e a condição em  $F_1$  para qualquer ordem de perturbação se torna:

$$Z_1 = Z_2$$

$$Z_2 \Gamma^N = \gamma^N F_1(q^2) + \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_2(q^2) \xrightarrow{q^2=0} Z_2 Z_1^{-1} \gamma^N = \gamma^N F_1(0) + \dots$$

$F_1(0) = Z_2 Z_1^{-1}$

Felizmente, podemos provar que isto é verdade usando as relações de Ward-Takahashi:

(eq 114.1)  $\Rightarrow -i q^\mu \Gamma_{ij;N}^{QED(3)}(p_1, p_2; q) = [S_F^c(p_1+q)]^{-1} - [S_F^c(p_1)]^{-1}$

$\Gamma_{ij;N}^{QED(3)}(p_1, p_2; q) \xrightarrow{q \rightarrow 0} Z_1^{-1} \gamma^N$        $S_F(p) = \frac{i Z_2}{\not{p} - m} + \dots$

$\left. \begin{matrix} p_1, p_2 \rightarrow m \\ q_\mu \rightarrow 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow -i q_\mu \Gamma^N \simeq 0 - i \underbrace{\Gamma^N(q=0)}_{Z_1^{-1} \gamma^N} q_\mu + \mathcal{O}(q^2) \simeq -i Z_1^{-1} \not{q}$

$\Rightarrow [S_F^c(p_1+q)]^{-1} - [S_F^c(p_1)]^{-1} \simeq -i Z_2^{-1} [(p_1+q) - m - \not{p}_1 + m] = -i Z_2^{-1} \not{q}$

$Z_1 = Z_2$

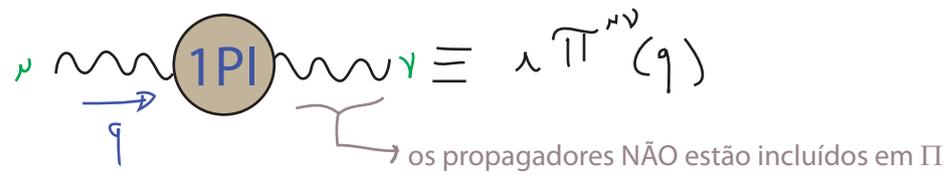
Em qualquer ordem de perturbação

Como uma nota final, note que as identidades de WT são consequência direta da simetria de gauge da teoria e garantiram o cancelamento de divergências em todas as ordens. Este é um resultado importante e bastante geral. No caso de simetrias não Abelianas trocamos as identidades de WT pelas **identidades de Slavnov-Taylor** que têm um papel central nos cancelamentos que precisam ocorrer nestas teorias. Este é mais um motivo para usarmos teorias de gauge.

**Auto-energia do fóton**

(Peskin 7.5)

Vamos ver agora o que ocorre com o propagador do fóton quando consideramos as correções radiativas. Começemos definindo:



A primeira correção obtida perturbativamente é:

$$i\Pi^{\mu\nu}(q) = (-ie)^2 (-1) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[ \gamma^\mu \frac{i}{\not{k}-m} \gamma^\nu \frac{i}{\not{k}+\not{q}-m} \right] \equiv i\Pi_2^{\mu\nu}(q)$$

Dada sua estrutura de Lorentz:  $\Pi^{\mu\nu}(q) = \Pi_A(q^2) g^{\mu\nu} + \Pi_B(q^2) q^\mu q^\nu$

mas também sabemos que (identidade de Ward):  $q_\mu \Pi^{\mu\nu}(q) = 0$

$$q_\mu \Pi^{\mu\nu}(q) = \Pi_A(q^2) q^\nu + \Pi_B(q^2) q^2 q^\nu = 0$$

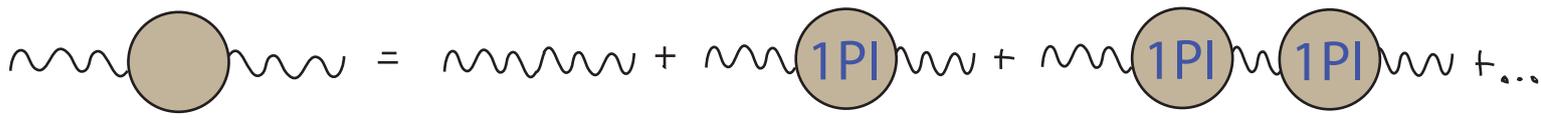
$$\Pi_A(q^2) = -\Pi_B(q^2) q^2 \equiv \Pi(q^2) q^2$$

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \Pi(q^2)$$

 (eq. 140.1)

Não esperamos que haja um polo em  $q^2 = 0$ , já que a QED não tem nenhum estado de uma partícula que contribua para este diagrama, então assumiremos que  $\Pi(q^2)$  é regular em  $q^2 = 0$ .

Podemos somar todas as contribuições 1PI para obter:



gauge de Feynman

$$= -\frac{i g^{\mu\nu}}{q^2} + -\frac{i g_{\mu\rho}}{q^2} \left[ i(q^2 g^{\rho\sigma} - q^\rho q^\sigma) \Pi(q^2) \right] \frac{-i g^{\sigma\nu}}{q^2} + \dots =$$

$$\left( g^{\mu\rho} g^{\rho\sigma} \frac{g_{\sigma\nu}}{q^2} - \frac{q^\rho q^\sigma}{q^2} \right) \Pi(q^2) = \delta_\nu^\mu - \frac{q^\mu q_\nu}{q^2} \Pi(q^2) \equiv \Delta_\nu^\mu \Pi(q^2)$$

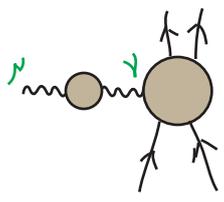
$$\Delta_\nu^\mu \Delta_\beta^\nu = \left( \delta_\nu^\mu - \frac{q^\mu q_\nu}{q^2} \right) \left( \delta_\beta^\nu - \frac{q^\nu q_\beta}{q^2} \right) = \delta_\beta^\mu - \frac{q^\mu q_\beta}{q^2} - \frac{q^\mu q_\beta}{q^2} + \frac{q^\mu q^2 q_\beta}{q^4} = \Delta_\beta^\mu$$

$$= -\frac{i g^{\mu\nu}}{q^2} - \frac{i g_{\mu\rho}}{q^2} \underbrace{\Delta_\sigma^\rho \Delta_\nu^\sigma}_{\Delta_\nu^\mu} \Pi(q^2) \Pi(q^2) + \dots =$$

$$= -\frac{i g_{\mu\nu}}{q^2} - \frac{i g_{\mu\rho}}{q^2} \Delta^\rho_\nu \left[ \Pi^1(q^2) + \Pi^2(q^2) + \Pi^3(q^2) + \dots \right] =$$

$$= -\frac{i g_{\mu\nu}}{q^2} - \frac{i g_{\mu\rho}}{q^2} \left( \delta^\rho_\nu - \frac{q^\rho q_\nu}{q^2} \right) \left( \frac{1}{1 - \Pi(q^2)} - 1 \right) = \frac{-i}{q^2(1 - \Pi(q^2))} \left( g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) - \frac{i}{q^2} \left( \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right)$$

Na prática, para o cálculo de elementos da matriz S, este propagador deverá estar conectado a uma linha fermiônica de um diagrama mais complicado:



$$= \frac{-i}{q^2(1 - \Pi(q^2))} \left( g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) - \frac{i}{q^2} \left( \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \cdot \mathcal{M}^\nu(q)$$

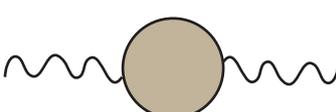
em algum lugar neste elemento de matriz temos:

$$\dots \frac{i}{\not{p}_1 + \not{q} - m} (-i e \gamma^\nu) \frac{i}{\not{p}_2 - m} \dots$$

E neste caso as identidades de WT nos garantem que:  $q_\nu \mathcal{M}^\nu(q) = 0$

É fácil obter isso a partir da eq. 114.1, basta notar o que ocorre se usarmos LSZ do dois lados da equação, buscando um elemento de matriz com dois elétrons reais. Do lado esquerdo temos dois polos, mas cada termo do lado direito tem apenas um, de forma que este não contribui para o elemento de matriz. Para mais detalhes veja a seção 7.4 do Peskin.

Portanto, para fim de cálculo de elementos de matriz S:

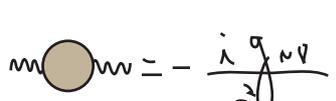


$$= \frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2 \left( 1 - \frac{\Pi(q^2)}{1} \right)}$$

REGULAR EM  $q^2 = 0$

Continuamos tendo um polo  $q^2 = 0$ , portanto a massa do fóton não muda. Note que as identidades de Ward-Takahashi (e portanto a simetria de gauge) estão por trás disso. Suponha que fosse possível ter uma correção com a forma proibida por WT, por exemplo:

$$i \Pi^{\mu\nu}(q) = i M^2 g^{\mu\nu} \left( \text{onde falta um termo } -\frac{M^2}{q^2} q^\mu q^\nu \text{ que garantiria WT} \right)$$



$$= -\frac{i g_{\mu\nu}}{q^2} + -\frac{i g_{\mu\rho}}{q^2} \left[ i M^2 g^{\rho\sigma} \right] \frac{-i g_{\sigma\nu}}{q^2} + \dots =$$

$$= -\frac{i g_{\mu\nu}}{q^2} - i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \left( \frac{M^2}{q^2} \right) - i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \left( \frac{M^2}{q^2} \right)^2 =$$

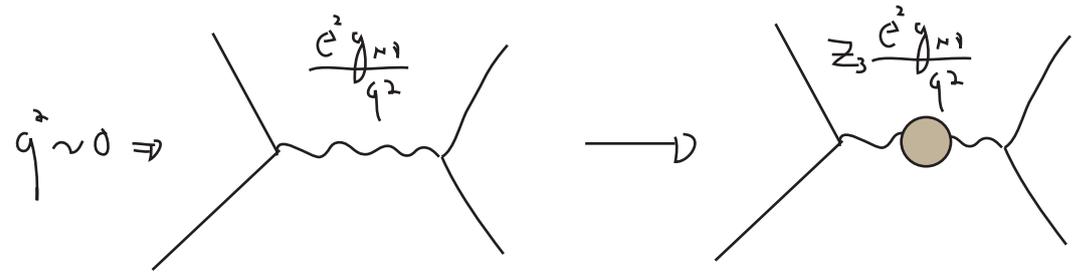
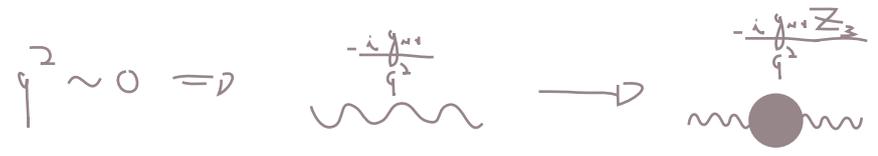
$$= -i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \left( 1 + \left( \frac{M^2}{q^2} \right) + \left( \frac{M^2}{q^2} \right)^2 + \dots \right) = -i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \frac{1}{1 - \frac{M^2}{q^2}} = -i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2 - M^2}$$

polo em M (desastre!)  
↓

O resíduo do polo em  $q^2 = 0$  é basicamente dado por:

$$Z_3 = \frac{1}{1 - \Pi(0)}$$

Qualquer espalhamento "soft" (com baixa troca de energia e momento) entre dois elétrons será modificado justamente por este fator:



Como temos um  $e^2$  acompanhando este fator  $Z_3$  podemos vê-lo como uma redefinição da carga:

$$e_r = \sqrt{Z_3} e$$

⇓ mudamos a notação (assim como fizemos com a massa)

$$e = \sqrt{Z_3} e_0$$

⇓ carga que aparece na lagrangeana (carga "nua")  
 ⇓ carga vestida ou física (o que medimos)

Mais uma vez temos a condição advinda da série perturbativa:

$$\begin{cases} e = e_0 + \mathcal{O}(\alpha) \\ Z_3 = 1 + \mathcal{O}(\alpha) \end{cases}$$

$\Pi(q^2)$  tem outro efeito:

$$q^2 \neq 0 \Rightarrow \frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2} \frac{e^2}{(1 - \Pi(q^2))} \approx \frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2} \frac{e^2 (1 - \Pi_2(0))}{(1 - \Pi_2(q^2))} \approx \frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2} \frac{e^2}{1 + \kappa}$$

$\frac{1}{1 + \kappa} \approx 1 - \kappa + \kappa^2 + \dots$   
 $\frac{1}{1 - \kappa} \approx 1 + \kappa + \kappa^2 + \dots$

$$e_0^2 = \frac{e^2}{Z_3} = e^2 (1 - \Pi(0)) \approx e^2 (1 - \Pi_2(0))$$

$$\approx \frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2} \frac{e^2}{(1 - \Pi_2(q^2))(1 + \Pi_2(0))} \approx \frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2} \frac{e^2}{[1 - (\Pi_2(q^2) - \Pi_2(0))]}$$

$\Pi_2(q^2) \Pi_2(0) \sim \mathcal{O}(\alpha^2)$

esta grandeza funciona como uma carga elétrica dependente do momento

Em suma, o efeito das correções ao propagador do fóton é o de mudar o acomplamento da teoria e torná-lo dependente de energia (passa a ser um running coupling):

$$\alpha_0 \rightarrow \alpha_{\text{EFF}}(q^2) = \frac{e_0^2/4\pi}{1 - \Pi(q^2)} \stackrel{\mathcal{O}(\alpha)}{\approx} \frac{\alpha}{[1 - (\Pi_2(q^2) - \Pi_2(0))]}$$

(eq. 143.1)

$$\alpha_{\text{EFF}}(0) \equiv \alpha$$

Calculemos rapidamente  $\Pi(q^2)$ :

$$i\Pi_2^{NN}(q) = -(-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[ \gamma^N \frac{i}{k-m} \gamma^N \frac{i}{k+q-m} \right]$$

rigorosamente teríamos que usar  $e_0$  e  $m_0$ , mas trocar por  $e$  e  $m$  só introduz um erro de ordem  $\alpha^2$   
 $e = e_0(1 + \mathcal{O}(\alpha)) \Rightarrow (e - e_0)^2 = \mathcal{O}(\alpha^2)$

Seguindo o procedimento usual (parametriz. de Feynman, rotação de Wick), chegamos a:

$$i\Pi_2^{NN}(q) = -4ie^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4l_E}{(2\pi)^4} \frac{-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} l_E^2 + g^{\mu\nu} l_E^2 - 2x(1-x)q^\mu q^\nu + g^{\mu\nu}(m^2 + x(1-x)q^2)}{(l_E^2 + \Delta)^2}$$

(eq. 143.2)

$$\Delta = m^2 - x(1-x)q^2$$

Que obviamente diverge (temos  $l^5$  no numerador). Temos que escolher algum método de regularização. Neste caso a escolha apresenta sutilezas devidas ao fato de estarmos lidando com uma função cuja forma está restrita pela identidade de WT. Se fizéssemos por exemplo a regularização por cut-off (que consiste simplesmente em não integrar no módulo do momento euclideo até infinito, mas sim até uma escala máxima  $\Lambda$ ):

$$\int_0^\infty dl_E \rightarrow \int_0^\Lambda dl_E \Rightarrow i\Pi_2^{NN}(q) \propto e^2 \Lambda^2 g^{\mu\nu}$$

falta um termo  $-\frac{e^2 \Lambda^2}{q^2} q^\mu q^\nu$   
para satisfazer WT

$$\hookrightarrow q_\mu \Pi_2^{\mu\nu} \sim e^2 \Lambda^2 q^\nu \neq 0$$

Este resultado viola a identidade de Ward e daria uma massa para o fóton

De fato não é a divergência em si que está violando a invariância de gauge (as id. WT.) mas sim a forma como escolhemos regularizá-la, a prova disso é que podemos encontrar outras regularizações que preservam as identidades de WT. De uma forma geral, o resultado deve independer da regularização escolhida e quando duas regularizações dão resultados diferentes é porque uma delas (ou as duas) está violando alguma(s) das simetrias da teoria. Se elevarmos as simetrias a categoria de axiomas da teoria, então temos um critério para escolher a regularização correta.

Dentro desta lógica concluímos que a regularização por cut-off feita acima não é boa. Uma outra opção é usar Pauli-Villars, como fizemos nas pgs 34-35, o que preservaria WT mas é um tanto complicado. Felizmente temos uma outra opção, a **regularização dimensional**.

A idéia da **regularização dimensional** é calcular os diagramas como função do número  $d$  de dimensões do espaço tempo. Para  $d$  suficientemente pequeno as integrais são finitas, e então voltamos para o mundo real fazendo  $d \rightarrow 4$

Um exemplo:

$$\int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} = \int \frac{d\mathcal{R}_d}{(2\pi)^d} \int_0^\infty d\ell_E \frac{\ell_E^{d-1}}{(\ell_E^2 + \Delta)^2}$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{\pi})^d &= \left( \int dx e^{-x^2} \right)^d = \int d^d x e^{-\sum_{i=1}^d x_i^2} = \int d\mathcal{R}_d \int_0^\infty dx x^{d-1} e^{-x^2} = \\ &= \left( \int d\mathcal{R}_d \right) \frac{1}{2} \int_0^\infty d(x^2) (x^2)^{\frac{d}{2}-1} e^{-x^2} = \left( \int d\mathcal{R}_d \right) \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \end{aligned}$$

$x^{d-2} = (x^2)^{\frac{d}{2}-1}$

$\int d\mathcal{R}_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$

(eq. 144.1)

$$\int_0^\infty d\ell_E \frac{\ell_E^{d-1}}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{2} \int_0^\infty d(\ell_E^2) \frac{(\ell_E^2)^{\frac{d}{2}-1}}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} = -\frac{1}{2} \int_1^\infty dx \frac{x^{1-\frac{d}{2}} (1-x)^{\frac{d}{2}-1}}{\Delta^{2-\frac{d}{2}}}$$

$x = \frac{\Delta}{(\ell_E^2 + \Delta)} \quad dx = -\frac{\Delta}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} d\ell_E^2$

$(\ell_E^2)^{\frac{d}{2}-1} = \left( \frac{\Delta - \Delta x}{x} \right)^{\frac{d}{2}-1} = x^{1-\frac{d}{2}} \Delta^{\frac{d}{2}-1} (1-x)^{\frac{d}{2}-1}$

Usando então a definição da função beta:

$$\int_0^1 dx x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} = B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

$$\int_0^\infty dl_E \frac{l_E^{d-1}}{(l_E^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-d/2} \frac{\Gamma(2-d/2)\Gamma(d/2)}{\Gamma(2)} \underset{1!}{}$$

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-d/2} \Gamma(2-d/2)\Gamma(d/2)$$

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-d/2} \Gamma(2-d/2)$$

(eq. 145.1)

$\Gamma(z)$  tem polos em todos os números inteiros negativos e em zero, logo teremos polos em

$$d = 4, 6, 8, \dots$$

Como estamos interessados no comportamento perto de  $d=4$ , podemos definir:  $\epsilon = 4-d$

$$\Gamma(2-d/2) = \Gamma(\frac{\epsilon}{2}) = \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon)$$

const. de Euler

$$-\frac{d}{2} = \frac{\epsilon}{2} - 2$$

$$\left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-d/2} = \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{\epsilon/2} = 1 + \frac{1}{2}\epsilon \ln\left(\frac{1}{\Delta}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

$$(4\pi)^{-d/2} = (4\pi)^{\frac{\epsilon-4}{2}} = (4\pi)^{-2} (4\pi)^{\frac{\epsilon}{2}} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left[ 1 + \frac{1}{2}\epsilon \ln(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right]$$

O produto das três expansões acima nos dá:

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} \underset{\substack{d \rightarrow 4 \\ \epsilon \rightarrow 0}}{\sim} \frac{1}{(4\pi)^2} \left[ \frac{2}{\epsilon} - \ln(\Delta) + \ln(4\pi) - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) \right]$$

Comparemos com o que teríamos obtido via regularização de Pauli-Villars

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{(4\pi)^2} \left[ L_N\left(\frac{\Lambda^2}{\Delta}\right) + \mathcal{O}(\Lambda^{-1}) \right]$$

Reg. Dimensional      Pauli-Villars

De onde vemos que:  $\frac{2}{\epsilon} \longleftrightarrow L_N(\Lambda^2)$

Isso também explica porque temos um logaritmo de algo com dimensão  $(\ln[\Delta])$ , a escala deste logaritmo está escondida no  $2/\epsilon$

Podemos também provar algumas fórmulas mais gerais:

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-d/2} \frac{\Gamma(n-d/2)}{\Gamma(n)} \quad (\text{eq. 146.1})$$

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{l_E^2}{(l_E^2 + \Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{d}{2} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-d/2-1} \frac{\Gamma(n-d/2-1)}{\Gamma(n)} \quad (\text{eq. 146.2})$$

Além disso é importante lembrar que:  $\begin{cases} g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = d \\ \text{portanto a substituição nas integrais (pg 119) fica: } l^\mu l^\nu \rightarrow \frac{1}{d} l^2 g^{\mu\nu} \\ g^\mu g^\nu g_\mu = -(2-\epsilon) g^\nu \\ g^\mu g^\nu g^\rho g_\mu = 4 g^{\nu\rho} - \epsilon g^{\nu\rho} \\ g^\mu g^\nu g^\rho g^\sigma g_\mu = -2 g^{\nu\rho} g^{\sigma\nu} + \epsilon g^{\nu\rho} g^\sigma \end{cases}$

Voltando ao cálculo de  $\Pi_2^{\mu\nu}(q)$  (eq. 143.2 - com pequenas mudanças para dar conta da mudança de dimensão), os termos com  $l^2$  no numerador nos dão:

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{(1 - \frac{2}{d}) g^{\mu\nu} l_E^2}{(l_E^2 + \Delta)^2} = (1 - \frac{2}{d}) g^{\mu\nu} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{d}{2} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{1-d/2} \Gamma(1-d/2) =$$

$$= - \underbrace{\left(1 - \frac{d}{2}\right) \Gamma(1-d/2)}^{\Gamma(2-d/2)} g^{\mu\nu} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-d/2} \Delta = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma(2-d/2) \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-d/2} (-\Delta g^{\mu\nu})$$

Calculando o termos restantes de 143.2 temos (fica como exercício):

$$i\tilde{\Pi}_2(q^2) = (q^2 g^{NV} - g^N g^V) i \Pi_2(q^2) \quad (\text{eq. 147.1})$$

Onde:

$$\Pi_2(q^2) = -\frac{8e^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \, x(1-x) \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-\frac{d}{2}}} \quad (\text{eq. 147.2})$$

De forma que, fazendo a regularização dimensional, obtemos exatamente a forma exigida pelas identidades de WT.

Fazendo o limite  $d \rightarrow 4$  ( $\epsilon \rightarrow 0$ ):

$$\Pi_2(q^2) \rightarrow -\frac{8e^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \, x(1-x) \left[ \frac{2}{\epsilon} - \ln(\Delta) + \ln(4\pi) - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) \right]$$

$-\frac{2\alpha}{\pi}$

a integral da parte divergente nos dá:  $-\frac{2\alpha}{\pi} \frac{1}{3\epsilon}$

Podemos obter a correção na carga:

$$\frac{e^2 - e_0^2}{e_0^2} = \frac{Z_3 e_0^2 - e_0^2}{e_0^2} = Z_3 - 1 = \frac{1}{1 - \Pi(0)} - 1 = \Pi_2(0) \approx -\frac{2\alpha}{3\pi\epsilon}$$

$\uparrow$   
 $\mathcal{O}(\epsilon)$

Temos mais uma vez uma diferença infinita entre o que observamos ( $e^2$ ) e o que aparece na lagrangeana ( $e_0^2$ ), mas essa diferença não é observável. O que é **realmente observável** é a dependência com  $q^2$  desta carga. É fácil ver que esta está livre de divergências:

$$(\text{eq. 56.1}) \Rightarrow \alpha_{\text{FFF}}(q^2) = \frac{\alpha}{[1 - \underbrace{(\Pi_2(q^2) - \Pi_2(0))}_{\tilde{\Pi}_2(q^2)}]}$$

$$\Delta = m^2 - x(1-x)q^2$$

$$\tilde{\Pi}_2(q^2) = -\frac{8e^2}{2\pi} \int_0^1 dx \, x(1-x) \left[ \frac{2}{\epsilon} - \ln(\Delta) + \ln(4\pi) - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) + \right. \\ \left. -\frac{2}{\epsilon} + \ln(m^2) - \ln(4\pi) + \gamma - \mathcal{O}(\epsilon) \right]$$

$$\tilde{\Pi}_2(q^2) = -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \, x(1-x) \ln\left(\frac{m^2}{m^2 - x(1-x)q^2}\right) \quad (\text{eq. 147.3})$$

Primeiro consideremos o caso em que  $q^2 < 0$



neste caso o argumento do logaritmo é positivo e  $\hat{\Pi}_2(q^2)$  é real e analítica em  $q^2$  o que está de acordo com o que assumimos na pg 140.



No caso em que  $q^2 > 0$  (canais s) a função é analítica até  $q^2 = 4m^2$ , e depois disso desenvolve um corte de ramificação (a partir deste ponto é possível produzir um par elétron-pósitron)

Vejamos como isto afeta o potencial elétrico entre cargas opostas (no limite não relativístico):

$$V(\vec{x}) = -\frac{e_0^2}{4\pi|\vec{x}|} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \frac{-e_0^2}{|\vec{q}|^2} \rightarrow \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \frac{-e^2}{|\vec{q}|^2 [1 - \hat{\Pi}_2(-|\vec{q}|^2)]}$$

$|\vec{q}|^2 \ll m^2$  → massa do elétron



$$\hat{\Pi}_2(-|\vec{q}|^2) \approx -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \left[ -\frac{x(1-x)|\vec{q}|^2}{m^2} + O\left(\frac{|\vec{q}|^2}{m^2}\right) \right] = -\frac{2\alpha}{\pi} \left( -\frac{|\vec{q}|^2}{30m^2} \right)$$

$$V(\vec{x}) = -e^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}}{|\vec{q}|^2 \left[ 1 - \frac{\alpha|\vec{q}|^2}{15\pi m^2} \right]} \approx -e^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}}{|\vec{q}|^2} \left[ 1 + \frac{\alpha|\vec{q}|^2}{15\pi m^2} \right]$$

$$= -e^2 \left[ \frac{1}{4\pi|\vec{x}|} + \frac{\alpha}{15\pi m^2} \delta^3(\vec{x}) \right] = -\frac{\alpha}{|\vec{x}|} - \frac{4\alpha^2}{15m^2} \delta^3(\vec{x})$$

O potencial muda para pequenas distâncias

Isto muda os níveis de energia do átomo de hidrogênio:

$$\Delta E = \int d^3x |\psi(\vec{x})|^2 \left( -\frac{4\alpha^2}{15m^2} \delta^3(\vec{x}) \right) = -\frac{4\alpha^2}{15m^2} |\psi(0)|^2$$

só estados de onda s tem  $\psi(0) \neq 0$

$$\Delta E_{2s} = -1,123 \cdot 10^{-7} \text{ eV}$$

A função delta no potencial é fruto de uma aproximação um pouco grosseira (quando expandimos em  $|\vec{q}|^2/m^2$ , podemos fazer melhor escrevendo:

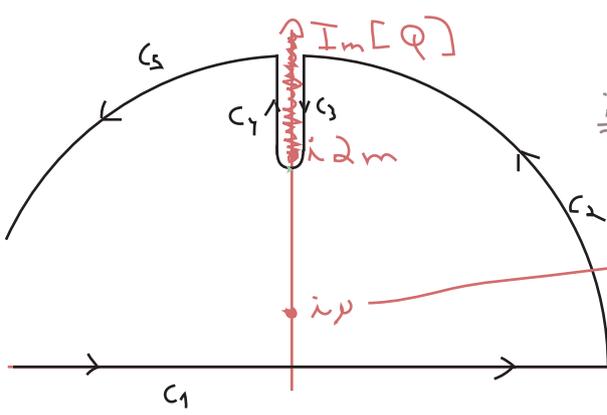
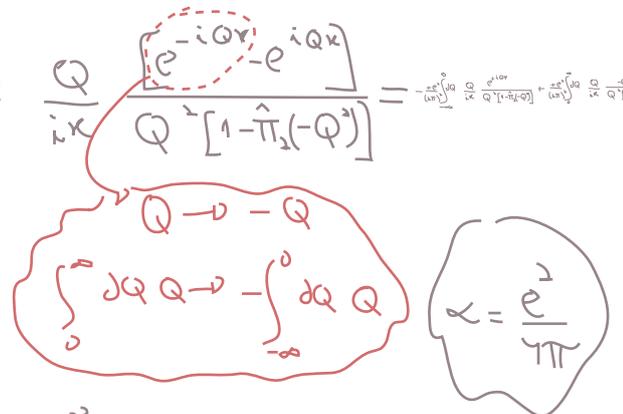
$$|\vec{q}| \equiv Q$$

$$V(\vec{x}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{-e^2 e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}}{Q^2 [1 - \hat{\pi}_2(-Q^2)]} = \frac{-e^2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dQ \int_0^\pi d\theta \sin(\theta) Q^2 \frac{e^{iQx \cos\theta}}{Q^2 [1 - \hat{\pi}_2(-Q^2)]} =$$

$$= \frac{+e^2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dQ \int_1^{-1} d(\cos(\theta)) Q^2 \frac{e^{iQx \cos\theta}}{Q^2 [1 - \hat{\pi}_2(-Q^2)]} = \frac{+e^2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dQ \frac{Q}{ix} \frac{[e^{-iQx} - e^{iQx}]}{Q^2 [1 - \hat{\pi}_2(-Q^2)]} =$$

$$= \frac{i\alpha}{\pi\kappa} \int_0^\infty dQ \frac{Q e^{iQx}}{Q^2 + \mu^2} [1 + \hat{\pi}_2(-Q^2)]$$

inserido para regularizar o polo em  $Q^2=0$



$$\frac{i\alpha}{\pi\kappa} \oint = \frac{i\alpha}{\pi\kappa} 2\pi i \cdot \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow 0} [1 + \hat{\pi}_2(-iN)] = -\frac{\alpha}{\kappa}$$

contribui para a integral dando o potencial  $-\frac{\alpha}{\kappa}$

$$\oint = \int_{C_1} + \int_{C_2+C_3} + \int_{C_4+C_1} \Rightarrow \frac{i\alpha}{\pi\kappa} \int_{C_1} = -\frac{\alpha}{\kappa} - \frac{i\alpha}{\pi\kappa} \int_{C_3+C_4}$$

$\hat{\pi}_2(Q^2)$  tem um Branch Cut para  $\begin{cases} -Q^2 > 4\mu^2 & \text{Im}[Q] > 2\mu \\ Q^2 \in \mathbb{R} & \text{Re}[Q] = 0 \end{cases}$

As integrais perto do corte (curvas  $C_3$  e  $C_4$ ) nos dão a correção do potencial:

$$\int_{C_3+C_4} = \int_{i2\mu+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dQ F(Q) + \int_{i\infty-\epsilon}^{i2\mu-\epsilon} dQ F(Q) = -\int_{i2\mu}^{i\infty} dQ F(Q+\epsilon) + \int_{i2\mu}^{i\infty} dQ F(Q-\epsilon) = 2i \text{Im} \left[ \int_{i2\mu}^{i\infty} dQ F(Q-\epsilon) \right]$$

$$F(Q) = \frac{Q e^{iQx}}{Q^2 + \mu^2} [1 + \hat{\pi}_2(-Q^2)]$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Re}[F(Q+\epsilon)] &= \text{Re}[F(Q-\epsilon)] \\ \text{Im}[F(Q+\epsilon)] &= -\text{Im}[F(Q-\epsilon)] \end{aligned} \right\}$$

$$SV(x) = \frac{2\alpha}{\pi\kappa} 2i \operatorname{Im} \left[ \int_{i2m}^{i\infty} \frac{Q e^{iQx}}{Q^2 + \mu^2} \left[ 1 + \hat{\Pi}_2(-(\mathcal{Q}-\epsilon)^2) \right] \right] =$$

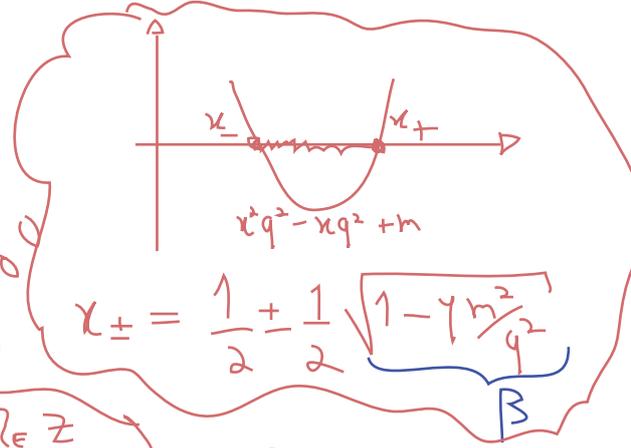
$Q - \epsilon \sim Q$        $q \equiv -iQ$

$$= \frac{2\alpha}{\pi\kappa} \operatorname{Im} \left[ \int_{2m}^{\infty} \frac{dq}{q} e^{-qx} \left[ 1 + \hat{\Pi}_2(-(\lambda q - \epsilon)^2) \right] \right] = \frac{2\alpha}{\pi\kappa} \int_{2m}^{\infty} \frac{dq}{q} e^{-qx} \operatorname{Im} \left[ \hat{\Pi}_2(q^2 + i\epsilon) \right]$$

Vamos obter a parte imaginária desta função para  $q^2 > 4m^2$  partindo de 147.3:

$$\int_0^1 dx \, x(1-x) \ln \left( \frac{m^2}{m^2 - x(1-x)q^2} \right)$$

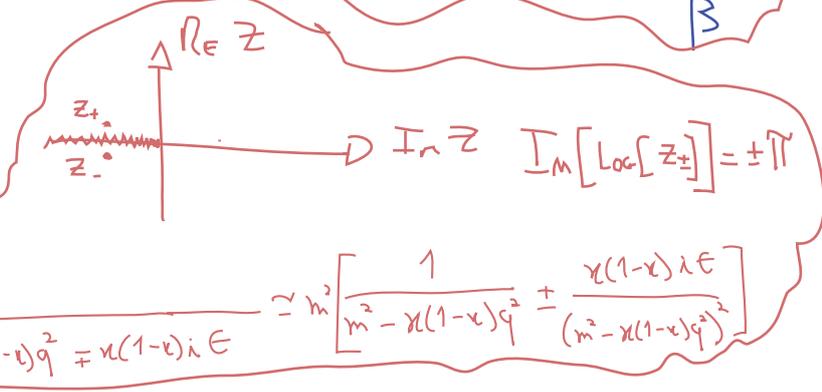
$\rho(x, q^2)$



$$\operatorname{Im}[\rho(x, q^2)] \neq 0 \iff m^2 - x(1-x)q^2 < 0$$

$x_- < x < x_+$

$\sqrt{1 - 4\frac{m^2}{q^2}} \in \mathbb{R} \quad (\forall q^2 > 4m^2)$



$$\operatorname{Im} \left[ \hat{\Pi}_2(q^2 + i\epsilon) \right] = -\frac{2\alpha}{\pi} (-\pi) \int_{x_-}^{x_+} dx (1-x)x =$$

$y \equiv x - \frac{1}{2}$

$$= +2\alpha \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dy \left( \frac{1}{4} - y^2 \right) = +\frac{2\alpha}{3} \sqrt{1 - 4\frac{m^2}{q^2}} \left( 1 + \frac{2m^2}{q^2} \right)$$

$$SV(x) = \frac{-2\alpha}{\pi\kappa} \int_{2m}^{\infty} \frac{dq}{q} e^{-qx} \frac{2\alpha}{3} \sqrt{1 - 4\frac{m^2}{q^2}} \left( 1 + \frac{2m^2}{q^2} \right)$$

Estudemos isto em duas regiões:

(I)  $x \gg \frac{1}{m} \implies$  Neste caso a exponencial  $e^{-qx}$  suprime fortemente o integrando e a principal contribuição vem do limite inferior. Neste caso:  $q \approx 2m$

$$\delta V(x) = \frac{-2\alpha}{\pi x} \int_0^\infty dt \frac{e^{-(t+2m)x}}{(t+2m)} \approx \frac{\alpha}{3} \sqrt{\frac{t}{t+4m}} \frac{(t+2m)^2 + 2m^2}{(t+2m)^2}$$

$t = q - 2m$

$$\approx \frac{-2\alpha}{\pi x} \int_0^\infty dt \frac{e^{-(t+2m)x}}{2m} \approx \frac{\alpha}{3} \sqrt{\frac{t}{4m}} \frac{3}{2} + \mathcal{O}(t)$$

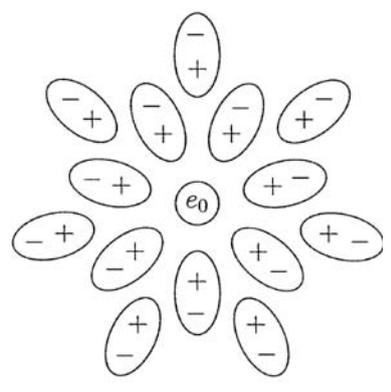
$$x \gg \frac{1}{m} \rightarrow \delta V(x) \approx -\frac{\alpha}{x} \frac{\alpha}{4\sqrt{\pi}} \frac{e^{-2mx}}{(mx)^{3/2}} \quad (\text{eq. 151.1})$$

$$V(x) = -\frac{\alpha}{x} \left( 1 + \frac{\alpha}{4\sqrt{\pi}} \frac{e^{-2mx}}{(mx)^{3/2}} + \dots \right)$$

Potencial de Uehling

O importante é notar que a correção é suprimida exponencialmente para grandes distâncias e a escala é dada pelo comprimento de onda Compton do elétron (de fato  $1/2m$ ). A interpretação é de que a distâncias menores que  $1/2m$  temos uma densidade considerável de pares virtuais elétron-pósitron, isto funciona como um dielétrico que esconde parte da carga.

Polarização do Vácuo:



Vejamos o que acontece quando vamos para o limite oposto:

$$\textcircled{\text{II}} \quad -q^2 \gg m^2 \Rightarrow \frac{1}{\Pi_2(q^2)} \approx -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \, x(1-x) \ln \left( \frac{m^2}{m^2 - x(1-x)q^2} \right)$$

(eq. 147.3)

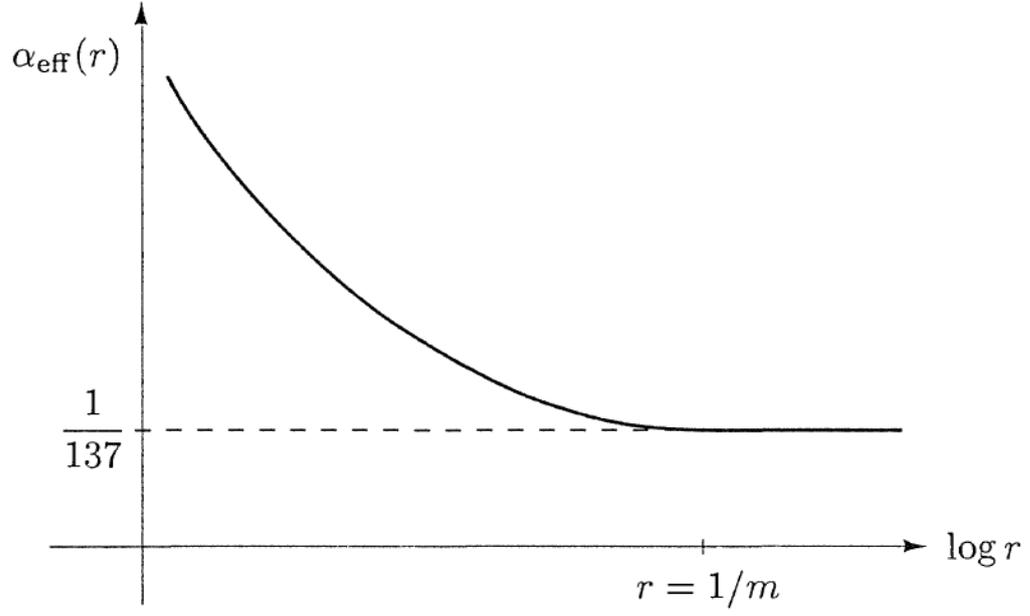
$+ \ln(m^2) - \ln(x(1-x)) - \ln(-q^2)$

$$\approx \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \, x(1-x) \left\{ \ln \left[ \frac{-q^2}{m^2} \right] + \ln(x(1-x)) \right\} = \frac{\alpha}{3\pi} \left[ \ln \left[ \frac{-q^2}{m^2} \right] - \frac{5}{3} + \mathcal{O} \left( \frac{m^2}{q^2} \right) \right]$$

O que na constante de acoplamento nos dá (eq. 143.1):

$$\alpha_{\text{EFF}}^2(q^2) = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \left[ -\frac{q^2}{m^2} e^{5/3} \right]}$$

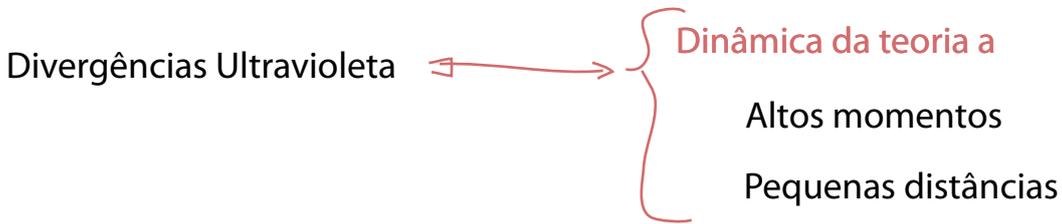
Para espalhamentos muito duros (ou seja, distância de interação pequenas),  $-q^2$  fica grande e o acoplamento efetivo aumenta. Podemos fazer uma imagem qualitativa disto fazendo  $q = 1/r$  e obtendo o gráfico abaixo:



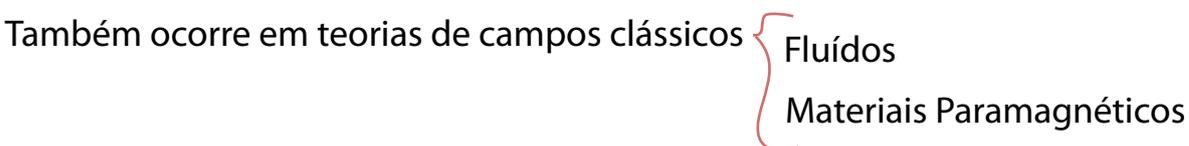
## Renormalização

(Peskin 10.1)

Vimos alguns cancelamentos de divergências no caso da QED, mas por enquanto pode parecer complicado descobrir quais diagramas temos que considerar para que estes cancelamentos ocorram. Além disso a presença de divergências põe em dúvida a validade da série perturbativa. Veremos agora como é possível modificar a teoria para escrevê-la em termos de grandezas físicas finitas desde o princípio de forma que tenhamos uma teoria que possa ser expandida perturbativamente. Começamos pensando um pouco sobre estas divergências.



deve existir um cut-off a partir do qual preciso de uma descrição mais fundamental  $\leftarrow$



Posso estudar ondas sonoras (ou de spin) e fluxos  $\leftarrow$

$\hookrightarrow$  Esperamos que esta descrição falhe quando chegamos a tamanhos e velocidades típicos dos átomos. Ou seja, quando a descrição contínua falha.

Conhecer detalhes da “**continuação ultravioleta**” (neste caso a física dos átomos - seus tamanhos, velocidades e spins) ajuda a obter a física em escalas de tamanhos maiores ou de menor energia (neste caso, viscosidades, suscetibilidade magnética, velocidade do som). No entanto, no caso de campos quânticos, não conhecemos a física a escalas realmente pequenas, sequer sabemos exatamente aonde está o cut-off. É importante nos interrogarmos em que condições é possível contruir teorias preditivas nessa situação, teorias que sejam **independentes do cut-off**.

A resposta para esta pergunta está intrinsecamente ligada ao tratamento das divergências, pois é a presença delas nas relações entre as versões **nuas** (antes de considerarmos interações) e **físicas** dos parametros da teoria (massas e acoplamentos) indicam que os valores destes parâmetros são muito influenciados pela continuação ultravioleta - pela física desconhecida. É por isso que eles não podem ser obtidos de primeiros princípios, tudo que podemos fazer é medi-los. Veremos no entanto que, satisfeitas certas condições, podemos obter o comportamento destes parâmetros até em regiões próximas do cut-off.

**Contagem de Divergências Ultravioleta - QED**

(Peskin 10.1, Ryder 9.1 ~ 9.5)

Comecemos tentando encontrar um modo de “descobrir” (sem de fato calcular o diagrama de Feynman) quando um diagrama tem divergências ultravioleta. Comecemos com a QED

$N_e$  = número de elétrons externos

$V$  = número de vértices

$N_\gamma$  = número de fótons externos

$L$  = número de loops

$P_e$  = número de propagadores de elétron

$P_\gamma$  = número de propagadores de fóton

Em um diagrama qualquer, temos uma divergência em potencial para cada loop:  $\int d^4k$

no entanto, os propagadores atenuam esta divergência, colocando potências de momento no denominador:



Definamos a **divergência superficial** do diagrama por:

$$D \equiv 4L - P_e - 2P_\gamma \quad (\text{eq. 153.1})$$

Inocentemente esperaríamos que o diagrama tenha uma divergência proporcional a  $\Lambda^D$  se  $D > 0$ , e proporcional a  $\ln(\Lambda)$  se  $D = 0$ .  $\Lambda$  é um cut-off de momento.

Esta análise simplista pode falhar por três motivos:

- (1) Diagramas sem loops nem propagadores tem  $D = 0$ , mas são convergentes
- (2) Se um diagrama contém um subdiagrama divergente, a divergência pode ser pior do que parece:

$L = 1$   
 $P_e = 2$   
 $P_f = 2$

$D = 4 - 2 - 2 = -2$

no entanto este diagrama  $\sim L_n(\Lambda)$

os momentos colocados no denominador por estes propagadores nada tem a ver com o que está sendo integrado no loop. Logo não contribuem para cancelar a divergência

- (3) Se alguns termos do diagrama são cancelados por força de alguma simetria (identidades de WT, por exemplo), a divergência pode ser menor ou nem existir:

$L = 1$   
 $P_e = 2$   
 $P_f = 0$

$D = 4 - 2 = 2$

no entanto:  $\sim L_n(\Lambda)$

Note que (pg 143) quando fizemos regularização por cut-off (que viola WT) obtivemos  $\sim \Lambda^2$  mas o resultado que obedece WT (Pauli-Villars) nos dá  $L_n(\Lambda)$

Ainda assim  $D$  é útil, veja que podemos escrevê-lo em função das pernas externas usando:

$$L = P_e + P_f - V + 1 \quad (\text{eq. 154.1})$$

ex: para  $V = 4$ , preciso de 4 propagadores para fechar o loop:

$V = 4$   
 $P_e + P_f = 4$   
 $L = 1$

diminuindo o número de propagadores, não consigo fechar o loop

$V = 4$   
 $P_e + P_f = 3$   
 $L = 0$

se aumento o número de propagadores fica inevitável aparecer mais loops:

$V = 4$   
 $P_e + P_f = 5$   
 $L = 2$

e também, que:

$$V = 2 P_f + N_f = \frac{1}{2} (2 P_e + N_e) \quad (\text{cada vértice tem 1 fóton e 2 elétrons, propagadores tem dois vértices e pernas externas apenas um}) \quad (\text{eq. 154.2})$$

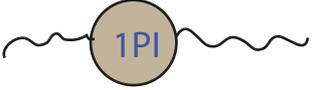
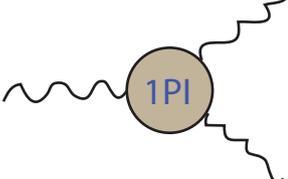
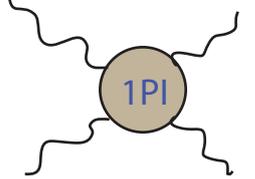
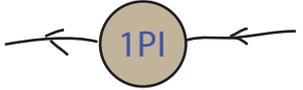
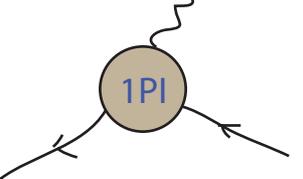
$$D = 4(P_e + P_\gamma - V + 1) - P_e - 2P_\gamma = 4P_e + 4P_\gamma - 2P_\gamma - N_\gamma - 3P_e - \frac{3}{2}N_e + 4 - P_e - 2P_\gamma =$$

$$\hookrightarrow \frac{V}{4} + \frac{3V}{4} = \frac{P_\gamma}{2} + \frac{N_\gamma}{4} + 3\frac{P_e}{4} + \frac{3N_e}{8}$$

$D = 4 - N_\gamma - \frac{3}{2} N_e$

 (eq. 155.1)

O que nos mostra que a divergência superficial só depende do número de pernas externas. Somente diagramas com poucas pernas tem  $D \geq 0$ . Temos poucas possibilidades na QED, de fato sete combinações (abaixo). E como as pernas externas não entram na integral de loop, podemos considerar a soma de todos os diagramas 1PI que contribuem para cada combinação de pernas externas. Qualquer diagrama que contenha divergências vai ter um destes como sub-diagrama:

A		$D = 4$	B		$D = 3$
	$N_e = N_\gamma = 0$				
C		$D = 2$	D		$D = 1$
E		$D = 0$	F		$D = 1$
G		$D = 0$			

O diagrama A é o mais divergente, mas não contribui para elementos de matriz S e nem pode estar contido em outros diagramas porque não tem pernas externas (de fato nem para Z ele contribui pois é cancelado na normalização).

Para cada linha externa de fóton, devemos ter dentro do produto temporalmente ordenado uma corrente eletromagnética:

$$j^\mu(z) = \bar{\psi}(z) \gamma^\mu \psi(z)$$

$$\langle \Omega | A_\mu(x) | \Omega \rangle \sim \langle 0 | A_\mu(x) | 0 \rangle + K_1 \langle 0 | T \{ A_\mu(x) A^\nu(z) j_\nu(z) \} | 0 \rangle +$$

$$+ K_2 \langle 0 | T \{ A_\mu(x) A^\nu(z) j_\nu(z) A^\rho(z') j_\rho(z') \} | 0 \rangle +$$

$$+ K_3 \langle 0 | T \{ A_\mu(x) A^\nu(z) j_\nu(z) A^\rho(z') j_\rho(z') A^\sigma(z'') j_\sigma(z'') \} | 0 \rangle + \dots =$$

$K_n =$  constantes e integrais em z

$$\sim K_1^D \langle 0 | T \{ j_\mu(z) \} | 0 \rangle + K_3^D \langle 0 | T \{ j_\mu(z) \overbrace{j_\nu(z')}^{\text{...}} \overbrace{j_\rho(z'')}^{\text{...}} \} | 0 \rangle + \dots \sim$$


$$\sim K \int \mathcal{D}z \langle \Omega | T \{ j_\mu(z) \} | \Omega \rangle$$

$$\langle \Omega | A_\mu(x) A_\nu(x') A_\rho(x'') | \Omega \rangle \sim \iiint \langle \Omega | j_\mu(x) j_\nu(x') j_\rho(x'') | \Omega \rangle$$

Como a QED é invariante por conjugação de carga:  $C | \Omega \rangle = | \Omega \rangle$

e temos:  $C \bar{\psi} \gamma^\mu \psi C^\dagger = - \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$

então:  $\langle \Omega | T \{ j_\mu(z) \} | \Omega \rangle = - \langle \Omega | T \{ j_\mu(z) \} | \Omega \rangle = 0$

$$\langle \Omega | T \{ j_{\mu_1}(z_1) \dots j_{\mu_n}(z_n) \} | \Omega \rangle = (-1)^n \langle \Omega | T \{ j_{\mu_1}(z_1) \dots j_{\mu_n}(z_n) \} | \Omega \rangle$$

Qualquer correlator com um número ímpar de fótons externos é zero. Isto elimina os diagramas B e D acima. O restante dos diagramas acima é diferente de zero, comecemos pensando sobre o diagrama F (auto energia do elétron) - ele é função do momento do elétron (p), a série em torno de p = 0 fica:

$$\leftarrow \text{1PI} \leftarrow = A_0 + A_1 \not{p} + A_2 p^2 + \dots$$

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d p^n} \left( \leftarrow \text{1PI} \leftarrow \right) \Big|_{p=0}$$

↳ não estamos nos preocupando com as divergências infravermelhas, assumimos que foram devidamente regularizadas, como fizemos na pg 126.

O momento p vai estar no denominador dos propagadores aparecendo na soma 1PI, quando calculamos os coeficientes fazemos:

$$\frac{d}{d p} \left( \frac{1}{\not{p} + \not{p} - m} \right) = - \frac{1}{(\not{p} + \not{p} - m)^2} \Rightarrow \text{coeficientes com n maior tem o grau de divergência menor}$$

↳ momento integrado

A divergência superficial de  $A_0$  (que é a maior) deve ser  $D = 1$ , isto quer dizer que a divergência de  $A_1$  é logarítmica e o restante dos coeficientes não diverge (é preciso cuidado aqui - pode

haver subdiagramas com divergências mais altas - veremos como tratar isso em breve). Além disso vimos que (pg 135) correções radiativas não podem dar massa ao elétron quiral (que não tem uma massa nua) e que a correção deve ser proporcional a massa, por análise dimensional vemos que a divergência é logarítmica. Temos portanto o caso em que uma simetria torna a divergência menor que a divergência superficial:

$$\leftarrow \text{1PI} \leftarrow = a_0 m L_N(\Lambda) + a_1 \not{v} L_N(\Lambda) + (\text{Termos Finitos})$$

(compare com a eq. 132.1)

Podemos seguir a mesma lógica no caso do diagrama G, neste caso, como a divergência superficial já é 0, qualquer derivada em qualquer um dos momentos externos já nos dá algo finito. Portanto a expansão nestas três variáveis só tem divergências no coeficiente  $A_0$ :

$$\text{1PI} \sim -i e \not{v} L_N(\Lambda) + (\text{Termos Finitos})$$

Como já discutimos (pg 140) a auto-energia do fóton (diagrama C) deve ter a forma:

$$\text{1PI} = (\delta^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \Pi(q^2)$$

o que já é a série de Taylor que procuramos, dentro de  $\Pi(q^2)$  temos os coeficientes  $A_n$ ,  $n = 2, 3, \dots$ . Os coeficientes  $A_0$  e  $A_1$  são zero, e a divergência superficial cai de 2 para 0 nos termos de  $\Pi(q^2)$  que não dependem do momento (os termos de  $\Pi(q^2)$  que dependem de  $q$  são finitos) - exatamente o que obtivemos na página 147.

**Observação importante:**

Temos aqui dois exemplos importantes do que chamamos de "massas protegidas" por simetrias. A simetria de gauge da QED impede o fóton de ter massa nua e impede, via WT, que ele ganhe massa a qualquer ordem de perturbação. Este mecanismo continua útil mesmo quando a simetria é **quebrada explicitamente!** A simetria quiral impede o elétron de ter massa nua e de ganhar via correções, mas de fato o elétron tem massa. No entanto o conhecimento de que no limite em que a massa nua vai para zero, todas as correções radiativas também devem ir, nos diz que estas devem ser proporcionais a massa. Esta simetria quebrada protege a massa de divergências mais intensas (em vez de lineares são logarítmicas).

Nos resta apenas o espalhamento fóton-fóton (diagrama E). Sabemos que (identidade de Ward):

$$k^\mu \left( \text{1PI} \right) = 0$$

É possível mostrar que isto implica na seguinte estrutura para a amplitude deste diagrama:

$$(g^{\mu\nu} k_1^\sigma - g^{\nu\sigma} k_1^\mu) \times (g^{\alpha\beta} k_2^\gamma - g^{\beta\gamma} k_2^\alpha) (g^{\delta\epsilon} k_3^\zeta - g^{\epsilon\zeta} k_3^\delta) (g^{\eta\theta} k_4^\iota - g^{\theta\iota} k_4^\eta)$$

Como há uma potência do momento em cada termo, temos que todos os coeficientes da série com  $n < 4$  devem ser zero. O primeiro termo diferente de zero tem quatro derivadas o que leva a  $D = -4$ .

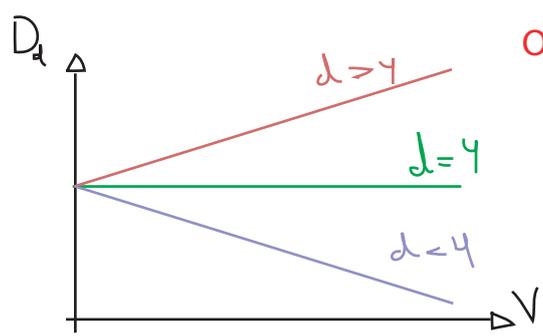
O que concluímos é que só existem três blocos básicos divergentes na QED, os diagramas **C** (auto-energia do fóton), **F** (auto-energia do elétron) e **G** (vértice). Os diagramas **G** e **C**, de fato possuem apenas um coeficiente divergente, ao passo que o diagrama **F** contém dois. Isto quer dizer que a QED tem um total de **quatro grandezas divergentes** que temos que absorver em redefinições de parâmetros para obter uma teoria finita. Veremos isto mais a frente

Suponha que seguíssemos o mesmo procedimento para QED em  $d$  dimensões. Neste caso:

$$D_d = \underbrace{dL - P_e - 2P_\gamma}_{\text{agora cada loop contribui com uma integral de momento d-dimensional}}$$

usando as eqs. 154.1 e 154.2 temos:

$$\begin{aligned} (154.2) \Rightarrow \left. \begin{aligned} P_\gamma &= \frac{V - N_\gamma}{2} \\ P_e &= \frac{2V - N_e}{2} \end{aligned} \right\} D_d &= d(P_e + P_\gamma - V + 1) - P_e - 2P_\gamma = (d-1)P_e + (d-2)P_\gamma - dV + d = \\ &= (d-1)V - \frac{(d-1)N_e}{2} + \frac{(d-2)V}{2} - \frac{(d-2)N_\gamma}{2} - dV + d = \\ &= d + \underbrace{\left(\frac{d-4}{2}\right)V}_{\text{O número de vértices só é cancelado em } d=4} - \left(\frac{d-2}{2}\right)N_\gamma - \left(\frac{d-1}{2}\right)N_e \end{aligned}$$



O número de vértices só é cancelado em  $d = 4$

$d < 4 \Rightarrow$  somente diagramas de ordem baixa (na expansão perturbativa) divergem superficialmente

A QED é uma **Teoria Super-Renormalizável**

$d = 4 \Rightarrow$  há um número finito de amplitudes divergentes, mas há um infinidade de diagramas contribuindo para cada uma destas divergências, já que as divergências ocorrem a todas as ordens na expansão perturbativa

A QED é uma **Teoria Renormalizável**

$d > 4 \Rightarrow$  qualquer amplitude é divergente, já que se formos mais longe na expansão perturbativa ( $V$  cresce) encontraremos novas divergências

A QED é uma **Teoria Não-Renormalizável**

Contagem de Divergências Ultravioleta - Campo Escalar  $\lambda\phi^n$

(Peskin 10.1, Ryder 9.1 ~ 9.5)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\nu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{n!} \phi^n \quad (\text{EM } d \text{ DIMENSÕES})$$

$n \geq 3$

- $N$  = número de linhas externas
- $V$  = número de vértices
- $P$  = número de propagadores
- $L$  = número de loops

Assim como antes (eq. 154.1):  $L = P - V + 1$

De cada vértice saem  $n$  linhas, então 154.2 fica:  $V = \frac{N + 2P}{n}$

$$D = dL - 2P =$$

$$= d(P - V + 1) - 2P = d + \left[ n \left( \frac{d-2}{2} \right) - d \right] V - \left( \frac{d-2}{2} \right) N$$

(eq. 159.1)

- Não-Renormalizável  $\left\{ \begin{array}{l} > 0 \Leftrightarrow n > \frac{2d}{d-2} \\ = 0 \Leftrightarrow n = \frac{2d}{d-2} \\ < 0 \Leftrightarrow n < \frac{2d}{d-2} \end{array} \right.$
- Renormalizável
- Super-Renormalizável

$d \leq 2 \Rightarrow \forall$  Teoria é Super-Renormalizável

$d=4$	{	$\lambda\phi^4$ renormalizável	}	$d=3$	{	$\lambda\phi^4$ super-renormalizável	}
$\frac{2d}{d-2} = 4$		$\lambda\phi^6$ não-renormalizável		$\frac{2d}{d-2} = 6$		$\lambda\phi^6$ renormalizável	

Outra forma de chegar a 159.1 é analisando a dimensão da lagrangeana. Em unidades naturais a ação tem que ser adimensional:

$$Dim[S] = 0 \dots 0 \quad \text{GeV}^0$$

$$S = \int d^d x \mathcal{L} \Rightarrow \underbrace{Dim[d^d x]}_{\text{GeV}^{-d}} + Dim[\mathcal{L}] = 0$$

$$\therefore Dim[\mathcal{L}] = d$$

Voltando a lagrangeana do campo escalar podemos ver que:

$$\text{Dim} \left[ \frac{1}{2} (\partial_\nu \phi)^2 \right] = d = 2 \underbrace{\text{Dim}[\partial_\nu \phi]}_{\text{Dim}[\phi] + 1}$$

$$\boxed{\text{Dim}[\phi] = \frac{d-2}{2}} \quad (\text{eq. 160.1})$$

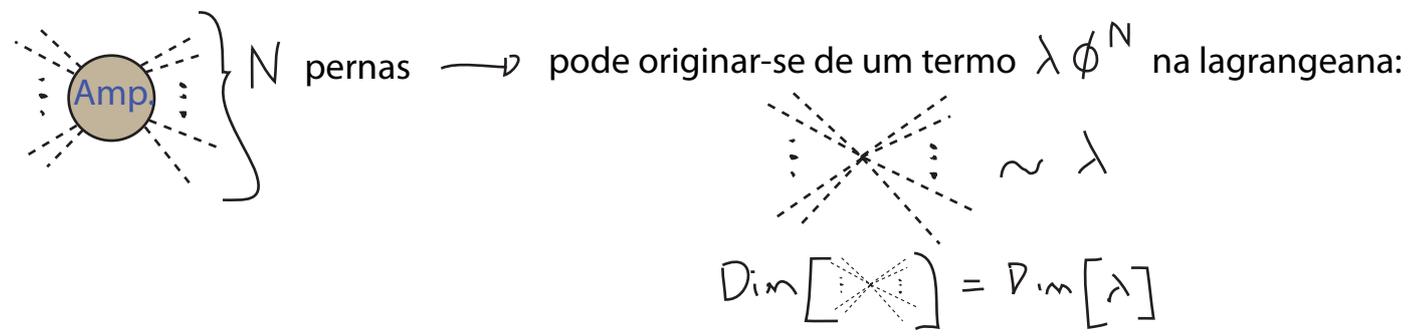
$$\text{Dim}[m^2 \phi^2] = d = 2 \text{Dim}[m] + 2 \underbrace{\text{Dim}[\phi]}_{d-2}$$

$$\text{Dim}[m] = 1 \quad (\text{para nossa sorte! 😊})$$

$$\text{Dim} \left[ \frac{\lambda}{n!} \phi^n \right] = d = \text{Dim}[\lambda] + n \text{Dim}[\phi]$$

$$\boxed{\text{Dim}[\lambda] = d - \frac{n(d-2)}{2}} \quad (\text{eq. 160.2})$$

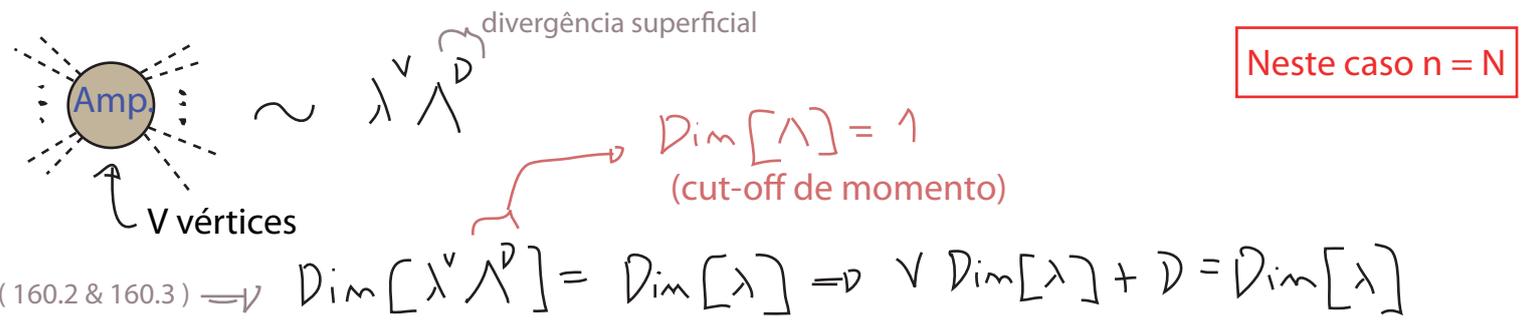
Suponha agora o seguinte diagrama:



Como devo somar sobre todas as possibilidades, qualquer diagrama com N linhas externas terá:

$$\boxed{\text{Dim} \left[ \text{Amp} \right] = d - \frac{N(d-2)}{2}} \quad (\text{eq. 160.3})$$

Em uma teoria apenas com o vértice  $\lambda \phi^N$  um diagrama com V vértices será proporcional a:



$$(160.2 \ \& \ 160.3) \Rightarrow \text{Dim}[\lambda^V \Lambda^D] = \text{Dim}[\lambda] \Rightarrow V \text{Dim}[\lambda] + D = \text{Dim}[\lambda]$$

$$\boxed{V \left( d - \frac{N(d-2)}{2} \right) + D = d - \frac{N(d-2)}{2}} \quad \begin{matrix} (\text{que concorda com 159.1} \\ \text{para } n = N) \\ (\text{eq. 160.4}) \end{matrix}$$

Aqui fica claro que o que multiplica  $V$  é  $-\text{Dim}[\lambda]$ :

$$D = -\text{Dim}[\lambda] V + \text{Dim}[\lambda]$$

podemos então dizer que:

$$\begin{aligned} \text{Dim}[\lambda] > 0 &\Rightarrow \text{Super-Renormalizável} \\ \text{Dim}[\lambda] = 0 &\Rightarrow \text{Renormalizável} \\ \text{Dim}[\lambda] < 0 &\Rightarrow \text{Não-Renormalizável} \end{aligned}$$

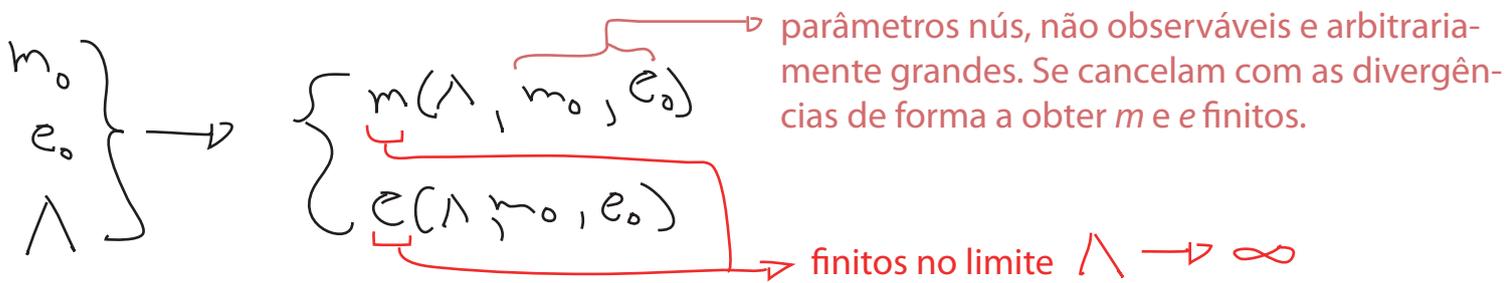
(161.1)

Esta análise poderia ter sido feita também para a QED ou qualquer outra teoria, com a mesma conclusão.

### Teoria Perturbativa Renormalizada

(Peskin 10.2, Ryder 9.3)

Nos preocuparemos agora em achar métodos gerais para redefinir nossa teoria em termos de grandezas observáveis e finitas. Note que no caso das correções radiativas para QED foi possível, uma vez que consideramos todos os diagramas e redefinimos as constantes, ter observáveis finitos. Essencialmente o que fizemos foi a troca:

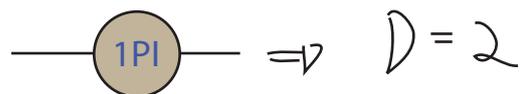


Colocando de forma simples: isto é a renormalização! Daqui para frente o que faremos é encontrar métodos práticos e confiáveis de fazer esta troca (já que até agora fomos fazendo de forma um tanto caso a caso).

Vejamos como fica a teoria  $\lambda\phi^4$ , analisando

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 - \frac{\lambda_0}{4!} \phi^4$$

Analisemos quais são os diagramas divergentes desta teoria. Como ela é simétrica por  $\phi \rightarrow -\phi$  todos os diagramas com um número ímpar de linhas externas dão zero. Segundo a eq. 159.1 (para  $d = 4$ , quando não importa o número de vértices):



$$\text{Diagram} \Rightarrow D = 0$$

Escrevendo uma série de Taylor (agora em  $p^2$ ) e estudando a divergência dos coeficientes (como fizemos na pg 156 para QED) obtemos:

$$\sim \Lambda^2 + p^2 L_N(\Lambda) + (\text{Termos Finitos})$$

$$\sim L_N(\Lambda) + (\text{Termos Finitos})$$

São três constantes divergentes que precisamos "absorver" em redefinições. Faremos isso redefinindo a constante de acoplamento, a massa e o campo em si. Lembrando que:

$$\int d^4x \langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(0) \} | \Omega \rangle e^{i p \cdot x} = \frac{i Z}{p^2 - m^2} + (\text{termos sem polo em } m^2)$$

Se quisermos obter um propagador próximo ao polo que seja parecido com o de uma partícula livre (só que com a massa física) devemos remover este Z. É possível fazer isso definindo:

$$\boxed{\phi \equiv Z^{1/2} \phi_r} \rightarrow \phi_r = Z^{-1/2} \phi \quad (\text{eq. 162.1})$$

O resultado desta substituição na dedução das pgs 89 e 90 será o de fazer sumir o fator Z em toda a conta. O mesmo ocorrerá com todos os Z's que aparecem na fórmula de LSZ (eq. 98.1).

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} Z (d_\nu \phi_r)^2 - \frac{1}{2} m_0^2 Z \phi_r^2 - \frac{\lambda_0}{4!} Z^2 \phi_r^4$$

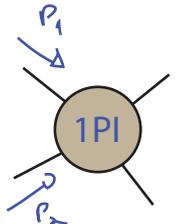
Ainda precisamos nos livrar de  $m_0$  e  $\lambda_0$ . Para tanto definamos:

$$\delta Z = Z - 1 \quad \delta m = m_0^2 Z - m^2 \quad \delta \lambda = \lambda_0 Z^2 - \lambda$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (d_\nu \phi_r)^2 + \underbrace{\delta Z \frac{1}{2} (d_\nu \phi_r)^2 - \frac{m^2}{2} \phi_r^2 - \frac{\delta m}{2} \phi_r^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi_r^4 - \frac{\delta \lambda}{4!} \phi_r^4}_{\text{contratermos}}$$

Importante: note que não somamos estes novos termos, apenas re-escrevemos a lagrangeana em função de novos campos e parâmetros.

Os parâmetros físicos,  $m$  e  $\lambda$ . A massa já está bem definida como a localização do menor polo da função de dois pontos. No caso de  $\lambda$ , temos liberdade de escolha. Escolheremos definir:



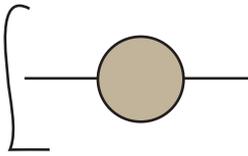
$$p = p_1 + p_2$$

$$\Rightarrow i \Gamma^{(2)}(p^2)$$

$$p^2 = 0 \Rightarrow i \Gamma^{(2)}(p^2) = -i \lambda$$

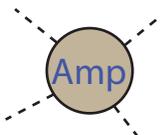
$$\lambda \equiv -\Gamma^{(2)}(p^2 = 0)$$

Essas definições podem ser resumidas em duas equações, chamadas de **condições de renormalização**:



$$\left[ \text{Diagram} = \frac{i}{p^2 - m^2} \right]_{p^2 = m^2}$$

esta equação fixa duas grandezas, a posição do polo e o seu resíduo ( $m$  e  $Z$ ).

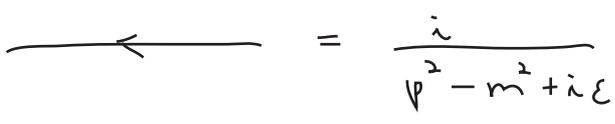


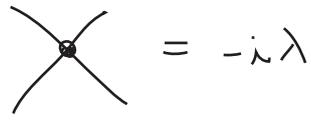
$$= -i \lambda$$

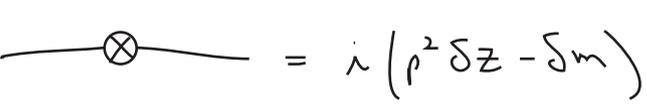
$p^2 = 0 \left\{ \begin{array}{l} s = 4m^2 \\ t = u = 0 \end{array} \right.$

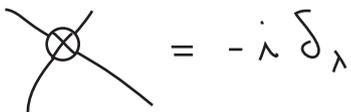
(eq. 163.1)

Esta "nova" lagrangeana tem as seguintes regras de Feynman:



$$= \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$


$$= -i \lambda$$


$$= i (p^2 \delta Z - \delta m)$$


$$= -i \delta \lambda$$

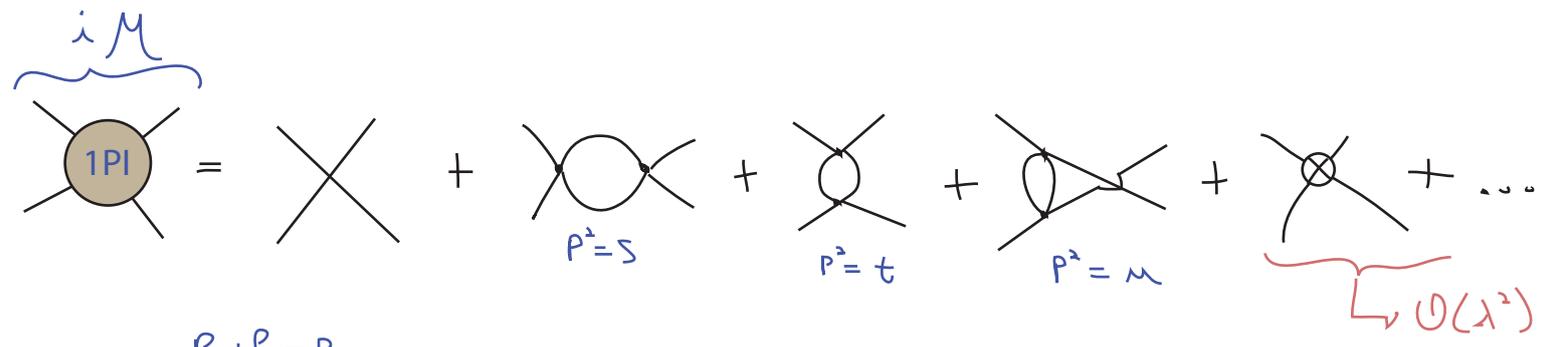
(notem que tratamos os contra termos como novas interações) e a utilização desta lagrangeana com contratermos é chamada de **Teoria de Perturbação Renormalizada**.

O procedimento a seguir é então o seguinte:

- (1) calculamos a amplitude desejada com as regras de Feynman novas
- (2) seguimos o procedimento usual para tratar loops (parametrização de Feynman, regularizações, etc...)
- (3) o resultado vai ser função dos parâmetros nos contratermos ( $\delta Z$ ,  $\delta m$  e  $\delta \lambda$  no caso escalar)
- (4) usamos as condições de renormalização (eq 163.1) para encontrar os parâmetros

As amplitudes resultantes devem ser finitas e independentes do regulador

Veamos como ficam as divergências de  $\lambda\phi^4$ :



$$i\mathcal{M} = \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2} \frac{i}{(k+p)^2 - m^2} = (-i\lambda)^2 i V(P^2)$$

$$i\mathcal{M} = -i\lambda + (-i\lambda)^2 [iV(s) + iV(t) + iV(u)] - i\delta_\lambda \quad (\text{eq. 164.1})$$

condição de normalização (eq. 163.1)  $\Rightarrow \left. \begin{matrix} s = 4m^2 \\ u = t = 0 \end{matrix} \right\} i\mathcal{M} = -i\lambda$   
 $\hookrightarrow (-i\lambda)^2 [iV(4m^2) + 2iV(0)] - i\delta_\lambda = 0$

$$\delta_\lambda = -\lambda^2 [V(4m^2) + 2V(0)] \quad (\text{eq. 164.2})$$

nesta ordem de perturbação

$$V(s) = \frac{i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2} \frac{1}{(k+p)^2 - m^2} =$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dy \frac{1}{[m^2 - y(1-y)P^2]^{2-d/2}} \right\} =$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ -\frac{1}{32\pi^2} \int_0^1 dy \left( \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \text{Li}[\gamma\pi] - \text{Li}[m^2 - y(1-y)s] \right) \right\} =$$

(eq. 164.3)

$$\delta_\lambda = \frac{\lambda^2}{2} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dy \left\{ \frac{1}{[m^2 - y(1-y)4m^2]^{2-d/2}} + \frac{2}{[m^2]^{2-d/2}} \right\} =$$





$\hookrightarrow n=2 \Rightarrow \Gamma(2 - \frac{d}{2}) \rightarrow 2 - \frac{d}{2} \leq 0 \quad d \geq 4$

$$\int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} \sim \text{Log} \Lambda \iff \begin{cases} \text{apena um polo em } d \leq 4 \\ \epsilon = 4 - d \Rightarrow \Gamma(\frac{\epsilon}{2}) \sim \frac{2}{\epsilon} + \dots \end{cases}$$

$$-i M^2(p^2) = \left( -\frac{i\lambda}{2} \right) \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(1 - \frac{d}{2})}{(m^2)^{1 - 1/2}} + i(p^2 \delta_Z - \delta_m)$$

como esta parte não depende de  $p^2$ , fica fácil satisfazer ambas as condições (165.1 e 165.2)

basta que:

$$\delta_Z = 0 \quad (\text{eq. 167.1})$$

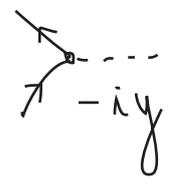
$$\delta_m = -\frac{\lambda}{2} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(1 - \frac{d}{2})}{(m^2)^{1 - 1/2}} \quad (\text{eq. 167.2})$$

e teremos:  $M^2(p^2) = 0 \quad \forall p^2$

( $\delta_Z$  não é zero em ordens superiores de perturbação, veremos isso mais adiante)

Note que a correção para a massa do escalar é quadraticamente divergente!

Esse cancelamento de  $\delta_Z$  em L.O. é uma peculiaridade de  $\lambda\phi^4$ , outras teorias escalares não terão esta propriedade. Tomemos, por exemplo, uma teoria escalar com acoplamentos de Yukawa:

$$\mathcal{L}_I = -\gamma \bar{\psi} \psi \phi$$


$$-i M^2(p^2) = \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} = \Delta = m_\phi^2 - \kappa(1-\kappa) p^2$$

$$-\gamma \gamma^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \frac{\ell^2 - \kappa(1-\kappa)p^2 + m^2}{(\ell^2 + \kappa(1-\kappa)p^2 - m^2)^2} = \frac{4i\gamma^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx (d-1) \frac{\Gamma(1 - \frac{d}{2})}{\Delta^{1 - 1/2}}$$

$$\int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{\ell_E^2}{\ell_E^2} \sim \int d\ell_E \frac{\ell_E^2}{\ell_E^2} \sim \Lambda^2$$

$$M^{\lambda}(p^2) = \frac{-4g^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx (d-1) \frac{\Gamma(1-d/2)}{\Delta^{1-d/2}} - (p^2 \delta Z - \delta m)$$

$$\frac{d}{dp^2} M^{\lambda}(p^2) = -\frac{4g^2(d-1)}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \left[ \underbrace{-x(1-x)}_{-\Gamma(2-d/2)} \left(\frac{d}{2}-1\right) \Gamma(1-d/2) (m^2 - x(1-x)p^2)^{d/2-2} \right] - \delta Z$$

$$\left. \frac{d}{dp^2} M^{\lambda}(p^2) \right|_{p^2=m^2} = 0 \Rightarrow \delta Z = -\frac{4g^2(d-1)}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{x(1-x) \Gamma(2-d/2)}{(m^2 - x(1-x)m^2)^{2-d/2}} \quad (\text{eq. 168.1})$$

~  $L_N(\Lambda^2)$

$$M^{\lambda}(m^2) = \frac{-4g^2(d-1)}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(1-d/2)}{(m^2 - x(1-x)m^2)^{1-d/2}} - (m^2 \delta Z - \delta m)$$

$$M^{\lambda}(m^2) = 0 \Rightarrow \delta m = \frac{4g^2(d-1)}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(1-d/2)}{(m^2 - x(1-x)m^2)^{1-d/2}} + m^2 \delta Z \quad (\text{eq. 168.2})$$

~  $\Lambda^2$

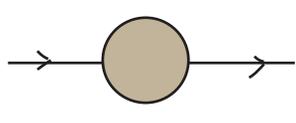
### Renormalização da QED

(Peskin 10.3, Ryder 9.5 a 9.7)

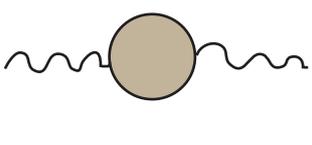
Tentemos agora repetir o processo acima para a QED

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 + \bar{\Psi} (i\not{\partial} - m_0) \Psi - e_0 \bar{\Psi} \not{A} \Psi$$

Vimos que a partir desta lagrangeana obtemos:



$$= \frac{i Z_2}{\not{p} - m} + \dots \quad (\text{pg 92})$$



$$= -\frac{i Z_3 g_{\mu\nu}}{q^2} + \dots \quad (\text{pg 142})$$

Começamos então com a renormalização dos campos:

$$\Psi \equiv Z_2^{1/2} \Psi_R \quad (\text{eq. 169.1})$$

$$A^\mu \equiv Z_3^{1/2} A_{R\mu} \quad (\text{eq. 169.2})$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} Z_3 (F_{\mu\nu})^2 + Z_2 \bar{\Psi}_R (i\not{\partial} - m_0) \Psi_R - e_0 Z_2 Z_3^{1/2} \bar{\Psi}_R \not{A} \Psi_R A_{R\mu}$$

A primeira condição de renormalização é a que define a carga física:

$$(e_0 Z_2 Z_3^{1/2} = e Z_1)_{q=0} \quad (\text{eq. 169.3})$$

isto é equivalente a definição de  $Z_1$  que usamos na eq 138.1 já que este é o fator que aparece no vértice (multiplicando a carga) quando  $q = 0$ . Ademais lembre que:

$$(\text{pg 142}) \Rightarrow Z_3^{1/2} e_0 = e$$

$$(\text{pg 139}) \Rightarrow Z_2 = Z_1$$

de forma que as definições dos  $Z$ 's que já vínhamos usando se mantêm.

Fazendo então as definições adicionais:

$$\begin{cases} \delta_3 = Z_3 - 1 \\ \delta_2 = Z_2 - 1 \\ \delta_m = Z_2 m_0 - m \\ \delta_1 = Z_1 - 1 = \frac{e_0}{e} Z_2 Z_3^{1/2} - 1 \end{cases}$$

(eq. 169.4)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} \underbrace{Z_3}_{1+\delta_3} (F_{\mu\nu})^2 + \underbrace{Z_2}_{1+\delta_2} \bar{\Psi}_R (i\not{\partial} - \underbrace{m_0}_{Z_2 m_0 = m + \delta_m}) \Psi_R - \underbrace{e_0 Z_2 Z_3^{1/2}}_{e Z_1 = e(1+\delta_1)} \bar{\Psi}_R \not{A} \Psi_R A_{R\mu} = \\ &= -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 + \bar{\Psi}_R (i\not{\partial} - m) \Psi_R - e \bar{\Psi}_R \not{A} \Psi_R A_{R\mu} + \\ &\quad -\frac{1}{4} \delta_3 (F_{\mu\nu})^2 + \bar{\Psi}_R (i\delta_2 \not{\partial} - \delta_m) \Psi_R - \delta_1 e \bar{\Psi}_R \not{A} \Psi_R A_{R\mu} \end{aligned}$$

cujas regras de Feynman são:

$$\begin{array}{c} \text{wavy line} \\ \xrightarrow{q} \end{array} = \frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{c} \text{solid line} \\ \xrightarrow{q} \end{array} = \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon}$$

$$\text{Diagram: fermion line with photon loop} = -ie\gamma^\mu$$

$$\text{Diagram: fermion line with photon self-energy} = i(\not{p}\delta_2 - \delta_1 m)$$

$$\text{Diagram: photon loop} = -i(g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu)\delta_3$$

$$\text{Diagram: fermion loop} = -ie\gamma^\mu\delta_4$$

$$\int d^4x \left[ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] = \int d^4x \left[ -\frac{1}{2} A_\mu (-\partial^2 g^{\mu\nu} + \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu \right]$$

As condições que fixam as normalizações dos propagadores e definem a carga e a massa do férmion podem ser escritas usando as definições que fizemos anteriormente:

$$\text{Diagram: photon self-energy (1PI)} = i\Pi^{\mu\nu}(q) = i(g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu)\Pi(q^2)$$

$$\text{Diagram: fermion self-energy (1PI)} = -i\Sigma(\not{p})$$

$$\text{Diagram: vertex correction (Amp)} = -ie\Gamma^\mu(p,p)$$

Só que agora estou REDEFININDO estas grandezas, todas incluem agora as contribuições que vem dos contratermos

A definição de  $\Gamma$  agora é feita com a carga física

Como discutido na página 158, temos quatro grandezas divergentes na QED, isto levou aos quatro  $\delta$ 's nos contratermos, as quatro condições que usamos para obtê-los são:

(eq. 170.1)  $\Sigma(\not{p}=m) = 0$  (a)

$$\Pi(q^2=0) = 0$$
 (b)

$$\frac{d}{d\not{p}} \Sigma(\not{p}) \Big|_{\not{p}=m} = 0$$
 (c)

$$-ie\Gamma^\mu(p'-p=0) = -ie\gamma^\mu$$
 (d)

Vejamos a aplicação destas condições e o valor dos contratermos em um loop. Já obtivemos a expressão para a auto-energia do elétron usando regularização de Pauli-Villars (eq. 132.1), se tivéssemos feito regularização dimensional, chegaríamos a:

antes da inclusão dos contratermos

$$-i \sum_2^* (\rho) = -i \frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{[(1-x)m^2 + x\mu^2 - x(1-x)\rho^2]^{2-d/2}} \times [dm - (d-2)x\rho]$$

Levando em conta a contribuição do contratermo ( $\rightarrow \otimes \rightarrow$ ) e usando a condição 170.1(a), temos:

$$\begin{aligned} (m\delta_2 - \delta m) &= \frac{e^2 m}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2}) (d - (d-2)x)}{[(1-x)m^2 + x\mu^2 - x(1-x)m^2]^{2-d/2}} = \\ &= \frac{e^2 m}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2}) [(1-x)d + 2x]}{[(1-x)^2 m^2 + x\mu^2]^{2-d/2}} \end{aligned} \quad (\text{eq. 171.1})$$

Para utilizar a condição 170.1(c) precisamos calcular:

$$\frac{d}{d\rho} \sum_2^* (\rho) = \frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{[(1-x)m^2 + x\mu^2 - x(1-x)\rho^2]^{2-d/2}} \times \left\{ \frac{-2x(1-x)\rho (\frac{d}{2} - 2)}{[(1-x)m^2 + x\mu^2 - x(1-x)\rho^2]} [dm - (d-2)x\rho] - (d-2)x \right\}$$

$\epsilon = d - 4$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho} \sum_2^* (\rho) \Big|_{\rho=m} &= \frac{e^2}{(4\pi)^{\frac{4-\epsilon}{2}}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(\frac{\epsilon}{2})}{[m^2(1-x)^2 + x\mu^2]^{2-d/2}} \left\{ - (2-\epsilon)x + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\epsilon}{2} \frac{2x(1-x)m}{[m^2(1-x)^2 + x\mu^2]} m [4 - 2x + \epsilon(x-1)] \right\} \end{aligned}$$

\* a divergência vem toda desta parte, todo o resto é proporcional a  $\epsilon$  e dá uma contribuição finita quando multiplicado por  $1/\epsilon$  que vem da função  $\Gamma$ .

Levando em conta a contribuição do contratermo  $(\rightarrow \otimes \rightarrow)$  e usando a condição 170.1(c), temos:

$$\delta_2 = \frac{e^2}{(4\pi)^{\frac{d-4}{2}}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(\frac{\epsilon}{2})}{[m^2(1-x)^2 + x\mu^2]^{2-\frac{d}{2}}} \left\{ (2-\epsilon)x - \epsilon \frac{x(1-x)m^2}{[m^2(1-x)^2 + x\mu^2]} \left[ 4 - 2x + \epsilon(x-1) \right] \right\} \quad (\text{eq. 172.1})$$

Incluindo  $(\nu \rightsquigarrow \otimes \nu)$  na contribuição à auto-energia do fóton que calculamos em 147.2 e usando 170.1(b) temos:

$$i\Pi_2^{\mu\nu}(q) = (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) i\Pi_2^*(q^2) - i(g^{\mu\kappa} q^\nu - q^\mu q^\nu) \delta_3 = i(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) (\Pi_2^* - \delta_3)$$

antes da inclusão dos contratermos

$$\Pi_2(q^2) = \Pi_2^*(q^2) - \delta_3 \xrightarrow{170.1(b)} \delta_3 = \Pi_2^*(0) \quad 147.2$$

$$\delta_3 = -\frac{8e^2}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_0^1 dx \left[ x(1-x) \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{[m^2]^{2-\frac{d}{2}}} \right] \quad (\text{eq. 172.2})$$

Para o vértice da QED, temos agora:

$$-ie\Gamma^\mu = -ie\Gamma^{*\mu} - ie\gamma^\mu \delta_1$$

antes da inclusão dos contratermos (mas sem Z<sub>2</sub> na LSZ!)

A condição 170.1(d) nos dá:  $(1 - \delta_1)\Gamma^\mu = \Gamma^{*\mu} (p' = p = 0)$  (pg 114)

$$\delta_1 = -\delta F_1(0) \quad \rightarrow \quad F_1 = 1 + \delta F_1(0)$$

$\gamma^\mu F_1(0) + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu F_2(q^2)}{2m} \xrightarrow{q=0} \gamma^\mu F_1(0)$

Como estamos fazendo tudo em regularização dimensional, precisamos escrever o resultado obtido em 123.2 nesse método, obtemos:

$$\delta F_1(q^2) = \frac{e^2}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \int dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left\{ \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-\frac{d}{2}}} \frac{(2-\epsilon)^2}{2} + \frac{\Gamma(3-\frac{d}{2})}{\Delta^{3-\frac{d}{2}}} \left[ q^2 [2(1-x)(1-y) - \epsilon xy] + m^2 [2(1-y+z)^2 - \epsilon(1-z)^2] \right] \right\}$$

Onde:  $\Delta = (1-\beta)^2 m^2 + z \nu^2 - \kappa \gamma \rho^2$

$$\delta_1 = -\frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}} \int dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left\{ \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{[(1-\beta)^2 m^2 + z \nu^2]^{2-d/2}} \frac{(2-\epsilon)^2}{2} + \frac{\Gamma(3-\frac{d}{2})}{[(1-\beta)^2 m^2 + z \nu^2]^{3-d/2}} m^2 [2(1-\gamma+\beta^2) - \epsilon(1-z)^2] \right\}$$

*(Handwritten note:  $\int dz (1-z)$  circled in red)*

(eq. 173.1)

As equações 171.1, 172.1, 172.2 e 173.1 fixam todos os coeficientes dos contratermos em ordem  $\alpha$ .

É possível mostrar (via integração por partes) que  $\delta_1 = \delta_2$  e que, portanto,  $z_1 = z_2$  (em ordem  $\alpha$ ). Podemos provar que isto continua valendo para qualquer ordem  $\alpha$  (o que não faremos aqui). Como um comentário final note o que aconteceria se pensarmos não apenas no elétron, mas também no muon, interagindo via QED. A equação 169.3 nos diz que:

elétron -  $e = e_0 \frac{z_2 z_3^{1/2}}{z_1}$

muon -  $e' = e_0 \frac{z_2' z_3^{1/2}}{z_1'}$

*(Handwritten note: Red arrow pointing to  $z_1'$  in the muon equation, with text: "auto-energia do muon e correção do vértice, ambas dependem da massa do muon")*

Corremos o risco do muon sentir uma carga física diferente da do elétron, mesmo que comecemos com a mesma carga nua. No entanto como  $Z_1 = Z_2$  eles se cancelam, e temos:

$$e = e' = e_0 z_3^{1/2}$$

As identidades de WT (ou seja, a simetria de Gauge) garantem que a correção à carga venham somente do fóton, independente de qual partícula esta interagindo. Isto garante que o acoplamento de gauge da teoria continue universal, e que todas as partículas sintam o mesmo "running" deste acoplamento.

### Renormalização em ordem superior

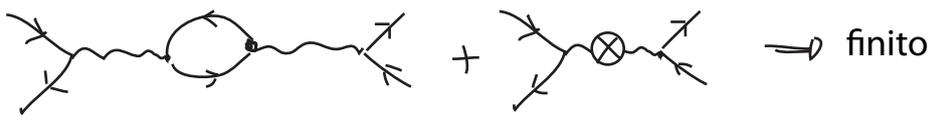
(Peskin 10.4, Ryder 9.7)

Vejam agora as sutilezas que aparecem quando consideramos diagramas com mais de um loop. Vimos que a divergência superficial de um diagrama pode nos enganar quando ele contém subdiagramas divergentes. No caso em que o diagrama que queremos calcular é convergente caso remo-

vamos o sub-diagrama divergente, fica relativamente simples:



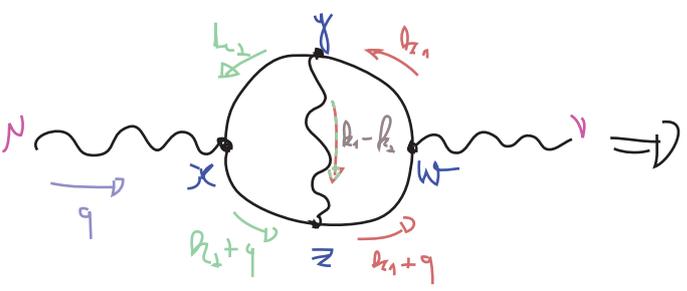
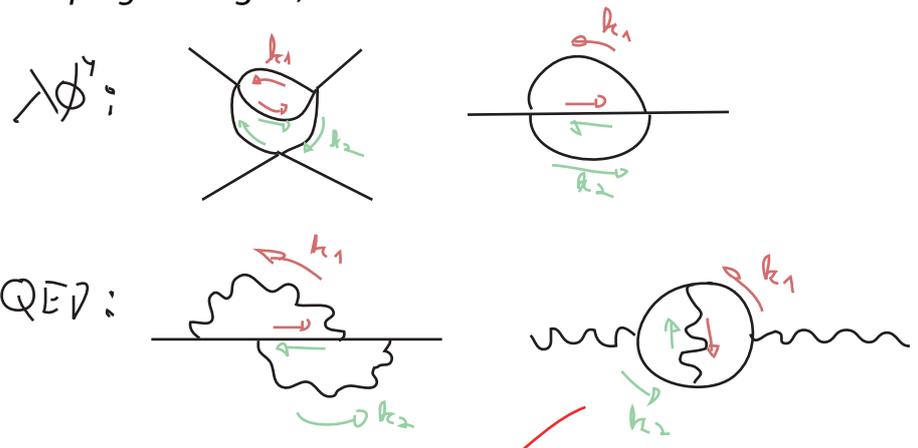
neste caso a divergência é cancelada pelo mesmo contratermo que cancelou a divergência do sub-diagrama:



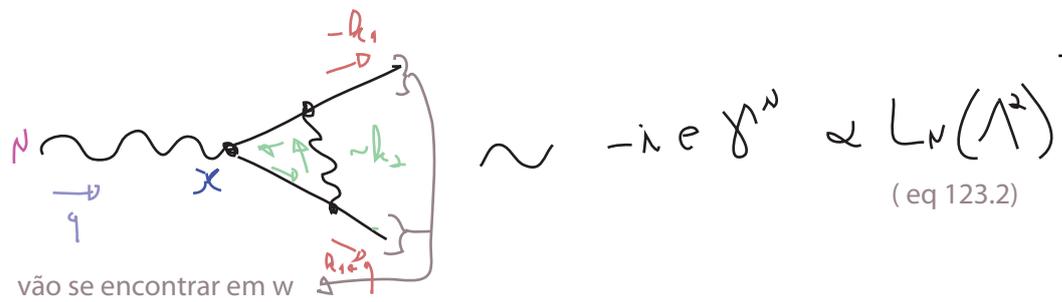
O mesmo vale para diagramas mais complicados. No exemplo abaixo basta somar os dois diagramas para cancelar a divergência na auto energia do fóton antes de fazer a integral no loop mais externo (que é finita)



A situação começa a ficar complicada quando temos diagramas em que dois loops divergentes compartilham um mesmo propagador, chamamos isto de **divergências sobrepostas** (*nested* ou *overlapping* em inglês)



Pensemos primeiro na região em que  $k_2$  é grande. Neste caso  $x, y$  e  $z$  tem que estar próximos (tanto o fóton quanto os eletrons no loop são muito virtuais) mas  $w$  pode ser mais distante. Podemos pensar nisso como uma correção de um fóton ao vértice em  $x$ :



Se voltamos com este vértice no diagrama completo antes de integrar em  $k_1$ , obteremos:

$$\text{Diagram} \sim \alpha (g^{\mu\nu} q^2 - g^\mu g^\nu) \Pi_2(q^2) \cdot \alpha L_N(\Lambda^2)$$

(pg 147)

$$\Pi_2(q^2) \sim \int_0^1 dx \, x(1-x) \Gamma(2 - \frac{d}{2}) \Delta^{\frac{d}{2}-2}$$

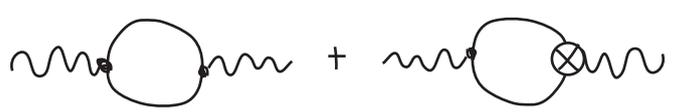
$\Delta \sim L_N(\Lambda^2) + L_N(\Delta) + \dots$   
 $\Delta \sim m^2 - x(1-x)q^2$   
 $\frac{1}{\Delta} \sim L_N(\Lambda^2)$

$$\text{Diagram} \sim \alpha^2 (L_N(\Lambda^2) + \frac{L_N(q^2)}{m^2}) L_N(\Lambda^2)$$

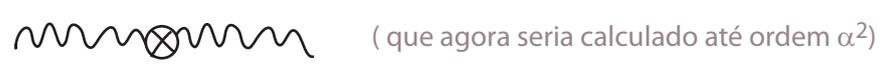
$q^2 \gg m^2$   
 ↳ domina quando  $k_1$  ou  $k_2$  é pequeno  
 ↳ domina quando  $k_1$  também é grande

Estes termos proporcionais a  $L_N(q^2) L_N(\Lambda^2)$  vão contra nossa expectativa de que as divergências aparecem multiplicando simples polinômios em  $q^2$  (pense no que fizemos na pag 157). Chamamos as divergências que de fato multiplicam polinômios em  $q^2$  de **divergências locais**, essas divergências que não multiplicam polinômios são chamadas de **divergências não locais**.  
 ↳ pois no espaço das posições são funções delta (ou derivadas da delta)

A aproximação acima indica que, na região em que um dos momentos é pequeno e o outro grande, o que temos é uma divergência local dentro de um loop não divergente. Isso sugere que os diagramas necessários para corrigir a divergência são:



De fato, se fizéssemos a conta veríamos que estes cancelam a divergência não local. Uma vez somados, resta apenas uma divergência local que é cancelada como de costume, pelo diagrama



É possível mostrar que isso funciona a todas as ordens de perturbação, contanto que a teoria seja renormalizável pelo critério da divergência superficial. Isto quer dizer que uma vez que colocemos os contratermos necessários para cancelar as divergências locais, todas as divergências (locais ou não) são removidas a todas as ordens - este resultado é conhecido como teorema BPHZ (Bogoliubov - Parasiuk - Hepp - Zimmermann)

# O Grupo de Renormalização

(Peskin 8 & 12.1, Ryder 9.4)

Vimos que, fazendo a renormalização de uma teoria, podemos obter resultados que independem da dinâmica no ultravioleta. As divergências somem e conseguimos uma teoria que funciona. No entanto é um tanto misterioso como as excitações de maior energia da teoria podem ter tão pouco efeito. Vamos então tentar ter uma imagem mais clara de como isso pode ocorrer.

Começemos pensando no funcional gerador de  $\lambda\phi^4$

$$Z[J] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\phi e^{i \int [\mathcal{L} + J\phi]} = \left( \prod_k \int d\phi(k) \right) e^{i \int [\mathcal{L} + J\phi]}$$

$$\phi(x) = \frac{1}{V} \sum_k e^{-i k \cdot x} \phi(k)$$

↑  
unitária

$$\mathcal{D}\phi(x) = \prod_k d\phi(k)$$

fazer uma regularização por cut-off significa integrar somente sobre:  $\phi(k) / |k| \leq \Lambda$   
 $k > \Lambda \rightarrow \phi(k) = 0$

pensando desta forma podemos estudar especificamente o efeito dos momentos da ordem do cut-off: basta integrar só sobre eles. Para evitar valores de  $k$  que, apesar de pequenos, tem valores enormes de  $k_0$  e  $\vec{k}$ , trabalharemos no espaço Euclideano.  $|k_E| \leq \Lambda$

Além disso, a teoria de campo no espaço Euclideano nos leva para perto de sistemas atômicos, onde podemos ter mais intuição do que significa o cut-off ultravioleta e a renormalização. Um bom exemplo de um sistema de mecânica estatística que é bem descrito por um campo escalar é um ferromagneto na teoria de Landau. A energia livre de Gibbs deste sistema é:

$$G = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} (\nabla s)^2 + b(T - T_c) s^2 + c s^4 - H s \right]$$

E a densidade de spin  $s(x)$  faz o papel do campo escalar, ao passo que o campo externo  $H$  é a fonte. Nesse caso é bastante óbvio que existe um cut-off físico, não faz sentido falar em flutuações da densidade de spin em distâncias menores que o espaçamento entre os átomos que compõe o material.

Pensemos um pouco sobre este sistema em termos de temperatura: se estamos longe de qualquer ponto crítico, é de se esperar que hajam flutuações de spin na escala atômica. No entanto assim que nos afastamos para escalas maiores, da ordem de algumas dezenas de distâncias atômicas, o sistema já deve parecer uniforme e nenhuma flutuação é visível. Podemos descrever este comportamento usando teoria de campos. Mas primeiro vamos lembrar um pouco da física por trás do problema

Estamos imaginando, por simplicidade, que se trata de um material com um eixo preferencial de magnetização

$T \sim 0$   
 $H = 0$  }  $\rightarrow$  Magnetização  $M$  paralela ou antiparalela a este eixo

$$M = \int d^3x S(x)$$

tanto o campo como os spins são definidos na direção deste eixo

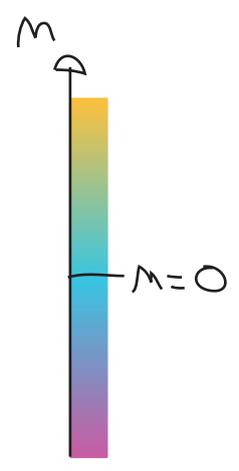
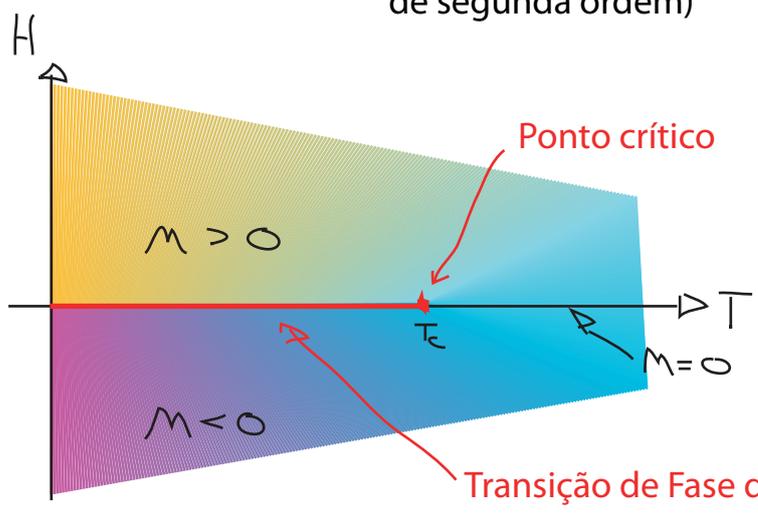
$T \sim 0$   
 $H \neq 0$  }  $\rightarrow$  Favorece  $M$  paralelo ou antiparalelo

Mudança de  $H$  pequeno e negativo para pequeno e positivo }  $\rightarrow$  Mudança descontínua em  $M$   
 $T \sim 0$  } **Transição de fase de primeira ordem**

$T_c > T > 0 \rightarrow$  Spins cada vez mais desordenados  $|M|$  vai diminuindo

$T = T_c$   
 $H = 0$  }  $\rightarrow M = 0$

$\hookrightarrow$  Valores grandes de  $H$  ainda induzem magnetização, mas a descontinuidade perto de  $H = 0$  desaparece. Este é o ponto crítico (ou transição de fase de segunda ordem)



Ao longo da linha da transição de fase os dois estados ( $M > 0$  e  $M < 0$ ) coexistem em equilíbrio. A energia livre de Gibbs só depende de  $M$  e  $T$  e é dada por:

$$\left. \frac{\partial G}{\partial M} \right|_T = H$$

Perto do ponto crítico  $M$  é pequeno e podemos expandir  $G(M)$  como:

$$G(M) = A(T) + B(T)M^2 + C(T)M^4$$

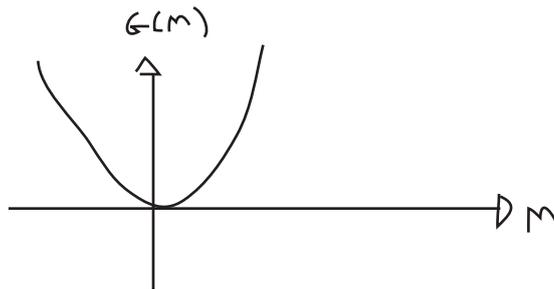
o sistema é simétrico por mudança no sinal de  $M$ , então  $G(M)$  tem que ser par

Para encontrar o estado do sistema em  $H = 0$ , devemos minimizar  $G$ :

$$H=0 \Rightarrow \frac{\partial G}{\partial M} = 2B(T)M + 4C(T)M^3 = 0$$

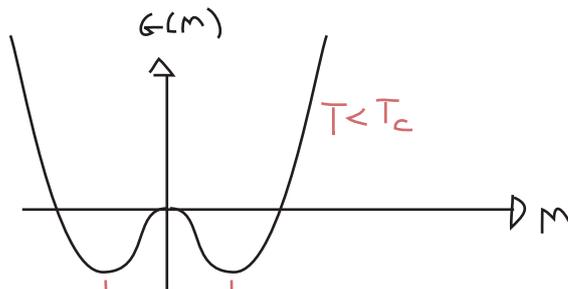
Resta fixar  $B$  e  $C$ , suponha que:

$$B, C > 0 \Rightarrow M = 0$$



No entanto se  $B$  puder ser negativo (digamos, abaixo de uma dada temperatura) então temos uma solução menos trivial:

$$\left. \begin{array}{l} C > 0 \\ B(T < T_c) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$



dois mínimos com magnetizações opostas

Fica claro que podemos modelar o sistema definindo:

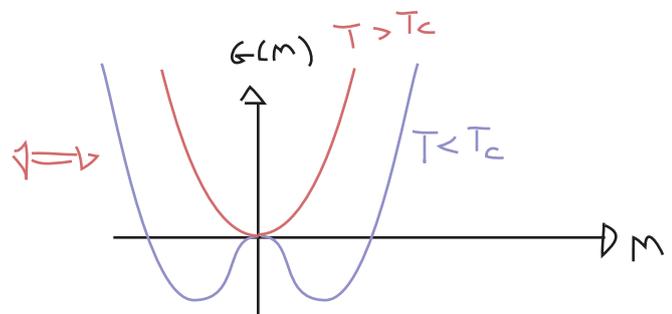
$$B(T) = b_5 (T - T_c) \quad C(T) = c \quad b_5, c > 0$$

Neste caso temos:

$$M = \begin{cases} 0 \\ \pm \left[ \frac{b_5}{2c} (T_c - T) \right]^{1/2} \end{cases}$$

$$T > T_c$$

$$T < T_c$$



Para obter o comportamento para  $H$  não nulo precisamos resolver

$$\frac{\partial G}{\partial M} \Big|_T = H \quad G = A(T) + B(T)M^2 + C(T)M^4$$

ou podemos minimizar (em relação a  $M$ ):  $G(M, H) = A(T) + B(T)M^2 + C(T)M^4 - HM$

Só temos o duplo mínimo para  $H = 0$  e  $T < T_c$ . Substituindo a definição de  $M$ , e as expressões para  $B(T)$  e  $C(T)$  na energia de Gibbs, obtemos a expressão que comparamos com o campo escalar:

$$G = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} (\nabla s)^2 + b(T - T_c) s^2 + c s^4 - H s \right] \quad H = H(x)$$

este termo adicional inclui a física microscópica, é o jeito mais simples de introduzir a tendência dos spins de se alinhar

Suponha que:  $H(x) = H_0 \delta^{(3)}(x)$  } Vamos ver qual é a resposta em pontos longe de  $x$ . Procurando o mínimo de  $G$  em relação a configurações do campo  $s$  obtemos:

$$0 = \delta G[S(x)] = -\nabla^2 s + 2b(T - T_c)s + 4cs^3 - H$$

$$\left. \begin{array}{l} T > T_c \Rightarrow \kappa \neq 0 \\ M \sim 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} S < 1 \\ S^3 \sim 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (-\nabla^2 + 2b(T - T_c)) S(x) = H(x)$$

$$H(x) = H_0 \delta^{(3)}(x) \Rightarrow (-\nabla^2 + 2b(T - T_c)) D(x) = H_0 \delta^{(3)}(x)$$

Função de Green!

Configuração do campo  $s(x)$  que surge quando o spin em  $x = 0$  é forçado a se alinhar com  $H$

$$D(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{H_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{|\mathbf{k}|^2 + 2b(T - T_c)} = \frac{H_0}{4\pi} \frac{1}{r} e^{-r/\xi}$$

comprimento de correlação  $\rightarrow \xi = [2b(T - T_c)]^{-1/2}$

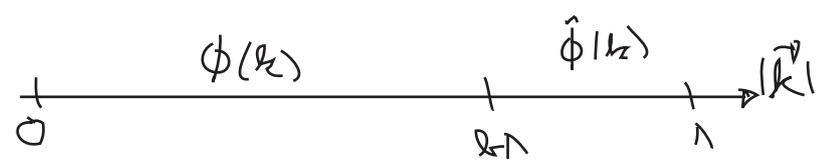
É importante perceber que, apesar do resultado depender dos coeficientes  $b$  e  $c$ , que são dados pela física no UV (física atômica), a lei de potência em  $(T - T_c)$  só depende de podermos expandir  $G$  em série, e da simetria que o torna par. De fato, obteríamos o mesmo resultado para qualquer sistema com esta simetria (existem vários exemplos). O fato de que podemos usar teoria de campos para descrever certas propriedades de sistemas de mecânica estatística perto do ponto crítico **independentemente de detalhes na escala atômica** (a chamada **universalidade**) está intimamente ligado ao fato de podermos construir TQCs **independentes de cut-off**.

Note que o valor de  $s(x)$  estará ligado ao valor em  $x=0$  dependendo de quão longe ele está de  $x = 0$ . A escala de "longe" é dada por  $\xi$ , note que este diverge quando chegamos perto da temperatura crítica - o sistema fica fortemente correlacionado. Voltando para nossa analogia com teoria quântica de campos, estamos falando de uma partícula escalar que carregaria a informação da existência da fonte em  $x = 0$ , e que a "massa" desta partícula ( $\xi^{-1}$ ) é da ordem de  $[b(T-T_c)]^{-1/2}$ . Se estivermos longe da temperatura crítica  $|T| \gg |T_c|$ , então o único parâmetro que determina a massa é  $B(T)$ , que vem da **escala ultravioleta da teoria**. O tamanho de  $m$  é então fixado pela única escala natural do sistema, portanto esperamos que  $m \sim \Lambda$  (que no exemplo seria o inverso do típico tamanho atômico).

No cálculos que fizemos até agora, estávamos interessados justamente no caso em que  $m \ll \Lambda$ , e ajustamos os parâmetros da teoria para obter esta situação. Com isso em mente, vamos ver como fica a separação de escalas na integral de trajetória.

$$Z = \int [D\phi]_{\Lambda} \text{Exp} \left\{ - \int d^4x \left[ \frac{1}{2} (\partial_{\mu} \phi)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 + \frac{\Delta_0}{4!} \phi^4 \right] \right\} \quad (\text{eq. 180.1})$$

$$[D\phi]_{\Lambda} \equiv \prod_{|k| < \Lambda} d\phi(k)$$



$$\phi(k) \rightarrow \begin{cases} \hat{\phi}(k) = \phi(k) & k-1 \leq |k| < \Lambda \\ 0 & |k| < k-1 \text{ ou } |k| \geq \Lambda \end{cases}$$

$$\phi(k) \rightarrow \begin{cases} \phi(k) & |k| < k-1 \\ 0 & |k| \geq k-1 \end{cases} \quad k < 1$$

$$\phi(k) \rightarrow \phi(k_2) + \hat{\phi}(k)$$

$$Z = \int D\phi \int D\hat{\phi} \text{Exp} \left\{ - \int d^4x \left[ \frac{1}{2} (\partial_{\mu} \phi + \partial_{\mu} \hat{\phi})^2 + \frac{1}{2} m_0^2 (\phi + \hat{\phi})^2 + \frac{\Delta_0}{4!} (\phi + \hat{\phi})^4 \right] \right\} =$$

Todos os termos do tipo  $\phi(k_2) \hat{\phi}(k)$  são iguais a zero (ortogonalidade para  $k \neq k'$ )

$$= \int D\phi e^{-\int \mathcal{L}(\phi)} \int D\hat{\phi} \text{Exp} \left\{ - \int d^4x \left[ \frac{1}{2} (\partial_{\mu} \hat{\phi})^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \hat{\phi}^2 + \lambda \left( \frac{1}{6} \phi^3 \hat{\phi} + \frac{1}{4} \phi^2 \hat{\phi}^2 + \frac{1}{6} \phi \hat{\phi}^3 + \frac{1}{4!} \hat{\phi}^4 \right) \right] \right\}$$

Queremos então integrar em  $\hat{\phi}$ , se tratarmos todos os termos (com exceção do cinético) como interações (incluindo o termo de massa), podemos escrevê-los como derivadas agindo em  $\text{Exp}[-\int \mathcal{L}_0(\hat{\phi})]$

Onde:

$$\int \mathcal{L}_0 = \int d^d x \partial_\nu \hat{\phi}(x) \partial^\nu \hat{\phi}(x) = \int_{|k| \leq \Lambda} d^d k \int_{|k'| \leq \Lambda} \frac{d^d k'}{(2\pi)^d} e^{-i k x} e^{-i k' x} k_\nu k'_\nu \hat{\phi}(k) \hat{\phi}(k') =$$

$$= \int_{|k| \leq \Lambda} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} k^2 \underbrace{\hat{\phi}(-k) \hat{\phi}(k)}_{\hat{\phi}^*(k)}$$

condição para que  $\phi(x)$  seja real, ver Peskin pg 285

Isso nos leva a um propagador (no espaço dos momentos):

$$\hat{\phi}(k) \hat{\phi}(p) = \frac{\int \mathcal{D}\hat{\phi} \hat{\phi}(k) \hat{\phi}(p) e^{-\int \mathcal{L}_0}}{\int \mathcal{D}\hat{\phi} e^{-\int \mathcal{L}_0}} = \frac{1}{k^2} (2\pi)^d \delta(k+p) \Theta(k)$$

$\Theta(k) = \begin{cases} 1 & |k| \leq \Lambda \\ 0 & \text{quer outro } k \end{cases}$

Os outros termos da lagrangeana de  $\hat{\phi}$  são tratados como interações em teoria de perturbação. Tomemos como exemplo o termo  $\hat{\phi}^2$ :

$$\text{Exp} \left\{ - \int d^d x \lambda_0 \left( \frac{1}{4} \hat{\phi}^2 \right) \right\} \simeq - \int d^d x \frac{\lambda_0}{4} \hat{\phi}^2 \hat{\phi} \hat{\phi}$$

Em princípio poderíamos calcular funções de dois pontos com quaisquer combinações de  $\phi$  e  $\hat{\phi}$ :

$$\langle \phi \phi e^{-\int \mathcal{L}_I} \rangle, \langle \hat{\phi} \hat{\phi} e^{-\int \mathcal{L}_I} \rangle, \langle \phi \hat{\phi} \phi \hat{\phi} e^{-\int \mathcal{L}_I} \rangle, \dots$$

Mas se considerarmos que momentos próximos ao cut-off só aparecerão em integrais de loop e nunca nas linhas externas dos diagramas, então os campos  $\hat{\phi}$  só aparecem em loops. Em termos do teorema de Wick temos:

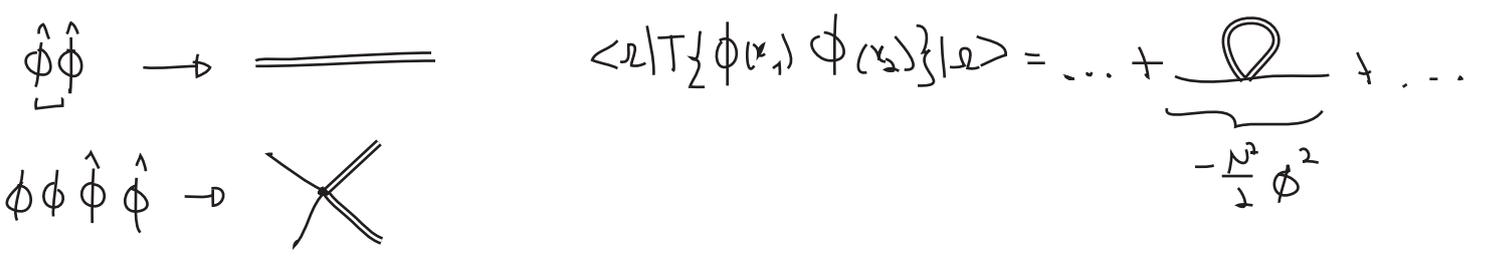
$$\left\langle \mathcal{O}_n(\phi) \left[ - \int \frac{\lambda_0}{4} \phi^2 \hat{\phi} \hat{\phi} \right] \right\rangle = \left\langle \mathcal{O}_n(\phi) \left[ - \int \frac{\lambda_0}{4} \phi^2 \underbrace{\hat{\phi} \hat{\phi}} \right] \right\rangle = \left\langle \mathcal{O}_n(\phi) \left[ - \int \frac{\lambda_0}{2} \phi^2 \right] \right\rangle$$

↙ operador com n campos  $\phi$       ↘ estamos assumindo que os campos externos serão  $\phi$  e não  $\hat{\phi}$

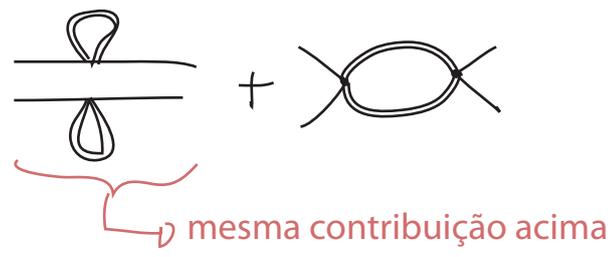
$$N = \frac{\lambda_0}{2} \int_{b-\Lambda \leq |k| < \Lambda} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2} = \frac{\lambda_0}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(d/2)} \frac{1 - b^{d-2}}{d-2} \Lambda^{d-2}$$

O importante a ser notado aqui é que este termo também seria obtido de um termo  $-\frac{N}{2} \phi^2$  na lagrangeana

Para ver o que ocorre em ordens superiores, é útil definir diagramas:



Em ordem  $\lambda_0^2$  temos, para a função de 4 pontos:



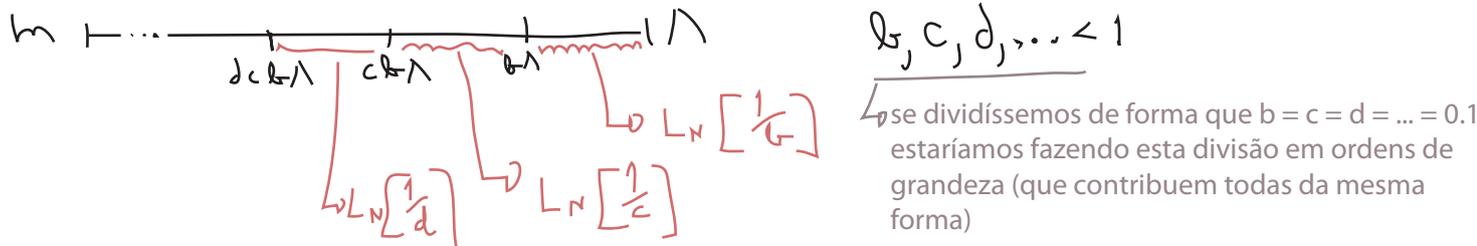
assumindo que o momento das pernas externas é muito pequeno comparado com  $b\Lambda$ , podemos ignorá-los e obter

$$L_0 = -\frac{1}{4!} \int d^d x \zeta \phi^4 \quad \text{equivale a} \quad \text{X} \quad -i\zeta$$

$$\zeta \equiv -4! \frac{2}{2!} \left(\frac{\lambda_0}{4}\right)^2 \int_{b-\Lambda \leq |k| < \Lambda} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left(\frac{1}{k^2}\right)^2 = \frac{-3\lambda_0^2}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(d/2)} \frac{(1 - b^{d-4})}{d-4} \Lambda^{d-4}$$

$$\stackrel{d \rightarrow 4}{=} -\frac{3\lambda_0^2}{16\pi^2} L_N \left[ \frac{1}{b} \right] \quad \text{(eq. 182.1)}$$

Note que se fizessemos mais subdivisões (multiplicativamente), cada intervalo teria uma contribuição similar:



Este procedimento gera contribuições não só a  $\phi^2$  e  $\phi^4$ , mas também a ordens superiores. O termo  $\phi^3 \hat{\phi}$  por exemplo:

$$\sim \frac{\lambda_0^2}{(p_1 + p_2 + p_3)^2} \ominus (p_1 + p_2 + p_3)$$

Obtemos acoplamentos com derivadas também. Para o diagrama abaixo por exemplo, desprezamos o momento das linhas extremas. Se ao invés disso fizermos uma expansão para o momento externo pequeno, o próximo termo seria:

$$= -\frac{1}{4!} \int d^d x \zeta \phi^4 - \frac{1}{4} \int d^d x \eta \phi^2 (\partial_\mu \phi)^2 + \dots$$

De forma geral obteremos todas as interações possíveis (de potências arbitrariamente altas) entre o campo  $\phi$  e suas derivadas. Temos diversas contribuições desconectadas que acabam sendo eliminadas pela normalização de qualquer correlator, então podemos finalmente escrever

$$Z = \frac{1}{N} \int \left[ \int \mathcal{D}\phi \right] e^{-\int d^d x \mathcal{L}_{EFF}}$$

$$\mathcal{L}_{EFF} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 + \frac{1}{4!} \lambda_0 \phi^4 + \left( \text{contribuições conectadas de } \hat{\phi} \right) \quad (\text{eq. 96.1})$$

Este processo de excluir um campo das linhas externas da teoria fazendo seu momento (ou massa) muito grande comparado com as outras é chamado de "integrate out" o campo (não conheço uma tradução para o português melhor do que "integrar" o campo). Façamos então uma comparação entre a lagrangiana original e a que obtivemos após a integração

$$k' = \frac{k}{\Lambda} \quad \kappa' = \kappa \Lambda$$

$$0 < k < \Lambda \rightarrow 0 < |k'| < 1$$

$$\int d^d x \mathcal{L}_{EFF} = \int d^d x \left[ \frac{1}{2} (1 + \Delta z) (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} (m_0^2 + \Delta m^2) \phi^2 + \frac{1}{4!} (\lambda_0 + \Delta \lambda) \phi^4 + \Delta C (\partial_\mu \phi)^4 + \Delta D \phi^6 + \dots \right]$$

contribuições da "out-integration" de  $\hat{\phi}$

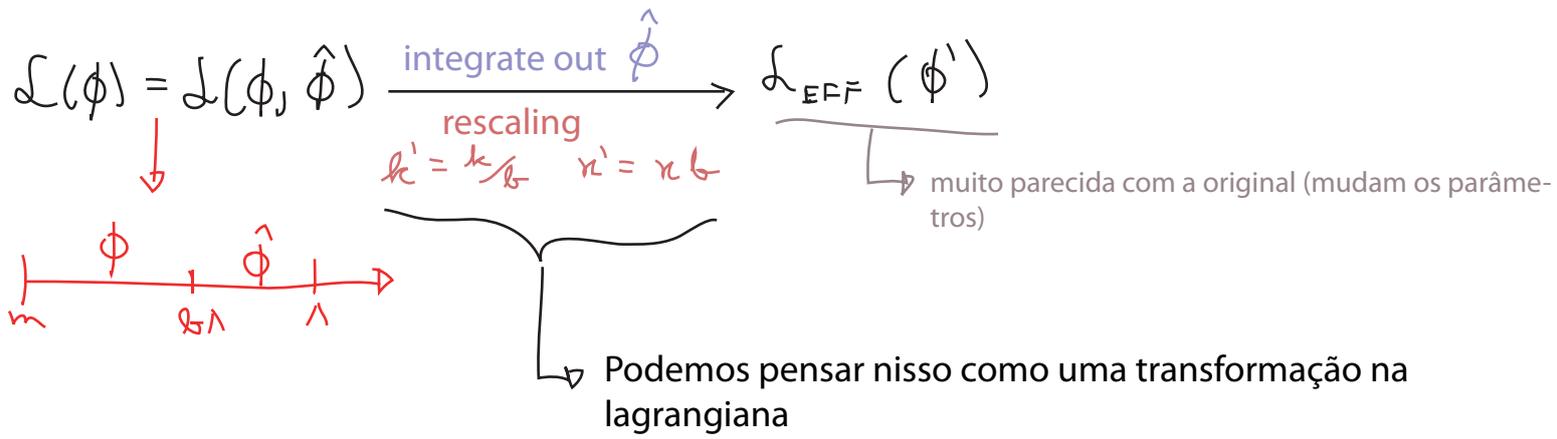
$$= \int d^d x' \Lambda^{-d} \left[ \frac{1}{2} (1 + \Delta z) \Lambda^2 (\partial'_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} (m_0^2 + \Delta m^2) \phi^2 + \frac{1}{4!} (\lambda_0 + \Delta \lambda) \phi^4 + \Delta C \Lambda^4 (\partial'_\mu \phi)^4 + \dots \right]$$

Podemos voltar a uma forma muito parecida com a lagrangeana original fazendo as seguintes definições:

$$\begin{aligned}
 \phi' &= [b^{2-d} (1 + \Delta z)]^{1/2} \phi \\
 m'^2 &= (m_0^2 + \Delta m^2) (1 + \Delta z)^{-1} b^{-2} \\
 \lambda' &= (\lambda_0 + \Delta \lambda) (1 + \Delta z)^{-2} b^{d-4} \\
 c' &= (c_0 + \Delta c) (1 + \Delta z)^{-2} b^d \\
 \mathcal{D}' &= (\mathcal{D} + \Delta \mathcal{D}) (1 + \Delta z)^{-3} b^{2d-6} \\
 &\vdots
 \end{aligned}
 \tag{eq. 184.1}$$

$$\int d^d x \mathcal{L}_{EFF} = \int d^d x' \left[ \frac{1}{2} (\partial'_\mu \phi')^2 + \frac{1}{2} m'^2 \phi'^2 + \frac{\lambda'}{4} \phi'^4 + c' (\partial'_\mu \phi')^4 + \mathcal{D}' \phi'^6 + \dots \right]$$

Pensando em todo o processo, o que fizemos foi:



Podemos, de fato, repetir o processo para uma nova "fatia" do espaço de momentos ( $cb\Lambda < |k| < b\Lambda$ ). Cada transformação sucessiva resulta em uma nova transformação dos coeficientes dos termos na lagrangeana (como em 97.1). Se fizermos todos os parâmetros desta transformação ( $b, c, \dots$ ) infinitesimalmente próximos de 1 (o que equivale a fazer as "fatias" tenderem a zero) temos uma transformação contínua. Neste caso vemos que podemos descrever o resultado de integrar sobre os graus de liberdade com momentos grandes como uma trajetória ou caminho (em inglês é comum usar "flow") sobre o espaço das possíveis lagrangeanas. O conjunto destas transformações é chamado de **Grupo de Renormalização (RG)** (embora não formem verdadeiramente um grupo, pois não são inversíveis).

Notem que temos então duas formas de atacar o mesmo problema. Suponha que estejamos interessados em um processo qualquer em que os momentos típicos (da partículas reais) sejam muito menores que uma escala qualquer  $\Lambda$  (usemos a teoria escalar para ilustrar):

**Método 1:**  $\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 + \frac{\lambda_0 \phi^4}{4!}$

Calculamos a função de n-pontos

Surgem divergências assim que consideramos loops (porque é neles que entra a dinâmica de altas energias)

↓ Renormalização

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + \text{contratermos}$$

$m^2 = m_0^2 \pm \delta m$   
 $\lambda = \lambda_0 \pm \delta \lambda$

as divergências aqui (nos  $\delta$ 's) nos forçam assumir que os parâmetros nús ( $m_0, \lambda_0$ ) eram infinitos, o que parece criar problemas para a série perturbativa

→ resultados finitos

Método 2:  $\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 + \frac{\lambda_0 \phi^4}{4!}$

Diversas transformações sucessivas em que "integramos" os modos de alto momento, embutindo o seu efeito de volta na lagrangeana. Em cada passo temos só **integrais finitas** e os parâmetros da lagrangeana são também sempre assumidos pequenos.

$(m_0 \ll \Lambda)$        $(\lambda \text{ perturbativo})$

$m_0, \lambda_0$  finitos!

há de se tomar cuidado, pois  $\lambda$  vai mudando e por enquanto assumimos que ele nunca vai ficar forte o bastante para invalidar a teoria de perturbação.

$$\mathcal{L}_{\text{EFF}} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda \phi^4}{4!} + \text{ todos os termos possíveis (de qualquer dim.)}$$

→ resultados finitos (o campo que sobra é zero para qualquer momento um pouco acima dos momentos externos considerados)

Os dois métodos devem nos fornecer os mesmos resultados, mas o segundo deixa diversas idéias mais claras. Para começar a teoria de perturbação é válida em qualquer ponto do cálculo, desde que a constante de acoplamento não evolua para valores grandes (o que de fato acontece em algumas teorias). Além disso fica claro que todas as grandezas vão depender da escala que estamos considerando (aquela que sobra no final, depois de integrarmos tudo acima dela).

Vejamos como a lagrangeana tende a variar sobre as transformações do grupo de renormalização. As lagrangeanas são definidas no espaço dos coeficientes de seus termos (que são operadores compostos dos campos), no caso escalar, por exemplo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4} \phi^4 + c (\partial_\mu \phi)^4 + \mathcal{D} \phi^6 + \dots$$

da forma que definimos as transformações do RG este termo fica sempre igual.

parâmetros que definem o espaço de lagrangeanas escalares

O ponto  $\{m^2, \lambda, C, D, \dots\} = \{0, 0, 0, 0, \dots\}$  é o que chamamos de **ponto fixo** para as transformações do RG, uma vez que nele temos apenas:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2$$

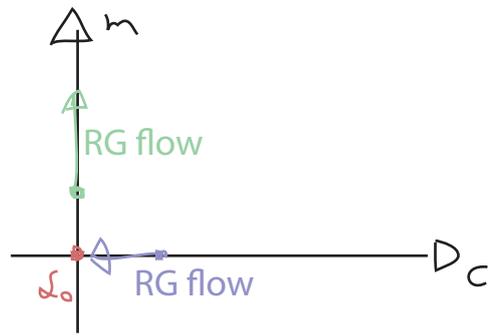
e portanto não há interações que vão corrigir os outros parâmetros e tirá-los de zero. Perto deste ponto podemos ignorar as correções superiores na perturbação e simplificar as transformações 184.1:

(eq. 184.1)

$$\left. \begin{aligned} b m'^2 &= (m_0^2 + \Delta m^2) (1 + \Delta z)^{-1} b^{-2} \\ \lambda' &= (\lambda_0 + \Delta \lambda) (1 + \Delta z)^{-2} b^{d-4} \\ C' &= (C + \Delta C) (1 + \Delta z)^{-2} b^d \\ D' &= (D + \Delta D) (1 + \Delta z)^{-3} b^{2d-6} \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} m'^2 \approx m_0^2 b^{-2} + \mathcal{O}(\Delta \dots) \\ \lambda' \approx \lambda_0 b^{d-4} + \mathcal{O}(\Delta \dots) \\ C' \approx C b^d + \mathcal{O}(\Delta \dots) \\ D' \approx D b^{2d-6} + \mathcal{O}(\Delta \dots) \\ \vdots \end{cases}$$

$\{m^2, \lambda, C, D, \dots\} \sim \{0, 0, 0, 0, \dots\}$

Como  $b < 1$ , os parâmetros com **potências negativas de b crescem**, e os com **potências positivas de b diminuem** quando aplicamos a transformação.



Os operadores cujos coeficientes crescem com as transformações sucessivas são chamados de **relevantes** e os que desaparecem são chamados de **irrelevantes**. Os operadores cuja potência em b é zero são chamados de **marginais**, e precisamos das correções perturbativas de ordem mais alta para saber se eles crescem ou decrescem.

no caso escalar:  $\phi^2$  é relevante sempre (independentemente do numero de dimensões)

$\phi^4$   $\begin{cases} d < 4 & \text{relevante} \\ d = 4 & \text{marginal} \\ d > 4 & \text{irrelevante} \end{cases}$

De uma forma geral, o coeficiente de um operador com N potências de  $\phi$  (escalar) e M derivadas vai se transformar conforme (veja pg 183-184, note que queremos manter o termo cinético normalizado):

$$C'_{N,M} = \underbrace{b^{-d}}_{\text{scaling da integral}} \underbrace{b^{\left(\frac{d-2}{2}\right)N}}_{\text{transf. do campo (eq. 97.1)}} \underbrace{b^M}_{\text{scaling das derivadas}} C_{N,M} = b^{N\left(\frac{d}{2}-1\right)+M-d} C_{N,M}$$

(eq. 186.1)

Note que a dimensão do operador é (veja pg 160):

$$Dim [\hat{O}_{N,m}] = N \left( \frac{d-2}{2} \right) + M = d_{N,m}$$

↳ dimensão do campo escalar
↳ cada derivada aumenta a dimensão em 1

Como a lagrangeana deve ter dimensão d, a dimensão do coeficiente deste operador deve ter dimensão:

$$Dim [C_{N,m}] \equiv D_c = d - d_{N,m} = d - \left[ N \left( \frac{d-2}{2} \right) + M \right]$$

que é justamente o que aparece no expoente de b (com sinal trocado). Comparando isto com o resultado da página 161 (eq 161.1), vemos que operadores **relevantes** ( $D_c > 0$ ) equivalem a interações **super-renormalizáveis**, operadores **marginais** ( $D_c = 0$ ) equivalem a interações **renormalizáveis** e os **irrelevantes** ( $D_c < 0$ ) equivalem a interações **não-renormalizáveis**.

Uma outra forma de relacionar o comportamento dos coeficientes com a dimensão do operador consiste em pensar que o coeficiente é naturalmente da ordem de:

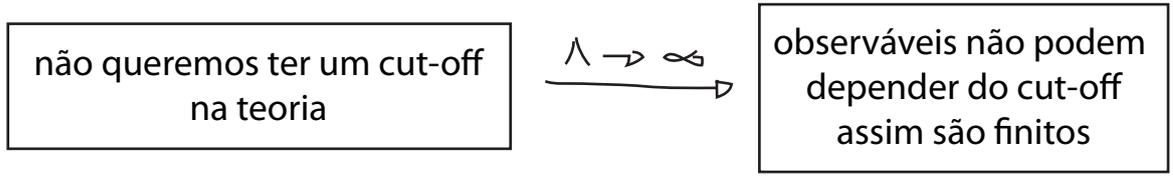
$$C_{OEF.} \sim (massa)^{d - d_{N,m}} \sim (\Lambda)^{d - d_{N,m}}$$

$$d < d_{N,m} \Rightarrow C_{OEF.} \sim \frac{1}{\Lambda^{|d - d_{N,m}|}} \left\{ \begin{array}{l} \text{irrelevante para momentos pequenos} \\ |p| \ll \Lambda \Rightarrow \left( \frac{|p|}{\Lambda} \right)^{d_{N,m} - d} \sim 0 \end{array} \right.$$

$$d > d_{N,m} \Rightarrow C_{OEF.} \sim \Lambda^{|d - d_{N,m}|} \quad \text{importante mesmo em pequenos momentos porque } \Lambda \text{ é grande}$$

Este é um resultado importante porque nos diz que, pelo menos em regiões próximas ao ponto fixo da lagrangeana livre, qualquer lagrangeana, não importa o quão complicada, acabará se tornando uma lagrangeana com um numero finito de interações renormalizáveis.

Isto muda um pouco nosso ponto de vista sobre teorias renormalizáveis, anteriormente seguimos o seguinte raciocínio:

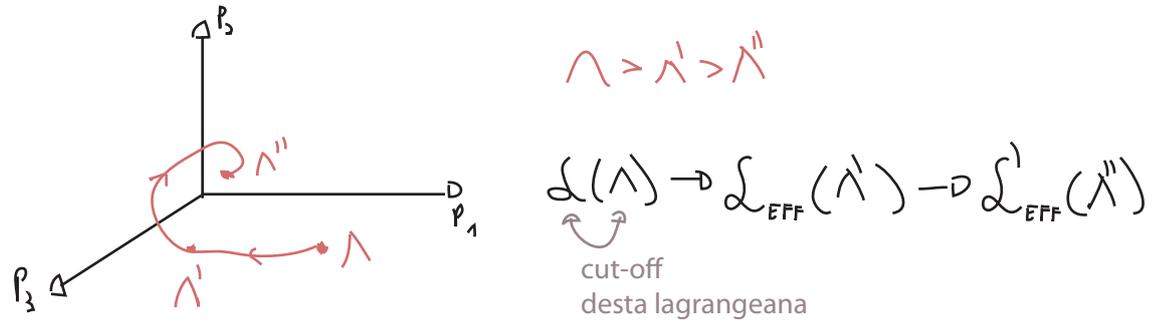


Só consigo uma teoria preditiva se não houver termos não-renormalizáveis

↳ Só teorias renormalizáveis são boas (é uma "sorte" que a QED o seja)

sorte no sentido que, nesta visão, não há motivo para uma teoria independente do cut-off ter sido realizada na natureza ↴

Agora temos uma outra perspectiva, suponha que qualquer teoria de campo tenha um cut-off - mesmo que não saibamos onde ele fica ou qual teoria começa ali (gravidade quântica?) - e que ele esteja bem acima do nosso alcance experimental. O que fazemos é usar as transformações do RG para "trazer" o cut-off para perto da escala em que estamos calculando o espalhamento, e incluímos os efeitos das altas energias na lagrangeana efetiva.



Se neste processo as interações não-renormalizáveis forem suprimidas, então as equações do RG nos dão **uma razão para que a QED seja renormalizável**: qualquer teoria com acoplamentos suficientemente fracos se comportará como uma teoria renormalizável em baixas energias.

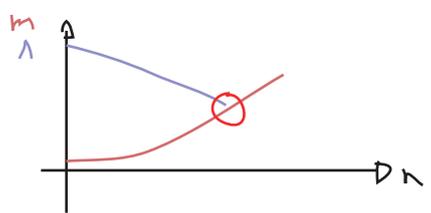
É claro que temos que tomar cuidado com os casos em que os acoplamentos crescem, ou que estamos um pouco mais longe do ponto fixo, vamos ver isso com um pouco mais de detalhe:

$\lambda \phi^4$   
 $\mathcal{L} \sim \mathcal{L}_0$   
 $d > 4$

⇒ Apenas o termo de massa é relevante, começamos com  $m_0 \ll \Lambda_0$

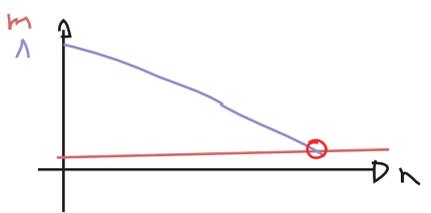
$$m_0^2 \xrightarrow{n \text{ integrações}} m'^2 = m_0^2 e^{-2n}$$

$$\Lambda_0 \longrightarrow \Lambda'$$



Em algum ponto  $m'^2 \sim \Lambda'^2$  e temos que parar aí. Exigir que  $m'$  seja uma massa "pequena" significa exigir que a massa:

(a) comece perto do ponto fixo da teoria livre e mude muito pouco com as transformações do RG, e somente o cut-off é que vai baixando;



ou: (b) se ela começar longe de  $\mathcal{L}_0$ , então ela flue para lá e então se comporta como em (a)

A situação (a) exige que a  $m$  passe extremamente perto do ponto fixo, e para conseguir (b) precisamos escolher o ponto onde começa a trajetória com muita precisão. Caso consigamos fazer isso, então a previsão é de que mesmo lagrangeanas com operadores altamente não lineares (longe de  $\mathcal{L}_0$ ) terão correlatores a baixas energias que se comportam como teorias praticamente livres de escalares leves. No caso de sistemas magnéticos (onde podemos de fato ajustar as "condições iniciais") este comportamento aparece em modelos com mais de 4 dimensões. Perto da transição de fase de segunda ordem destes modelos temos exatamente esta situação.

$\lambda\phi^4$   
 $d \sim d_0$   
 $d = 4$

Neste caso temos que ficar atentos ao operador  $\phi^4$

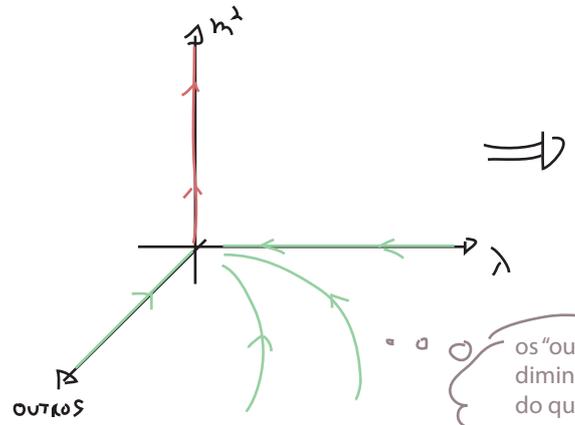
$$\lambda' = (\lambda + \Delta\lambda)(1 + \Delta z)^{-d} \mu^{d-4}$$

eq. 182.1

$\Delta z \sim \frac{1}{\mu^2} + \mathcal{O}(\lambda^2)$   
 só corrige a massa (veja pg 167, eq. 167.1)

$$\lambda' \approx \lambda - \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} L_N\left(\frac{1}{\mu^2}\right) \rightarrow \lambda' \text{ diminui lentamente conforme "integramos"}$$

$L_N \left( \frac{1}{\mu^2} \right)$   
 $\leftarrow 1$   
 $\leftarrow > 0$



isso quer dizer que  $\lambda\phi^4$  acaba sempre se tornando livre muito longe do cut-off (ou quando fazemos o cut-off ir para infinito). Esta é a trivialidade de  $\lambda\phi^4$  sem cut-off (é claro que a teoria continua útil se temos um cut-off)

os "outros" coeficientes diminuem mais rápido do que  $\lambda$

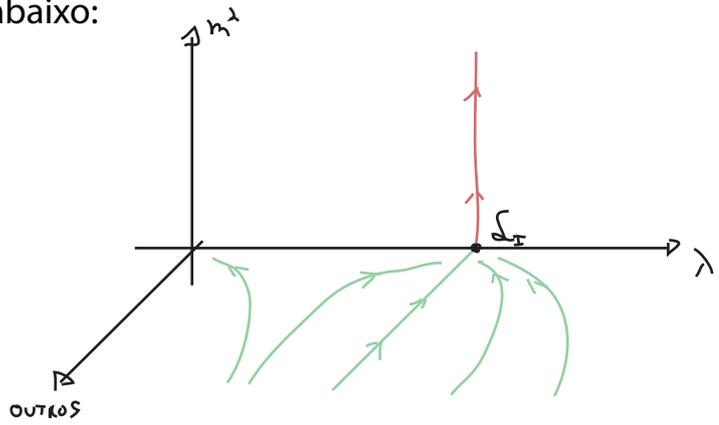
$\lambda\phi^4$   
 $d \sim d_0$   
 $d < 4$

O operador  $\phi^4$  agora é relevante. Mesmo que comecemos perto da teoria livre o valor de  $\lambda$  vai fluir para valores maiores. Assim que nos afastamos da origem, temos que considerar as correções de ordem  $\lambda$  (da eq. 182.1). Para  $d < 4$  temos:

$$\lambda' = \left( \lambda - \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(d/2)} \frac{(1 - \mu^{d-4})}{d-4} \mu^{d-4} \right) \mu^{d-4}$$

$\lambda' \sim \lambda \mu^{d-4}$

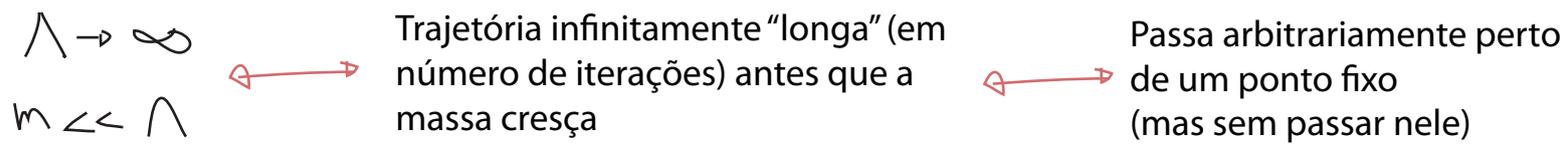
este sinal sugere que em algum ponto o crescimento causado pelo scaling vai ser cancelado pela contribuição do termo não-linear, neste ponto  $\lambda$  pára de mudar - há um segundo ponto fixo. Este ponto se funde como o ponto da lagrangeana livre se fazemos  $d \rightarrow 4$ , e os dois vão ter a mesma propriedade em relação ao crescimento da massa. Então, perto de  $d = 4$  temos o diagrama abaixo:



## A equação de Callan-Symanzik

(Peskin 12.2, Ryder 9.4)

Embora o tratamento que fizemos para o campo escalar seja bastante claro do ponto de vista físico ele pode se tornar bastante difícil tecnicamente se formos tratar teorias mais complicadas do que o campo escalar (sabemos, por exemplo, que a QED tem problemas com regularização por cut-off). Vamos então tentar achar formas mais gerais de encontrar as equações que estabelecem o fluxo dos parâmetros da lagrangeana. Para isso voltaremos ao formalismo das teorias renormalizadas (em que fizemos  $\Lambda \rightarrow \infty$  e inserimos os contratermos)



Perto do ponto fixo, cada iteração a mais move a massa muito pouco, mas vai desaparecendo com todos os operadores irrelevantes. Acabamos com uma teoria que só tem operadores relevantes (os termos originais + contratermos) mas com coeficientes que foram corrigidos uma infinidade de vezes (os  $\delta$ 's são divergentes). Fica claro que as lagrangeanas que estão nestas trajetórias são um subconjunto de todas as lagrangeanas possíveis.

- ▶ toda informação sobre o fluxo dos coeficientes irrelevantes foi jogado fora
- ▶ ainda podemos estudar os relevantes e marginais, mas não em função de  $\Lambda$  e  $b\Lambda$

Neste caso usamos as **condições de renormalização** que são definidas em uma **escala de renormalização** (na pg 163, por exemplo, esta escala foi escolhida como  $p^2 = 0$ ). Vendo como os coeficientes dependem desta escala  $\mu$ , podemos recuperar a informação do fluxo.

Começemos com uma teoria escalar sem massa (o termo  $m^2$  renormalizado é exatamente zero). As condições da página 133 não servem mais (o  $\delta\lambda$  obtido destas condições, por exemplo, tem singularidades para  $m^2 = 0$ , veja pgs 133-134). Usaremos então uma escala arbitrária  $M$ :

$p^2 = -M^2$

$= -i\lambda$

$(p_1 + p_2)^2 = (p_1 + p_3)^2 = (p_1 + p_4)^2 = -M^2$

ficando na região  $p^2 < 0$  temos uma análise análoga ao que faríamos no espaço euclidiano, onde tudo é mais simples. O comportamento para  $p^2 > 0$  é mais complicado pois temos que tomar cuidado com singularidades advindas de estados ligados e ramificações

Com estas novas condições:

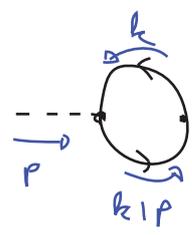
$$\langle \Omega | \phi(p) \phi(-p) | \Omega \rangle = \frac{i}{p^2} \quad / \quad p^2 = -M^2$$

$$\phi = Z^{-1/2} \phi_0$$

$$\hookrightarrow \langle \Omega | \phi_0(p) \phi_0(-p) | \Omega \rangle = \frac{iZ}{p^2} \quad / \quad p^2 = -M^2$$

(Z não é mais o resíduo do polo da função de dois pontos)

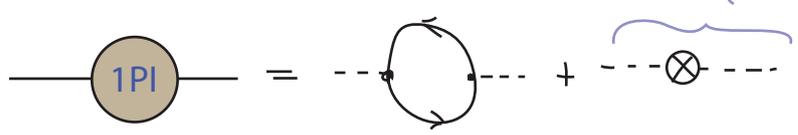
Para ver o efeito destas condições, considere que a teoria tem uma interação de Yukawa, das pgs. 80-81 temos:



$$= \frac{4i\gamma^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx (d-1) \frac{\Gamma(1-d/2)}{\Delta^{1-d/2}}$$

$\Delta = m_f^2 - x(1-x)p^2$

$$m_f^2 = 0 \Rightarrow \Delta \propto p^2$$



$$1PI = \frac{4i\gamma^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 \frac{dx}{[-x(1-x)p^2]^{1-d/2}} (d-1) \Gamma(1-d/2) - (p^2 \delta Z - \delta m)$$

$$\frac{4i\gamma^2}{(4\pi)^2} \left[ \frac{2}{\epsilon} - 2 - \gamma - \text{LN}(-p^2) + \text{LN}(4\pi) \right] \int_0^1 \frac{dx}{[x(1-x)]^{1-d/2}}$$

↳ a parte que diverge não depende de  $p^2$  portanto será cancelada por algo equivalente em  $\delta m$ .

$$d \sim 4 \Rightarrow \frac{12i\gamma^2}{(4\pi)^2} \left[ -p^2 \left( \frac{1}{2-\frac{d}{2}} + \text{Loc}(4\pi) - \gamma + 1 - \text{LN}(-p^2) \right) \right] \int_0^1 \frac{dx}{x(x-1)}$$

↳ não contribui para  $\delta m$ , apenas para  $\delta z$ .

$$\rightarrow -p^2 \left( \frac{1}{2-\frac{d}{2}} + \text{LN}\left(\frac{1}{-p^2}\right) + C \right)$$

Se fizermos esta regularização por cut-off, as contribuições para  $\delta z$  e  $\delta m$ , se misturam e não fica tão fácil ver que a massa não sai de zero, por isso continuaremos usando reg. dimensional. No entanto, para deixar claro o papel do cut-off, faremos a troca:

$$-\rho^2 \left( \frac{1}{2-d/2} + \text{LN} \left( \frac{1}{-\rho^2} \right) + C \right) \xrightarrow{\text{EQ.}} -\rho^2 \left( \text{LN} \left( \frac{\Lambda^2}{-\rho^2} \right) + C \right)$$

se comportam da mesma forma são diferentes, mas não nos importam

O mesmo seria válido para  $\lambda\phi^4$ , mas teríamos que ir até dois loops para ver a primeira correção em  $\delta Z$ . Essa separação nos permite esquecer totalmente da massa e analisar o acoplamento. Nos diz que (como só temos polos em  $d = 4$ ) as divergências de  $\delta Z$  (e  $\delta\lambda$ ) serão logarítmicas.

Note que poderíamos ter escolhido outra escala de renormalização,  $M'$  para a mesma teoria. As funções de Green da teoria dependem apenas de  $m_0, \lambda_0$  e  $\Lambda$ .  $M$  só aparece quando fazemos a troca:

$$\left. \begin{matrix} \lambda_0 \\ \phi_0 \\ \Lambda \end{matrix} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \phi \\ M \end{matrix} \right.$$

$$\underbrace{\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \dots \phi(x_n) \} | \Omega \rangle}_{G^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n)} = Z^{-n/2} \underbrace{\langle \Omega | T \{ \phi_0(x_1) \phi_0(x_2) \dots \phi_0(x_n) \} | \Omega \rangle}_{G_0^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

O que acontece se fizermos uma pequena mudança em  $M$ ?

$$\begin{aligned} M &\rightarrow M + \delta M \\ \lambda &\rightarrow \lambda + \delta \lambda \\ \phi &\rightarrow (1 + \delta\eta) \phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi &= Z^{-1/2} \phi_0 \\ &\downarrow \\ \phi &= Z^{-1/2} (1 + \delta\eta) \phi_0 \end{aligned}$$

Na função de Green só importa a mudança em  $Z$  (já que  $G_0$  só depende dos parâmetros núts):

$$\begin{aligned} Z^{-1/2} &\rightarrow (1 + \delta\eta) Z^{-1/2} \rightarrow Z^{-n/2} \rightarrow (1 + \delta\eta)^n Z^{-n/2} \sim (1 + n\delta\eta) Z^{-n/2} \\ G^{(n)} &\rightarrow (1 + n\delta\eta) G^{(n)} \end{aligned}$$

Pensando em  $G$  como uma função de  $M$  e  $\lambda$ , esta transformação é dada por:

$$dG^{(n)} = \frac{\partial G^{(n)}}{\partial M} \delta M + \frac{\partial G^{(n)}}{\partial \lambda} \delta \lambda = n\delta\eta G^{(n)}$$

(eq. 192.1)

Definindo os parâmetros adimensionais:

$$\beta \equiv \frac{M}{\delta M} \delta \lambda \quad \text{Função beta} \quad (\text{eq. 193.1})$$

$$\gamma \equiv -\frac{M}{\delta M} \delta \eta \quad \text{Função gama} \quad (\text{eq. 193.2})$$

Temos:

$$\left( \frac{\partial G^{(n)}}{\partial M} \delta M + \frac{\partial G^{(n)}}{\partial \lambda} \delta \lambda - n \delta \eta G^{(n)} = 0 \right) \times \frac{M}{\delta M}$$

$$M \frac{\partial G^{(n)}}{\partial M} + \underbrace{\frac{M}{\delta M} \delta \lambda}_{\beta} \frac{\partial G^{(n)}}{\partial \lambda} - n \underbrace{\frac{M}{\delta M} \delta \eta}_{-\gamma} G^{(n)} = 0$$

$$\left[ M \frac{\partial}{\partial M} + \beta \frac{\partial}{\partial \lambda} + n \gamma \right] G^{(n)}(x_1, \dots, x_n; M, \lambda) = 0$$

Pensemos sobre  $\beta$  e  $\gamma$ :

→ são os mesmo para qualquer  $n$   
 → são adimensionais, e não há qualquer outro parâmetro com dimensão de massa  
 $\beta(x, M, \lambda) \Rightarrow \beta = \beta(\lambda) \quad \gamma = \gamma(\lambda)$

$$\left[ M \frac{\partial}{\partial M} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} + n \gamma(\lambda) \right] G^{(n)}(x_1, \dots, x_n; M, \lambda) = 0$$

Equação de Callan- Symanzik (eq. 193.3)

$\beta(\lambda) \leftrightarrow$  ligada a mudança na constante de acoplamento

$\gamma(\lambda) \leftrightarrow$  ligada a mudança no campo (field strength)

Esta equação nos diz que a mudança em  $M$  será sempre acompanhada e compensada pelas outras duas.

Podemos generalizar o argumento acima para outras teorias renormalizáveis (com acoplamentos adimensionais). Haverá uma função  $\gamma$  para cada campo e uma função  $\beta$  para cada acoplamento. No caso da QED (sem massa,  $m_e = 0$ ) ( $n$  é o número de elétrons e  $m$  o de fótons):

$$\left[ M \frac{\partial}{\partial M} + \beta(e) \frac{\partial}{\partial e} + n \gamma_2(e) + m \gamma_3(e) \right] G^{(n, m)}(x_1, \dots, x_{n+m}; M, e) = 0 \quad (\text{eq. 193.4})$$

### Calculando as funções $\beta$ e $\gamma$

Mais uma vez, fiquemos na teoria  $\lambda\phi^4$  sem massa. Como estas funções não dependem de qual função de Green usamos na equação de Callan-Symanzik (CS), podemos escolher as mais simples:

$$G^{(2)}(p) = \text{---}^{\lambda^0} + \underbrace{\text{---}^{\lambda^1} \text{---}^{\lambda^1}}_{\text{sabemos que daqui só saem contribuições para } \delta m} + \text{---}^{\lambda^1} \otimes \text{---}^{\lambda^1} + \text{---}^{\lambda^2} \text{---}^{\lambda^2} + \mathcal{O}(\lambda^3)$$

Como o cálculo de dois loops é trabalhoso, acaba sendo mais simples usar a função de 4 pontos. No entanto podemos obter alguma informação sobre  $\gamma$  daqui: como não há correções a  $G^{(2)}$  em ordem  $\lambda$ , só introduzimos a dependência em  $M$  e  $\lambda$  em  $G^{(2)}$  em ordem  $\lambda^2$ . Assim a equação de CS para  $G^{(2)}$  fica:

$$\left[ M \frac{d}{dM} + \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} + 2\gamma(\lambda) \right] G^{(2)}(p) = 0$$

$\mathcal{O}(\lambda) \Rightarrow \circ$        $\mathcal{O}(\lambda) \Rightarrow \circ$        $\gamma(\lambda) = 0 + \mathcal{O}(\lambda^2)$

Passando então para a função de 4 pontos, temos:

$$G^4 = \text{---}^{\lambda^1} \text{---}^{\lambda^1} + \text{---}^{\lambda^2} \text{---}^{\lambda^2} + \text{---}^{\lambda^2} \text{---}^{\lambda^2} + \text{---}^{\lambda^2} \text{---}^{\lambda^2} + \text{---}^{\lambda^2} \text{---}^{\lambda^2} + \mathcal{O}(\lambda^3)$$

$$\left[ M \frac{d}{dM} + \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} + 4\gamma(\lambda) \right] G^4(p_1, p_2, p_3, p_4) = 0$$

Já calculamos esta função de Green (na verdade a versão amputada dela, pgs 164-165):

$$G^4 = \left[ -i\lambda + (-i\lambda)^2 \left[ iV(s) + iV(t) + iV(u) \right] - i\delta_\lambda \right] \cdot \prod_{i=1}^4 \frac{i}{p_i^2}$$

$\hookrightarrow$  definido na eq. 164.3      propagadores da pernas externas  
(que tem correções  $\sim \lambda^2$  conforme vimos na pg 166)

Nossa condição de renormalização agora exige que as correções a  $\lambda$  se cancelem em:

$$s = t = u = -M^2$$

O que nos dá um contratermo:



De uma forma mais geral (qualquer teoria escalar renormalizável sem massa), teremos sempre:

$$G^{(2)}(p) = \text{---} + \underbrace{(\text{LEAD. LOOP})}_{\text{contribuição não-nula com o menor número de loops}} + \text{---} \otimes \text{---} + \dots$$

$$= \frac{i}{p^2} + \frac{i}{p^2} \left[ \cancel{i p^2 A} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{-p^2}\right) + \text{termos finitos} \right] \frac{i}{p^2} + \frac{i}{p^2} (i p^2 \delta z) \frac{i}{p^2} + \dots$$

conforme mostramos na pág. 105 (divergências em  $\delta z$  são Logs)

$$\frac{dG^{(2)}}{dM} = -\frac{i}{p^2} \frac{d}{dM} \delta z$$

depende da teoria

$$A \sim \mathcal{O}(\lambda^n) \left\{ \begin{array}{l} G \sim \underline{\text{CONST.}} + \mathcal{O}(\lambda^n) \\ \frac{dG}{d\lambda} \sim \mathcal{O}(\lambda^{n-1}) \end{array} \right.$$

$$\left[ \underbrace{M}_{\mathcal{O}(\lambda^n)} \frac{d}{dM} G^{(2)} + \underbrace{\beta(\lambda)}_{\mathcal{O}(\lambda^{n-1})} \frac{d}{d\lambda} G^{(2)} + \underbrace{2\gamma(\lambda)}_{\mathcal{O}(\lambda)} \underbrace{G^{(2)}}_{\text{CONST.} + \mathcal{O}(\lambda^n)} \right] = 0$$

$n > 1 \Rightarrow$  A contribuição do termo envolvendo  $\beta$  vai ser sempre de ordem superior a que envolve  $\gamma$

$$-\frac{i}{p^2} M \frac{d}{dM} \delta z + 2\gamma(\lambda) \frac{i}{p^2} = 0 \Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{1}{2} M \frac{d}{dM} \delta z} \quad (\text{eq. 196.1})$$

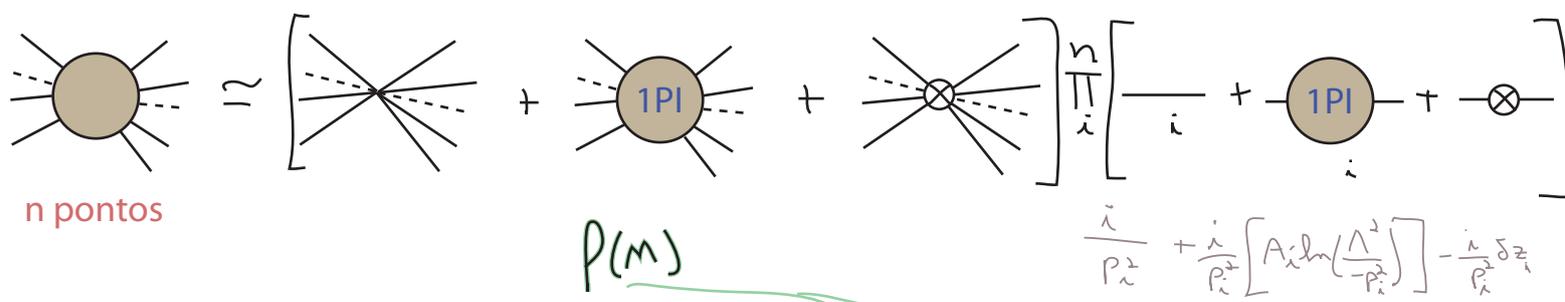
Se lembrarmos que  $\delta z$  tem que cancelar a divergência dos loops em alguma escala  $-p^2 = M$ , concluímos que:

$$\left\{ \frac{i}{p^2} \left[ A \ln\left(\frac{\Lambda^2}{-p^2}\right) \right] + \frac{i}{p^2} (i p^2 \delta z) \frac{i}{p^2} \right\}_{p^2 = -M^2} = 0$$

$$\delta z = A \ln\left(\frac{\Lambda^2}{M^2}\right) \Rightarrow \gamma = \frac{1}{2} M \cdot A \cdot \left(-\frac{2}{M}\right) = \underline{\underline{-A}}$$

coeficiente do logaritmo divergente que contribuí para  $\delta z$   
(o mesmo ocorre na QED ou Yukawa)

Podemos obter algo análogo para a função  $\beta$ . Pensemos numa teoria com um acoplamento  $g$  de um vértice com  $n$  linhas, a função de  $n$  pontos será dada por:



$$G^{(n)} \approx \left( \prod_i \frac{i}{p_i^2} \right) \left[ -i\gamma - i\beta \ln\left[\frac{\Lambda^2}{-p^2}\right] - i\delta\gamma - i\gamma \sum_i \left( A_i \ln\left(\frac{\Lambda^2}{-p_i^2}\right) - \delta z_i \right) \right]$$

(só estou interessado nas correções a um loop (por isso ignoro os produtos entre contratermos e entre 1PIs))

algum invariante do tipo das variáveis de Mandelstam estamos assumindo que as condições de renorm. são para todas as variáveis deste tipo  $\sim -M^2$

$$\left[ M \frac{d}{dM} + \beta(g) \frac{d}{dg} + n \gamma(g) \right] G^{(n)}(p) = 0$$

$$n \gamma(g) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} M \frac{d}{dM} \delta z_i$$

$$\left( \prod_i \frac{i}{p_i^2} \right) \left\{ M \frac{d}{dM} \left( -i\delta\gamma + i\gamma \sum_i \delta z_i \right) + \beta(g) \frac{dG^{(n)}}{dg} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} M \frac{d}{dM} \delta z_i G^{(n)} \right\} = 0$$

$[-i + \mathcal{O}(g^2)]$

$-i\gamma + \mathcal{O}(g^2)$

Não sabemos, a priori, em que ordem de  $g$  temos a primeira contribuição a  $\delta\gamma$  ou  $\delta z_i$ , mas para que  $\beta$  possa cancelar estas contribuições ele tem que começar a receber contribuições na mesma ordem em que  $\delta\gamma$  ou  $g\delta z_i$  e, em L.O., podemos ignorar estes termos

$$M \frac{d}{dM} \left( -i\delta\gamma + i\gamma \sum_i \delta z_i \right) - i\beta(g) - i\gamma \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} M \frac{d}{dM} \delta z_i = 0$$

$$\beta(g) = M \frac{d}{dM} \left( -\delta\gamma + \frac{1}{2} g \sum_i \delta z_i \right) \quad (\text{eq. 197.1})$$

Mais uma vez as condições de renormalização nos dizem quem são  $\delta g$  e  $\delta z$

$$\delta\gamma = -\beta \ln\left(\frac{\Lambda^2}{M^2}\right) + \dots$$

as partes finitas independem de  $M$

$$\beta(g) = -2\beta - g \sum_i A_i$$

(eq. 198.1)

Um fato importante a ser notado é que, como não estamos interessados na parte finita (de fato somente no coeficiente da divergência) - não precisamos ser muito cuidadosos ao especificar as condições de normalização, basta fazer qualquer invariante (que fixa a escala dos logaritmos) igual a  $-M^2$ . É claro que isso só vale em L.O.

Argumentos semelhantes se aplicam para teorias mais complicadas. No caso da QED temos (gauge de Feynman):

$$\gamma_2(e) = \frac{1}{2} M \frac{d}{dM} \delta_2$$

(eq. 198.2)

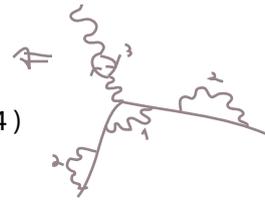
$$\gamma_3(e) = \frac{1}{2} M \frac{d}{dM} \delta_3$$

(eq. 198.3)



$$\beta(e) = M \frac{d}{dM} \left( -e\delta_1 + e\delta_2 + \frac{e}{2}\delta_3 \right)$$

(eq. 198.4)



Se modificarmos os  $\delta$ 's calculados nas páginas 171 a 173 para férmions sem massa e para a condição de renormalização em  $-M^2$ , temos:

$$\delta_1 = \delta_2 = -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(2 - d/2)}{(M^2)^{2-d/2}} + \dots \sim -\frac{e^2}{(4\pi)^2} L_N\left(\frac{\Lambda^2}{M^2}\right)$$

$$\delta_3 = -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{4}{3} \frac{\Gamma(2 - d/2)}{(M^2)^{2-d/2}} + \dots \sim -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{4}{3} L_N\left(\frac{\Lambda^2}{M^2}\right)$$

De forma que:

$$\gamma_2(e) = \frac{1}{2} M \left[ -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \left(-\frac{2}{M}\right) \right] = \frac{e^2}{(4\pi)^2}$$

$$\gamma_3(e) = \frac{e^2}{12\pi^2}$$

$$\beta(e) = M \frac{e}{2} \left[ -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \left(-\frac{2}{M}\right) \right] \frac{4}{3} = \frac{e^3}{12\pi^2}$$

Importante: a sutileza aqui é que escolhemos um gauge específico, então algumas destas funções mudam se mudarmos o gauge, outras não.  $\delta_2$  (ligada ao propagador do elétron) não é invariante de gauge,  $\delta_3$  e  $\beta$  são invariantes (ligados à polarização do vácuo).

### O significado de $\gamma$ e $\beta$

Vamos tentar entender  $\gamma$  e  $\beta$ , escrevendo-os em termos dos parâmetros da lagrangeana nua:

$$\lambda\phi^\gamma: \quad \phi(p) = Z(m)^{-1/2} \phi_0(p)$$

$$m \rightarrow m + \delta m \Rightarrow \phi \rightarrow \phi + \delta\eta \phi$$

$$\phi' = (1 + \delta\eta)\phi \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi' = Z(m + \delta m)^{-1/2} \phi_0 \\ \phi = Z(m)^{-1/2} \phi_0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + \delta\eta = \frac{\phi'}{\phi} = \frac{Z(m + \delta m)^{-1/2} \phi_0}{Z(m)^{-1/2} \phi_0}$$

$$\delta\eta = \frac{Z(m + \delta m)^{-1/2}}{Z(m)^{-1/2}} - 1$$

Da definição de  $\gamma$  (eq 193.2) temos:

$$\gamma = -\frac{m}{\delta m} \delta\eta = -\frac{m}{\delta m} \left( \frac{Z(m + \delta m)^{-1/2}}{Z(m)^{-1/2}} - 1 \right) = -\frac{m}{Z^{-1/2}} \underbrace{\left( \frac{Z(m + \delta m)^{-1/2} - Z^{-1/2}(m)}{\delta m} \right)}_{\frac{d}{dm} Z^{-1/2}} = \frac{1}{2} \frac{m}{Z^{-1/2}} Z^{-3/2} \frac{dZ}{dm}$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \frac{m}{Z} \frac{dZ}{dm}$$

$$\text{(eq. 199.1)} \quad \sim \frac{1}{2} m (1 - \delta_Z + O(\delta_Z^2)) \frac{d\delta_Z}{dm}$$

que reproduz o resultado em L.O. de 196.1

↳ mostra a ligação entre  $\gamma$  e a mudança de Z

No caso de  $\beta$ , nossa definição original já era suficientemente clara (eq 193.1):

$$\beta = \frac{m}{\delta m} \delta\lambda \quad \dots \quad \left\{ \begin{array}{l} m \rightarrow m + \delta m \\ \lambda(m + \delta m) = \lambda(m) + \delta\lambda \end{array} \right.$$

$$\beta = m \frac{d}{dm} \lambda(m)$$

(eq. 199.2)

, o que mostra que  $\beta$  nos fala como o acoplamento muda com esta escala que escolhemos para a cond. de renorm. Veremos em seguida que podemos interpretar isso como a mudança (o *running*) do acoplamento com a escala de energia do evento

### Solução da equação de Callan-Symanzik

(Peskin 12.3)

Para estudar as implicações da equação CS, vamos resolvê-la para uma função de dois pontos de uma teoria com um único campo escalar (sem massa)

$$Dim[G^{(2)}] = Dim\left[\frac{1}{p^2}\right] = -2 \quad \therefore G^{(2)} \equiv \frac{i}{p^2} g\left(-\frac{p^2}{M^2}\right) = -\frac{i}{k^2} g\left(\frac{k^2}{M^2}\right)$$

$$k \equiv \sqrt{-p^2} \quad \circ \quad k^2 = -p^2 > 0$$

tem dimensão -2 e só depende de p e M

$$Dim[g] = 0$$

↳ número (e não um quadrivetor)

$$\chi \equiv \chi\left(\frac{k}{M}\right) \quad \left. \begin{aligned} \frac{d}{dM} f(x) &= \frac{dx}{dM} \frac{df(x)}{dx} = \frac{-k}{M^2} \frac{df(x)}{dx} \rightarrow \frac{df}{dx} = -\frac{M^2}{k} \frac{df}{dM} \\ \frac{d}{dk} f(x) &= \frac{dx}{dk} \frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{M} \frac{df(x)}{dx} \rightarrow \frac{df}{dx} = M \frac{df}{dk} \end{aligned} \right\} \frac{df}{dM} = -\frac{k}{M} \frac{df}{dk}$$

$$M \frac{d}{dM} G^{(2)} = -M \frac{i}{k^2} \left( \frac{d}{dM} g \right) = -\frac{i}{k^2} \left( -k \frac{d}{dk} g \right) = -k \left[ -\frac{i}{k^2} \frac{d}{dk} g \right]$$

$$\frac{d}{dk} \left( -\frac{i}{k^2} g \right) = +\frac{2i}{k^2} g - \frac{i}{k^2} \frac{dg}{dk}$$

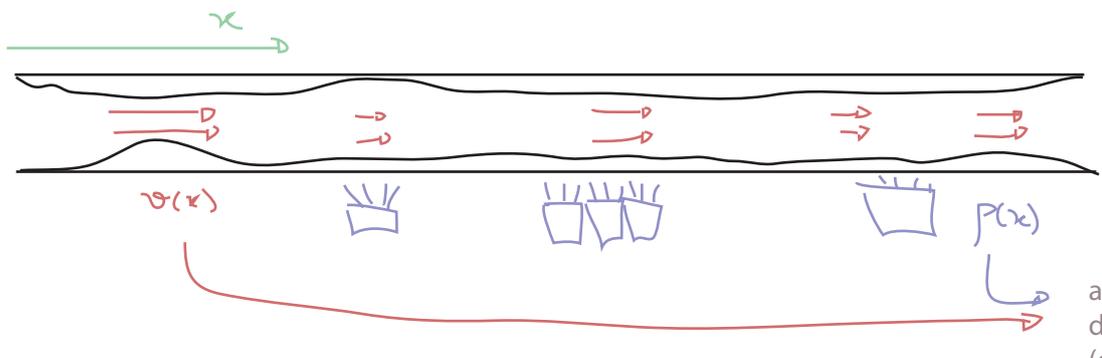
$$M \frac{d}{dM} G^{(2)} = -k \left[ \underbrace{\frac{d}{dk} \left( -\frac{i}{k^2} g \right)}_{G^{(2)}} - \frac{2i}{k^2} g \right] = -k \left[ \frac{d}{dk} G^{(2)} + \frac{2}{k} G^{(2)} \right] = \left[ -k \frac{d}{dk} - 2 \right] G^{(2)}$$

$$CS: \left[ M \frac{d}{dM} + \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} + 2\gamma(\lambda) \right] G^{(2)} = 0$$

$$\boxed{\left[ k \frac{d}{dk} + 2 - \beta \frac{d}{d\lambda} - 2\gamma \right] G^{(2)} = 0} \quad (eq. 200.1)$$

Teoria livre:  $\beta = \gamma = 0 \quad k \frac{d}{dk} G^{(2)} = -2G^{(2)} \Rightarrow G^{(2)} = -\frac{i}{k^2}$

Para vislumbrar como podemos resolver um caso mais geral, vamos pensar em bactérias (!!!). Imagine um tubo estreito por onde corre um fluido com velocidade  $v(x)$  ( $x$  é a coordenada ao longo do comprimento do tubo). O tubo está infectado por bactérias, cuja população é dada pela densidade  $D(t,x)$  e cuja taxa de crescimento é  $\rho(x)$



a taxa de crescimento e velocidade dependem de condições no tubo (eg: espessura e iluminação)

as bactérias são arrastadas

$$\frac{\partial D(t, x)}{\partial t} = -v(x) \frac{\partial D(t, x)}{\partial x} + \underbrace{P(x) D(t, x)}_{\text{crescimento}}$$

em um dado ponto  $x_0$   
 $x_- < x_0$   
 $\frac{\partial D}{\partial x}|_{x_0} > 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{pop. cresce pois} \\ D[x_-] < D[x_0] \end{array} \right.$   
 $\frac{\partial D}{\partial x}|_{x_0} < 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{pop. cresce pois} \\ D[x_-] > D[x_0] \end{array} \right.$

$$\hookrightarrow \left[ \frac{\partial}{\partial t} + v(x) \frac{\partial}{\partial x} - P(x) \right] D(t, x) = 0$$

Esta é exatamente a equação que temos fazendo:

$$\left[ k \frac{d}{dk} + 2 - \beta \frac{d}{d\lambda} - 2\gamma \right] G^{(2)} = 0$$

(eq. 200.1)

- $\text{Log}\left(\frac{k}{M}\right) \leftrightarrow t$
- $dt \leftrightarrow \frac{1}{k} dk \quad \frac{d}{dt} \leftrightarrow k \frac{d}{dk}$
- $\lambda \leftrightarrow v(x)$
- $-\beta(\lambda) \leftrightarrow P(x)$
- $2\gamma(\lambda) - 2 \leftrightarrow P(x)$
- $G^{(2)}(k, \lambda) \leftrightarrow D(t, x)$

Suponha que conheçamos:  $D(t=0, x) = D_i(x)$

Para saber a densidade bacteriana de um elemento de fluido em  $(t_1 > 0, x_1)$  temos que olhar a história dele. Sabemos onde ele estava em  $t = 0$  integrando sobre o seu movimento passado. Podemos pensar neste elemento fluindo para trás no tempo e definir:

$$\frac{\partial \bar{x}(t; x_1)}{\partial t} \equiv -v(\bar{x})$$

→ posição de um elemento de fluido indo na direção errada (-v)

$$\bar{x}(0; x_1) = x_1 \quad \rightarrow \text{este começa em } x_1$$

$$\bar{x}(t_1; x_1) \quad \rightarrow \text{posição dele em } t = 0$$

Portanto a densidade bacteriana inicial dele era:  $D_i(\bar{x}(t_1, x_1))$

E a densidade em  $(t_1, x_1)$  será:

$$D(t_1, x_1) = D_i(\bar{x}(t_1; x_1)) \cdot \text{Exp} \left[ \int_0^{t_1} dt' P(\bar{x}(t'; x_1)) \right] \quad (\text{eq. 202.1})$$

No referencial deste elemento a velocidade é zero e só o que as bactérias notam é que a iluminação muda com o tempo:  
 $\frac{dD(t)}{dt} = P(t) D(t) \Rightarrow D(t) = D_i e^{\int_0^t P(t') dt'}$

posição dele em  $t = t'$

$$\left\{ \begin{aligned} dt' &= -\frac{1}{v(\bar{x}')} d\bar{x}' & \bar{x}(t') &= \bar{x}' \\ \bar{x}(0, x_1) &= x_1 & \bar{x}(t_1, x_1) &= \bar{x} \end{aligned} \right.$$

$$D(t_1, x_1) = D_i(\bar{x}(t_1; x_1)) \cdot \text{Exp} \left[ \int_{\bar{x}}^{x_1} d\bar{x}' \frac{P(\bar{x}')}{v(\bar{x}')} \right]$$

notação

Voltando a mundo menos infeccioso da teoria de campos, podemos usar esta solução fazendo as substituições adequadas. De 202.1 temos:

$$\left. \begin{aligned} L_N\left(\frac{k}{M}\right) &\leftrightarrow t \\ \lambda &\leftrightarrow x \\ G^{(2)}(k, \lambda) &\leftrightarrow P(t, x) \\ -\beta(\lambda) &\leftrightarrow v(x) \\ 2\gamma(\lambda) - 2 &\leftrightarrow P(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} t=0 &\leftrightarrow k=M \\ D_i(x) &\leftrightarrow \hat{G}_i^{(2)}(\lambda) \end{aligned} \right.$$

$$G^{(2)}(k, \lambda) = \hat{G}_i^{(2)}(\bar{\lambda}(k; \lambda)) \text{Exp} \left\{ \int_{k'=M}^{k'=k} d\left[L_N\left(\frac{k'}{M}\right)\right] \cdot \left[ 2 \delta[\bar{\lambda}(k'; \lambda)] - 2 \right] \right\} \quad (\text{eq. 202.2})$$

redefino  $\hat{G}_i^{(2)} \frac{M^2}{k^2} \equiv -\frac{i}{k^2} G_i^{(2)}$

$$\text{Exp} \left[ -2 \int_M^k d\left[L_N\left(\frac{k'}{M}\right)\right] \right] = \frac{M^2}{k^2}$$

$$G^{(2)}(k, \lambda) = -\frac{i}{k^2} G_i^{(2)}(\bar{\lambda}(k; \lambda)) \text{Exp} \left\{ 2 \int_{k'=M}^{k'=k} d\left[L_N\left(\frac{k'}{M}\right)\right] \delta[\bar{\lambda}(k'; \lambda)] \right\} \quad (\text{eq. 202.3})$$

Onde:

$$\bar{\lambda}(k; \lambda) \iff \frac{d}{d\left[L_N\left(\frac{k}{M}\right)\right]} \bar{\lambda}(k; \lambda) = \beta(\bar{\lambda}(k; \lambda))$$

$\frac{d}{dt} \bar{x}(t; x_1) = -v(\bar{x})$

$$\bar{\lambda}(M; \lambda) = \lambda$$

$\bar{x}(0; x_1) = x_1$

$\bar{x}(t; x_1) \Rightarrow$  descrevia a posição de elemento de fluido em t unidades de tempo atrás baseado em um ponto de referência  $x_1$  em que ele está "agora" (usamos  $t = 0$  para agora e  $t = t_1$  para o início, mas de fato quaisquer dois tempos poderiam ser usados)

$\bar{\lambda}(k; \lambda) \Rightarrow$  Vai descrever o valor de uma constante de acoplamento modificada: que muda quando mudamos k (a intensidade do momento) a partir de um ponto de referência (que foi tomado como  $k = M$ ). Note que a taxa de mudança é dada pela função  $\beta$

$\Rightarrow$  Isto é um parâmetro da função, apenas nos diz quanto ela vale no ponto de referência

$\bar{\lambda}(k) \Rightarrow$  "running coupling constant"

A única forma que temos de determinar a função desconhecida  $G_1$  é obtendo a função  $G(2)$  em alguma ordem de perturbação e expandir o lado direito de 202.3 no mesmo parâmetro. Por exemplo, em  $\lambda\phi^4$

$$G^{(2)}(k=M, \lambda) \stackrel{\text{PERT.}}{=} -\frac{\lambda}{M^2} + \mathcal{O}(\lambda^2) \iff G^{(2)}(k=M, \lambda) \stackrel{\text{202.3}}{=} -\frac{\lambda}{M^2} G^{(2)}(\bar{\lambda}(k=M; \lambda))$$

$$\therefore G^{(2)}(\lambda) = 1 + \mathcal{O}(\lambda^2) \rightarrow G^{(2)}(\bar{\lambda}) = 1 + \mathcal{O}(\bar{\lambda}^2)$$

Também podemos usar este procedimento para a função de quatro pontos. Calculemos esta função num regime cinemático bem específico:

$$G^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) \rightarrow p_i^2 = -P^2 > 0 \quad (\text{os quatro momentos são spacelike})$$

$$p_i \cdot p_j = 0 \quad \forall i \neq j$$

Neste caso temos uma única grandeza dimensional relevante  $P^2$  e podemos escrever  $G^{(4)}$  na forma:

$$G^{(4)}(P) = \left(\frac{\lambda}{P^2}\right)^4 g\left(\frac{P^2}{M^2}\right) \Rightarrow \text{podemos de novo fazer a troca } \frac{d}{dM} \rightarrow \frac{d}{dP}$$

$\text{Dim}[G^{(4)}] = -8 \quad \text{Dim} = -8 \quad \text{Dim} = 0$

$$\left[ p \frac{\partial}{\partial p} - \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} + 8 - \gamma(\lambda) \right] G^{(4)}(p, \lambda) = 0$$

Lembrando das bactérias:

$$G^{(4)}(p, \lambda) = \left( \frac{\lambda}{p^2} \right)^4 G_i^{(4)}(\bar{\lambda}(p, \lambda)) \text{Exp} \left\{ 4 \int_M^p d \left[ L_N \left( \frac{p'}{M} \right) \right] r[\bar{\lambda}(p'; \lambda)] \right\}$$

(eq. 204.1)

De novo a função "inicial" é fixada por:

$$G^{(4)}(p, \lambda) = -\lambda \lambda \left( \frac{\lambda}{p^2} \right)^4 + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

~~X~~ + ...

$$G^{(4)}(p, \lambda) = \left( \frac{\lambda}{p^2} \right)^4 G_i^{(4)}(\bar{\lambda}(p, \lambda))$$

$$G_i^{(4)}(\bar{\lambda}(p=M; \lambda)) = G_i^{(4)}(\lambda(M)) = -\lambda \lambda + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

$$\hookrightarrow G_i^{(4)}(\bar{\lambda}) = -\lambda \bar{\lambda} + \mathcal{O}(\bar{\lambda}^2) \quad (\text{eq. 204.2})$$

Agora podemos ver as consequências da eq. CS. De uma forma geral, qualquer função de Green, quando expandida perturbativamente, vai depender de duas grandezas:

$\lambda \leftrightarrow$  Constante de acoplamento

$L_N \left( -\frac{p^2}{M^2} \right) \leftrightarrow$  Grandeza adimensional que mede a "distância" entre p e  $\lambda = \bar{\lambda}(M)$

Para que a perturbação faça sentido precisamos que  $\lambda$  seja pequeno, mas também temos que evitar que

$$\left| \frac{p^2}{M^2} \right| \gg 1$$

As soluções que encontramos organizam a dependência nestes dois parâmetros ( $\lambda$  e o logaritmo de p) em uma função do acoplamento ( $G_i$ ) e uma exponencial que leva em conta a "distância" para o ponto de referência M. Quando esta "distância" é zero (estamos fazendo um espalhamento com momento da ordem da escala M) vemos que  $G_i^{(n)} = G^{(n)}$ , mas se nos afastamos deste regime o que as soluções 202.3 e 204.1 nos dizem é que devemos substituir  $\lambda$  por um acoplamento mais apropriado para aquela escala:  $\bar{\lambda}$ , o que reforça a idéia de que este novo acoplamento é justamente o acoplamento efetivo que obtivemos quando pensando no grupo de renormalização. Esta identificação fica bem clara na equação 204.2 - já que a função de quatro pontos será diretamente proporcional a  $\bar{\lambda}$ .

O fator exponencial dá conta de acumular todos os re-scalings do campo entre M e a escala de momento k (ou P). Cada mudança desta vira um fator que multiplica a função e Green e em cada escala levamos em conta o acoplamento correto para a escala. O número que multiplica a integral é o número de linhas externas (2 no caso de 202.3 e 4 para 204.1), como era de se esperar.

Para verificar estas afirmações, vamos obter  $\bar{\lambda}$  no caso da teoria  $\lambda\phi^4$

(195.1)  $\Rightarrow \beta(\lambda) = \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^2} + \mathcal{O}(\lambda^3)$        $\bar{\lambda}(k; \lambda) = ?$

$$\frac{d}{d[\ln(\frac{k}{M})]} \bar{\lambda} = \beta(\bar{\lambda}) \rightarrow \frac{d}{d[\ln(\frac{k}{M})]} \bar{\lambda} = \frac{3\bar{\lambda}^2}{(4\pi)^2}$$

$\bar{\lambda}(M; \lambda) = \lambda$

$$\frac{1}{\lambda^2} d\bar{\lambda} = \frac{3}{(4\pi)^2} d[\ln(\frac{k}{M})]$$

$$-\frac{1}{\lambda} + C = \frac{3}{(4\pi)^2} \ln(\frac{k}{M})$$

$$\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\bar{\lambda}} = \frac{3}{(4\pi)^2} \ln(\frac{k}{M})$$

$$\bar{\lambda}(k; \lambda) = \frac{\lambda}{1 - \frac{3\lambda}{(4\pi)^2} \ln(\frac{k}{M})}$$

(eq. 205.1)

Note que, expandindo em  $\lambda$ :

$$\bar{\lambda}(k; \lambda) = \lambda + \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^2} \ln(\frac{k}{M}) + \mathcal{O}(\lambda^3) = \lambda - \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^2} \ln(\frac{1}{k}) + \mathcal{O}(\lambda^3)$$

$k = k M$

que é exatamente o que obtivemos na pg 189 usando o fluxo do grupo de renormalização. Temos também o fato que para k muito pequeno o denominador fica enorme e o acoplamento desaparece, o que confirma nossa expectativa de que função  $\beta$  positiva significa uma teoria com acoplamento fraco para baixos momentos.

Levando a frente a expansão em  $\lambda$ , temos:

$$\bar{\lambda}(k; \lambda) = \lambda + C \lambda^2 \ln(\frac{k}{M}) + C^2 \lambda^3 \ln^2(\frac{k}{M}) + \dots$$

$$C = \frac{3}{(4\pi)^2}$$

Ou seja, teremos termos do tipo:

$$\lambda^{n+1} L_N^n \left( \frac{k}{M} \right)$$

O que nos mostra que a expansão perturbativa vai ter problemas para  $k$  muito longe de  $M$ . Para o caso em que o acoplamento efetivo é pequeno (caso contrário a expansão perturbativa realmente falha) equação de CS nos dá um meio de evitar este problema, já que a expressão 205.1 representa a soma de todos estes logaritmos e sua inclusão direto na contante de acoplamento. Desta forma, qualquer problema que possa vir do tamanho dos logs será traduzido no tamanho do acoplamento efetivo, e assim só temos que nos preocupar se este parâmetro é pequeno.

### Aplicação para QED

Vamos pensar na QED a curtíssimas distâncias (altos momentos para o fóton) quando podemos ignorar massa do elétron. Se seguirmos a mesma lógica que usamos para deduzir as equações de CS (pgs 192 e 193), podemos obter uma equação análoga para o potencial elétrico. Como o potencial entre cargas estáticas é observável, sua normalização é fixada e portanto não temos a função  $\gamma$  (como tínhamos nas funções de Green). Podemos então escrever a seguinte equação de Callan-Symanzik (para a transformada de Fourier do potencial):

$$\left[ M \frac{d}{dM} + \beta(e_r) \frac{d}{de_r} \right] V(q; M, e_r) = 0$$

Dim = -2

↳ podemos fazer o mesmo que na pág. 200 e trocar a derivada em  $M$  por derivadas em  $q$

$$\left[ q \frac{d}{dq} - \beta(e_r) \frac{d}{de_r} + 2 \right] V(q; M, e_r) = 0$$

Lembrando que:

(eq. 200.1)  $\Rightarrow \left[ k \frac{d}{dk} + 2 - \beta \frac{d}{d\lambda} - 2\gamma \right] G^{(2)} = 0$

$$\Downarrow$$

$$G^{(2)}(k, \lambda) = -\frac{i}{k^2} G_i^{(2)}(\lambda(R; \lambda)) \text{E} \times \text{r} \left\{ \int_{k'=M}^{k'=k} d \left[ L_N \left( \frac{k'}{M} \right) \right] \right\} \left[ \lambda(k'; \lambda) \right] \quad (\text{eq. 202.3})$$

$$V(q; M, e_r) = \frac{1}{q^2} V_i(\bar{e}(q; e_r))$$

(eq. 206.1)

↳  $\bar{e}(q; e_r) \Rightarrow \frac{d}{d \left[ \text{Log} \left( \frac{q}{M} \right) \right]} \bar{e}(q; e_r) = \beta(\bar{e})$

$$\bar{e}(M; e_r) = e_r$$

Sabemos que, em primeira ordem:

$$V(\varphi) \approx \frac{e^2}{\varphi^2} \iff V_i(\varphi) = \bar{e}^2 + \mathcal{O}(\bar{e}^4)$$

$$\therefore V(\varphi, e_R) = \frac{\bar{e}^2(\varphi; e_R)}{\varphi^2}$$

Usando a função  $\beta$  da QED (pg. 198),  $\beta(e) = \frac{e^3}{12\pi^2}$ , temos:

$$\frac{d}{d[\text{Log}(\varphi/m)]} \bar{e}(\varphi; e_R) = \frac{\bar{e}^3}{12\pi^2} \implies \frac{1}{\bar{e}^3} d\bar{e} = \frac{1}{12\pi^2} d \text{Log}(\varphi/m)$$

$$-\frac{1}{2} \frac{1}{\bar{e}^2} = \frac{\text{Log}(\varphi/m)}{12\pi^2} + C \xrightarrow{\bar{e}(m, e_R) = e_R} C = -\frac{6\pi^2}{e_R^2}$$

$$6\pi^2 \left( \frac{1}{\bar{e}_R^2} - \frac{1}{e^2} \right) = \text{Log}(\varphi/m)$$

$$\bar{e}^2(\varphi) = \frac{e_R^2}{1 - \left( \frac{e_R}{6\pi^2} \right) \text{Log}(\varphi/m)}$$

(eq. 207.1)

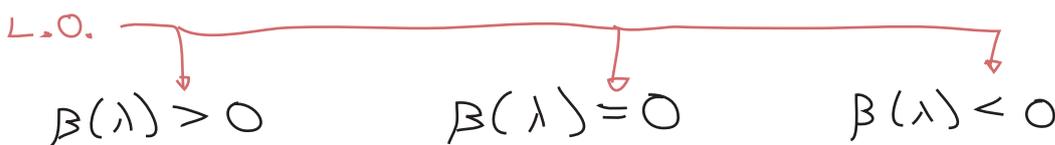
O que é muito similar à expressão obtida no fim da página 151, e fica idêntica se escolhermos  $M$  da ordem da massa do elétron  $M^2 = A m^2$ ,  $e_r = e$  e  $A = e^{(5/3)}$ .

### Evolução (running) das Constantes de Acoplamento

De uma forma bem geral, a evolução das constantes de acoplamento de teorias renormalizáveis no limite de massa zero será dado por:

$$\bar{\lambda}(\rho) \implies \frac{d}{d[\text{Log}(\varphi/m)]} \bar{\lambda} = \beta(\bar{\lambda})$$

Na região perturbativa, temos basicamente três comportamentos possíveis:



$$\beta(\lambda) > 0$$

$$p \rightarrow 0 \Rightarrow \lambda \rightarrow 0$$

↳ teoria preditiva a baixas energias (ou grandes distâncias)

Teoria fica não perturbativa para curtas distâncias, altos momentos.

$$\beta(\lambda) = 0$$

⇒ A constante de acoplamento efetiva é, de fato, constante (não depende do momento). A constante renormalizada é igual a nua e portanto os únicos infinitos possíveis na teoria estão em contribuição para a *field strength* ( $Z$ ), que somem de qualquer elemento de matriz  $S$ . São chamadas de **QFTs finitas**.

$$\beta(\lambda) < 0$$

⇒ Suponha que o sinal da função  $\beta$  da QED fosse invertido:

$$\beta = -\frac{1}{2} C e^3 \Rightarrow \bar{e}^2(p) = \frac{e^2}{1 + C e^2 L_n(p/m)}$$

$$p \rightarrow \infty \Rightarrow \bar{e}^2 \rightarrow 0 \quad \text{Liberdade assintótica!}$$

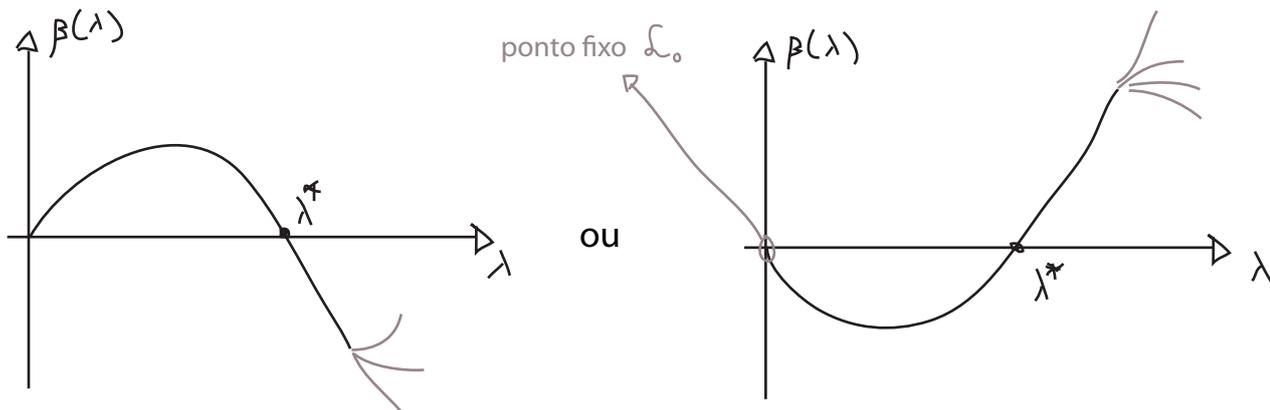
↳ teoria preditiva a altas energias (ou curtas distâncias)

Todas as divergências que aparecem para momentos grandes de alguma forma se somam para dar um resultado inócuo, a teoria é bem comportada para energias arbitrariamente grandes.

Fica não perturbativa para grandes distâncias, pequenos momentos.

Os resultados acima indicam que tanto para  $\beta$  positivo quando negativo, temos uma escala finita em que os acoplamentos divergem. Mas antes de chegar nesta divergência o acoplamento fica grande demais para que a expansão perturbativa faça sentido. O que acontece se sairmos da região perturbativa? Neste caso não temos como calcular a função  $\beta$ , mas as equações do grupo de renorm. continuam valendo e podemos usá-las para uma discussão qualitativa.

Conforme nos aproximamos desta região de acoplamento forte temos que levar em conta mais termos na expansão de  $\beta$ , estes termos podem ter todos o mesmo sinal inicial, mas suponha que a contribuição deles seja de sinal oposto. Neste caso poderíamos obter funções  $\beta$  da seguinte forma:

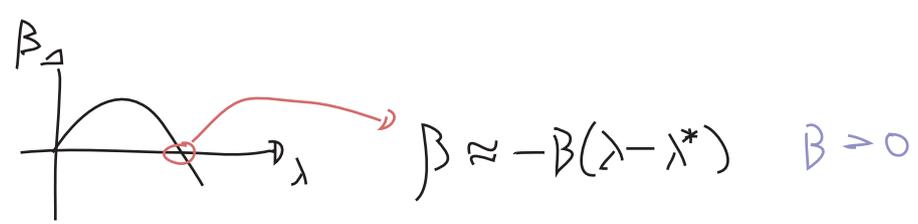


Quando  $\bar{\lambda}$  chega perto deste ponto  $\lambda^*$ ,  $\beta$  vai para zero e a constante de acoplamento pára de evoluir. Temos um novo ponto fixo, e:

$$p \rightarrow \infty \quad \bar{\lambda} \rightarrow \lambda^*$$

teorias com ponto fixo no ultravioleta ou infravermelho  
(infrared stable e ultraviolet stable fixed points)

Perto deste ponto fixo (assumindo o caso  $\beta(\lambda \sim 0) > 0$ , com região não perturbativa no UV):



$$\frac{d}{d[\text{Log}(p/M)]} \bar{\lambda} \approx -\beta(\bar{\lambda} - \lambda^*) \Rightarrow \bar{\lambda}(p) = \lambda_* + C \left(\frac{M}{p}\right)^\beta$$

$$\frac{1}{(\bar{\lambda} - \lambda^*)} d\bar{\lambda} = -\beta d[\text{Log}(p/M)]$$

$$\text{Log}(\bar{\lambda} - \lambda^*) = -\beta \text{Log}\left(\frac{p}{M}\right) + C$$

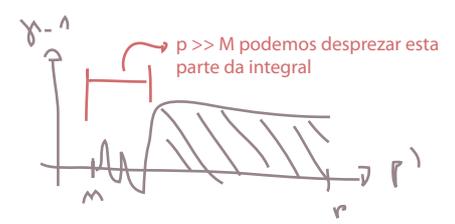
$$\bar{\lambda} - \lambda^* = C' \left(\frac{p}{M}\right)^{-\beta}$$

$p \rightarrow \infty$   
 $\bar{\lambda} \rightarrow \lambda_*$  } e a velocidade é determinada pela inclinação local de  $\beta$

Vejamos o que acontece com a função de 2 pontos de um campo escalar neste caso. De 202.2 temos:

$$G^{(2)}(p, \lambda) = \hat{G}_i^{(2)}(\bar{\lambda}(p; \lambda)) \text{Exp} \left\{ 2 \int_{p'=M}^{p'=p} d[\text{Ln}\left(\frac{p'}{M}\right)] \cdot \left[ \gamma[\bar{\lambda}(p'; \lambda)] - 1 \right] \right\}$$

para  $p$  grande a integral será dominada por  $\bar{\lambda} \sim \lambda^*$



$$G^{(2)}(p \rightarrow \infty, \lambda) \approx \hat{G}_i^{(2)}(\lambda^*) \text{Exp} \left\{ 2 \text{Ln}\left(\frac{p}{M}\right) [\gamma(\lambda^*) - 1] \right\} \approx C \left(\frac{1}{p^2}\right)^{1 - \gamma(\lambda^*)}$$

$$\text{Exp} \left\{ \text{Ln} \left[ \left(\frac{p^2}{M^2}\right)^{\gamma-1} \right] \right\}$$

Perto deste ponto fixo a função de dois pontos volta a se comportar como uma simples potência de  $p^2$ , só que é a **potência errada** (do ponto de vista de análise dimensional). Chamamos  $\gamma(\lambda^*)$  de **dimensão anômala** do campo (de fato a função  $\gamma$  acabou "pegando" este nome mesmo quando não há ponto fixo na teoria)

### Renormalização de operadores locais

Suponha que queiramos obter o comportamento de um operador local obtido como o produto de dois ou mais campos conforme renormalizamos a teoria.

$\mathcal{O}(x) \equiv$  operador composto de campos escalares

Da mesma forma que fizemos para o campo, podemos definir um processo de renormalização para este operador, re-escrevendo a Lagrangeana de forma a obter um contra termo:

$$\int_0 \mathcal{O}(x)$$

que garante o operador renormalizado  $\mathcal{O}_m \equiv Z_0^{-1}(M) \mathcal{O}_0$  satisfaça as condições de normalização em uma escala M. A função de green em que estamos interessados é:

$$G^{(n;1)}(p_1, \dots, p_n; k) = \langle \phi(p_1) \dots \phi(p_n) \hat{\mathcal{O}}_m(k) \rangle$$

notação:

$$G^{(n;m)}$$

função de Green com n campos e m operadores locais

Escrevendo-a em função dos campos nós, temos:

$$G^{(n;1)}(p_1, \dots, p_n; k) = Z(M)^{-n/2} Z_0(M)^{-1} \langle \phi_0(p_1) \dots \phi_0(p_n) \mathcal{O}_0(k) \rangle$$

Repetindo a dedução da equação de CS, temos:

$$\left[ M \frac{d}{dM} + \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} + n \gamma(\lambda) + \gamma_0(\lambda) \right] G^{(n;1)} = 0 \quad (\text{eq. 210.1})$$

$$\gamma_0(\lambda) = M \frac{d}{dM} \ln[Z_0(M)]$$

Em muitas teorias temos mais de um operador com os mesmos números quânticos e a mesma dimensão, e neste caso podemos ter misturas entre estes operadores (as correções quânticas de um deles vai gerar contribuições aos outros). Por exemplo:

$$\mathcal{O}^1 = \bar{\psi} [\gamma^\mu \mathcal{D}^\nu + \gamma^\nu \mathcal{D}^\mu] \psi$$

$$\mathcal{O}^2 = F^{\mu\lambda} F^\nu{}_\lambda$$

Neste caso temos que definir um conjunto de operadores  $\{\mathcal{O}^i\}$  de forma que:

$$\mathcal{O}_0^i \equiv Z_{\mathcal{O}}^i(M) \mathcal{O}_M^i$$

o que também transforma a dimensão anômala  $\gamma$  em uma matriz:

$$\gamma_{\mathcal{O}}^{ij} = [Z_{\mathcal{O}}^{-1}(M)]^{ik} M \frac{d}{dM} [Z_{\mathcal{O}}(M)]^{kj}$$

Para obter uma expressão para  $\gamma$ , calculemos a função de green com m campos escalares e o operador:

$$G^{(m;1)} = \langle \phi(p_1) \dots \phi(p_m) \mathcal{O}_M(k) \rangle$$

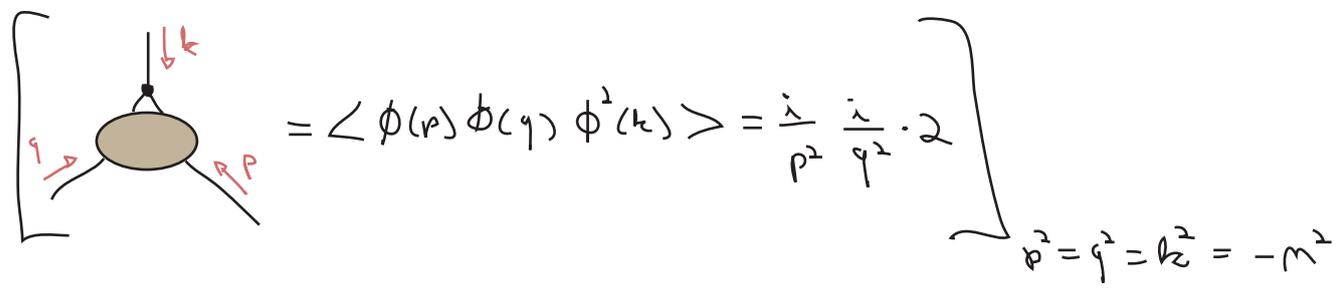


Usando a mesma lógica das páginas 196 a 198, se esta função de Green obedece as equações de CS (eq 210.1), então:

$$\gamma_{\mathcal{O}}(\lambda) = M \frac{d}{dM} \left( -\delta_{\mathcal{O}} + \frac{m}{2} \delta_Z \right) \quad (\text{eq. 211.1})$$

↑ número de linhas externas escalares

Um exemplo seria analisar o operador  $\phi^2$ , para evitar confusão entre a massa introduzida por este operador e a massa do campo escalar (que está sendo renormalizada para zero) vamos olhar uma função de green onde este operador carrega um momento diferente de zero, e definir sua normalização por:



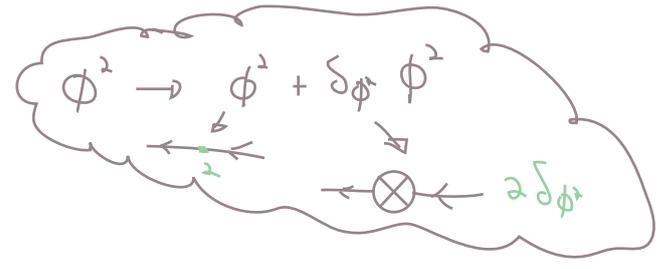
A primeiro loop a contribuir para esta função de Green é (de novo, estamos falando de  $\lambda\phi^4$ ):

$$= \frac{i}{p^2} \frac{i}{q^2} \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} (-i\lambda) \frac{i}{\ell^2} \frac{i}{(k+\ell)^2} =$$

$$= \frac{i}{p^2} \frac{i}{q^2} \left[ -\frac{\lambda}{4\pi^2} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-\frac{d}{2}}} \right]$$

$$\Delta = \Delta(p, q, k) \rightarrow \Delta(p^2=q^2=k^2=-M^2) = M^2$$

Em  $-M^2$  este loop deve ser cancelado por:



$$\text{tree diagram} = \frac{i}{p^2} \frac{i}{q^2} 2\delta\phi^2$$

$$\delta\phi^2 = \frac{\lambda}{2(4\pi)^2} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(M^2)^{2-\frac{d}{2}}} \quad (\text{eq. 212.1})$$

$$\sim \frac{\lambda}{2(4\pi)^2} \left( \frac{2}{\epsilon} - \text{Log}(M^2) + \dots \right)$$

Como em  $\lambda\phi^4$  não temos contribuição de ordem  $\lambda$  para  $\delta z$ , então:

(eq. 211.1 com  $\frac{d}{dM}(\delta z) \sim \mathcal{O}(\lambda^2)$ )

$$\gamma_{\phi^2} = M \frac{d}{dM} (-\delta\phi^2) = M \frac{-\lambda}{2(4\pi)^2} \left( -\frac{2}{M} \right) \Rightarrow$$

$$\gamma_{\phi^2} = \frac{\lambda}{16\pi^2} \quad (\text{eq. 212.2})$$

### Evolução dos parâmetros de massa

(Peskin 12.5)

Podemos usar a evolução de operadores acima para estudar a evolução da massa na teoria. Para tanto introduziremos a massa como uma pequena perturbação na teoria sem massa, esta aproximação é boa desde que a massa física seja comparável aos momentos típicos (fica ruim para momentos menores que a massa).

$\mathcal{L}_m \leftarrow$  lagrangeana sem massas, renormalizada na escala M

$$\downarrow$$

$$\mathcal{L}_m + \frac{1}{2} m^2 \phi_m^2$$

$$G^{(n)} = G^{(n;0)} + m^2 G^{(n;1)} + (m^2)^2 G^{(n;2)} + \dots + (m^2)^l G^{(n;l)}$$

A generalização de 210.1 para várias inserções do operador é bastante óbvia:

$$\left[ m \frac{d}{dM} + \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} + n \gamma(\lambda) + \gamma_{\phi^2}(\lambda) \right] G^{(n;l)} = 0 \quad (\text{eq. 212.3})$$

Se escrevemos:

$$G^{(n)} = \sum_l (m^2)^l G^{(n;l)}$$

aparece da mesma forma que o  $\gamma_{\phi^2}(\lambda)$  (pgs 192-193), só que com o número de inserções do operador ( $l$ ) ao invés do número de operadores do campo escalar ( $n$ )

Então:  $m^2 \frac{d}{dm^2} G^{(n)} = \sum_i l(m^2)^p G^{(n);l}$

de forma que a seguinte equação garante 212.3 para cada ordem de  $m^2$ :

$$\left[ m \frac{d}{dM} + \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} + n \gamma(\lambda) + \gamma_\phi m^2 \frac{d}{dm^2} \right] G^{(n)}(\{p_i\}; M, \lambda, m) = 0 \quad (\text{eq. 213.1})$$

$$\hookrightarrow \frac{d}{d[\log(p/m)]} \bar{m}^2 = \gamma_{\phi^2}(\bar{\lambda}) \bar{m}^2(p) \iff \bar{m}^2(M) = m^2$$

O running da massa vai depender essencialmente da **dimensão anômala do operador  $\phi^2$**  na teoria em questão. Este argumento vale para qualquer operador que eu adicione perturbativamente:

$$\mathcal{L}(C_i) = \mathcal{L}_m + \sum_i C_i \mathcal{O}_m^i(x)$$

dimensão depende da dimensão do operador

$$\left[ m \frac{d}{dM} + \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} + n \gamma(\lambda) + \sum_i \gamma_i(\lambda) C_i \frac{d}{dC_i} \right] G^{(n)}(\{p_i\}; M, \lambda, \{C_i\}) = 0 \quad (\text{eq. 213.2})$$

Podemos escrever isso de forma mais conveniente:

$$d_i \equiv \text{Dim}[\mathcal{O}^i] \\ \downarrow \\ C_i \equiv \rho_i M^{4-d_i}$$

$$\mathcal{L}(\rho_i) = \mathcal{L}_m + \sum_i \rho_i M^{4-d_i} \mathcal{O}_m^i(x) \quad \hookrightarrow \text{Dim}[\rho_i] = 0$$

estamos introduzindo uma dependência em M esta nova dependência é compensada por  $\rho_i$

Com isso 213.2 fica:

$$\left[ m \frac{d}{dM} + \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} + n \gamma(\lambda) + \sum_i (\gamma_i(\lambda) + d_i - 4) \rho_i \frac{d}{d\rho_i} \right] G^{(n)}(\{p_i\}; M, \lambda, \{\rho_i\}) = 0$$

$G^{(n)}$

$\dots + \underbrace{\dots}_{f(M)} + \dots + \frac{\rho_i M^{4-d_i}}{\dots} + \dots$

$f(M)$  (antes a dep. em M estava só aqui)

$M \frac{d}{dM} \left( \frac{\rho_i M^{4-d_i}}{\dots} \right) \sim (4-d_i) M^{4-d_i} \rho_i$

$(d_i - 4) \rho_i \frac{d}{d\rho_i} \left( \frac{\rho_i M^{4-d_i}}{\dots} \right) \sim (d_i - 4) M^{4-d_i} \rho_i$

cancelamento

$$\beta_i \equiv (d_i - \gamma + \delta_i) \rho_i$$

$$\left[ m \frac{d}{dm} + \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} + n \delta(\lambda) + \sum_i \beta_i \frac{d}{d\rho_i} \right] G^{(n)}(\{ \rho_i \}; M, \lambda, \{ \rho_i \}) = 0 \quad (\text{eq. 214.1})$$

Perceba que agora todos os acoplamentos (adimensionais)  $\rho_i$ , aparecem com a mesma forma de  $\lambda$ . Podemos voltar às nossas bactérias para resolver o problema, só que agora elas fluem num espaço multidimensional com velocidades  $\beta$  e  $\beta_i$ . O resultado vai depender de constante de acoplamento efetivas que evoluem segundo equações:

$$\frac{d}{d[\text{Log}(\rho/m)]} \bar{\rho}_i = \beta_i(\bar{\rho}, \bar{\lambda}) \quad (\text{eq. 214.2})$$

Em suma, temos:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + \text{contra-termos} \Rightarrow \bar{\lambda} \leftrightarrow \beta(\lambda)$$

$$+ \rho_i M^{4-d_i} \mathcal{O}_i(\psi) \Rightarrow \rho_i \leftrightarrow \beta_i(\rho_i) \dots \beta_i = (d_i - \gamma + \delta_i) \rho_i$$

No limite em que todas as correções são muito pequenas (perto da teoria livre), podemos ignorar as contribuições de  $\gamma_i$  para  $\beta_i$  ( $\gamma_i$  depende de  $\rho_i$  ou  $\lambda$ , portanto  $\gamma_i \rho_i \sim O(\text{pert}^2)$ ); neste caso:

$$\frac{d}{d[\text{Log}(\rho/m)]} \bar{\rho}_i = [d_i - \gamma] \bar{\rho}_i \rightarrow \beta_i(\bar{\rho}_i) = (d_i - \gamma) \bar{\rho}_i + \underbrace{\delta_i \bar{\rho}_i}_{\sim 0}$$

$$\bar{\rho}_i = \rho_i \left( \frac{\rho}{m} \right)^{d_i - \gamma}$$

O que nos fornece o comportamento que esperávamos depois da análise pelo método do Wilson: operadores com dimensão maior que 4 (não-renormalizáveis em quatro dimensões) tem acoplamentos que diminuem para momentos pequenos.

Em  $d$  dimensões, temos que tomar cuidado com o termo  $\lambda \phi^4$ , que fica com acoplamento dimensional. Fazemos então:

$$\text{Dim}[\phi] = \frac{d-2}{2} \quad \text{Dim}[\phi^4] = 2d - 4$$

$$\hookrightarrow \text{Dim}[\lambda] = d - (2d - 4) = 4 - d$$

$$\lambda \rightarrow \lambda' m^{4-d} \quad (\text{definindo um novo } \lambda \text{ adimensional})$$

$\text{Dim}[\phi_m^2] = d-2 \rightarrow P_m M^{d-(d-2)} \phi_m^2 = P_m M^2 \phi_m^2$  (no caso do operador de massa, nada muda)

finalmente  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \frac{1}{2} P_m M^2 \phi_m^2 - \frac{1}{4} \lambda M^{4-d} \phi_m^4 + \dots$

para outros operadores basta trocar:  $M^{4-d_i} \rightarrow M^{d-d_i}$   $\rightarrow$  dimensão do operador

Também precisamos calcular os contratermos em  $d$  dimensões. O cálculo que fizemos para  $\delta \phi^2$  muda da seguinte forma, para  $d$  próximo a 4:

$$\frac{\Gamma(2-d/2)}{(M^2)^{2-d/2}} \stackrel{d \rightarrow 4}{\sim} -\frac{2}{d-4} - \text{Log}(M^2) + (d-4) \left[ -\frac{1}{4} \text{Log}^2(M^2) - \frac{1}{2} \gamma \text{Log}(M^2) \right] + \dots + \mathcal{O}[(d-4)^2]$$

indep de M

$$M \frac{d}{dM} \frac{\Gamma(2-d/2)}{(M^2)^{2-d/2}} = -2 + (d-4) \left[ -\gamma - \text{Log}(M^2) \right] + \mathcal{O}[(d-4)^2]$$

$$M \frac{d}{dM} \frac{\Gamma(2-d/2)}{(M^2)^{2-d/2}} \sim -2 + \mathcal{O}(d-4)$$

$\rightarrow$  o que tínhamos antes (em  $d = 4$ , eqs. 212.1 e 212.2)

$$\gamma_{\phi^2} = \frac{\lambda}{2(4\pi)^2} \left[ 2 - \mathcal{O}(d-4) \right] = \left[ \gamma_{\phi^2}^{(4)} + \mathcal{O}[\lambda(d-4)] \right] \quad \gamma_{\phi^2}^{(4)} = \frac{\lambda}{16\pi^2}$$

$$\beta_i = (d_i - d + \gamma_i) P_i \rightarrow \beta_m = \left\{ 2 - (d-4) + \gamma_{\phi^2}^{(4)} + \mathcal{O}[\lambda(d-4)] \right\} P_m = \left\{ -2 + \gamma_{\phi^2}^{(4)} - (d-4) + \mathcal{O}[\lambda(d-4)] \right\} P_m$$

$$\lambda(d-4) \sim 0 \quad \beta_i(d-4) \sim 0 \quad \beta_m = \left( -2 + \gamma_{\phi^2}^{(4)} \right) P_m + \dots \quad (\text{eq. 215.1})$$

Algo similar ocorre com as outras funções:  $\beta_i = \left[ d_i - d + \gamma_i^{(4)} \right] P_i + \dots$

No caso da função  $\beta$  temos um contribuição da dimensão de massa de  $\lambda$ :

$$\beta = (d-4)\lambda + \beta^{(4)}(\lambda) \quad (\text{eq. 215.2}) \quad \beta = (d-4)\lambda + M^{d-4} \mathcal{O}(\lambda^2) = (d-4)\lambda + (1 + (d-4)\text{Log}(M) + \dots) \mathcal{O}(\lambda^2)$$

$\lambda^2(d-4) \sim 0$   
 $1 \cdot \mathcal{O}(\lambda^2) = \beta^{(4)}(\lambda)$

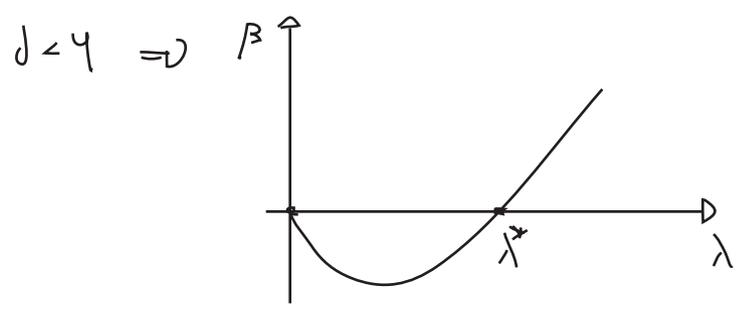
modificando o que há na pg 195  $G^{(4)} \sim \lambda M^{4-d} + \dots \rightarrow \left[ M \frac{d}{dM} + \beta \frac{d}{d\lambda} + \dots \right] G^{(4)} = 0 \Rightarrow \left[ \lambda(d-4) M^{4-d} + \beta M^{4-d} + \mathcal{O}(\lambda^2) \right] = 0$   
introduziu a ordem  $\lambda^1$  (que antes era nula)

Usando o resultado 195.1:  $\beta = \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^2} + \mathcal{O}(\lambda^3)$

temos:

$$\beta = -(1-d)\lambda + \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^2}$$

$$d \geq 4 \Rightarrow \beta > 0 \quad \therefore \lambda \rightarrow 0 / p \rightarrow 0$$



$$\lambda_* = \frac{16\pi^2}{3} (1-d)$$

o que é o comportamento que previmos nas págs 208-209, com um ponto fixo em  $\lambda^*$

### Conexão com os expoentes críticos

Usando o resultado 215.1, podemos obter a evolução do parâmetro de massa em  $\lambda\phi^4$ :

$$\beta_m = (-2 + \gamma_{\phi^2}^{(4)}) \bar{p}_m \rightarrow \frac{d}{d[\text{Log}(M/\mu)]} \bar{p}_m = \beta_m(\bar{p}_m) = (-2 + \underbrace{\gamma_{\phi^2}^{(4)}}_{\frac{\lambda}{16\pi^2}}) \bar{p}_m \quad (\text{eq. 212.2})$$

$$\lambda = 0 \Rightarrow \frac{1}{\bar{p}_m} d\bar{p}_m = -2 d[\text{Log}(M/\mu)] \Rightarrow \bar{p}_m = p_m \left(\frac{M}{\mu}\right)^2 \quad (\text{eq. 216.1})$$

Lembrando que  $p_m = \frac{m^2}{M^2} \Rightarrow \bar{p}_m = \frac{m^2}{p^2}$  (o que apenas nos diz que quando  $p \sim m$  o termo de massa se torna importante, e é pouco importante para  $p \gg m$ )

$$\bar{m}^2(p) = M^2 \bar{p}_m = m^2 \left(\frac{M}{p}\right)^2$$

Pensando em um sistema de mecânica estatística, lembremos que o comprimento de correlação desempenha o papel da massa deste campo escalar. Levando em conta a evolução desta massa podemos definir:

$$\xi \sim p_0^{-1} \quad / \quad \bar{p}_m(p_0) = 1 \quad \dots \Rightarrow \bar{p}_m(p_0) = 1 \Rightarrow \frac{m^2}{p_0^2} = 1 \Rightarrow p_0^2 = m^2 \Rightarrow p_0^2 = p_m M^2$$

um momento específico (não confundir com a componente zero do momento)

$$\xi \sim (M^2 p_m)^{-1/2} = m^{-1} \quad (\text{como esperado, nada demais aqui})$$

Usando o mesmo critério para definir  $\xi$  perto do ponto fixo  $\lambda^*$ , obtemos:

$$\frac{d}{d[\log(M/\mu)]} \bar{P}_m = \left( -2 + \gamma_{\phi^2}(\lambda^*) \right) \bar{P}_m \Rightarrow \bar{P}_m = P_m \left( \frac{M}{\mu} \right)^{2 - \gamma_{\phi^2}(\lambda^*)} \quad (\text{eq. 130.1})$$

$$\bar{P}_m(P_0) = 1 \Rightarrow P_m \left( \frac{M}{P_0} \right)^{2 - \gamma_{\phi^2}(\lambda^*)} = 1 \Rightarrow P_0^{-1} = P_m^{-1} \nu^1$$

$$P_0 = P_m^{-1} M$$

$$\xi \sim P_m^{-1}$$

$$\gamma_{\phi^2} = \frac{\lambda}{16\pi^2} \quad \lambda^* = \frac{16\pi^2}{3} (4-d)$$

$$\nu^{-1} = 2 - \gamma_{\phi^2}(\lambda^*) = 2 - \frac{\lambda^*}{16\pi^2} = 2 - \frac{1}{3} (4-d) + \mathcal{O}[(4-d)^2]$$

Wilson & Fisher mostraram que podemos obter o resto da expansão.

Comparando com o que obtivemos para o modelo de Landau:

$$\xi = [2k(T - T_c)]^{-1/2}$$

vemos que  $P_m$  é que desempenha o papel do parâmetro que mede a distância para a temperatura crítica, e  $\nu$  mede como o comprimento de correlação cresce conforme nos aproximamos desta temperatura:

$$P_m \sim (T - T_c) \Rightarrow \xi \sim (T - T_c)^{-\nu}$$

$$\nu = \frac{1}{2 - \frac{1}{3} (4-d) + \mathcal{O}[(4-d)^2]}$$

$$\nu \approx \frac{1}{2} \quad (\text{de acordo com o modelo de Landau})$$

contruindo uma teoria escalar com simetria  $O(N)$  é possível mostrar que:

$$\nu^{-1} = 2 - \frac{N+2}{N+8} (4-d)$$

com N campos escalares

O que nos permite descrever o comportamento perto do ponto crítico de diferentes materiais magnéticos:

$$N = 1 \Rightarrow \text{com eixo preferencial de magnetização}$$

$N = 2 \Rightarrow$  com plano preferencial de magnetização

$N = 3 \Rightarrow$  isotrópicos

$N$	1	2	3
$\nu_{\text{TEOR}}$	0,6	0,63	0,65
$\nu_{\text{EXP}}$	0,64	0,67	0,71

E os valores previstos concordam bem com experimentos ( $d = 3$ ):

Curiosamente, o comportamento crítico pode ser estudado para uma grande variedade de sistemas (flúidos, ligas binárias, superfluidos, ...). É um fato experimental que os expoentes perto do ponto crítico dependem apenas da dimensão da variável que flutua e não dos detalhes microscópicos. Isso pode parecer um milagre, mas do ponto de vista da teoria quântica de campos, é um fato natural, uma consequência direta do grupo de renormalização. Quando o sistema passa a ser dominado pela dinâmica de grandes distâncias restam apenas alguns operadores relevantes, e tudo fica muito simples. Esta idéia, levada para as teorias relativísticas, nos explica porque as teorias interessantes para física de partículas são renormalizáveis. Isto indica apenas que estamos longe do cut-off destas teorias.

Exponent	Landau	QFT	Lattice	Experiment	
<i>N = 1 Systems:</i>					
$\gamma$	1.0	1.241 (2)	1.239 (3)	1.240 (7)	binary liquid
				1.22 (3)	liquid-gas
				1.24 (2)	$\beta$ -brass
$\nu$	0.5	0.630 (2)	0.631 (3)	0.625 (5)	binary liquid
				0.65 (2)	$\beta$ -brass
$\alpha$	0.0	0.110 (5)	0.103 (6)	0.113 (5)	binary liquid
				0.12 (2)	liquid-gas
$\beta$	0.5	0.325 (2)	0.329 (9)	0.325 (5)	binary liquid
				0.34 (1)	liquid-gas
$\eta$	0.0	0.032 (3)	0.027(5)	0.016 (7)	binary liquid
				0.04 (2)	$\beta$ -brass
<i>N = 2 Systems:</i>					
$\gamma$	1.0	1.316 (3)	1.32 (1)		
$\nu$	0.5	0.670 (3)	0.674 (6)	0.672 (1)	superfluid $^4\text{He}$
$\alpha$	0.0	-0.007 (6)	0.01 (3)	-0.013 (3)	superfluid $^4\text{He}$
<i>N = 3 Systems:</i>					
$\gamma$	1.0	1.386 (4)	1.40 (3)	1.40 (3)	EuO, EuS
				1.33 (3)	Ni
				1.40 (3)	RbMnF <sub>3</sub>
$\nu$	0.5	0.705 (3)	0.711 (8)	0.70 (2)	EuO, EuS
				0.724 (8)	RbMnF <sub>3</sub>
$\alpha$	0.0	-0.115 (9)	-0.09 (6)	-0.011 (2)	Ni
$\beta$	0.5	0.365 (3)	0.37 (5)	0.37 (2)	EuO, EuS
				0.348 (5)	Ni
				0.316 (8)	RbMnF <sub>3</sub>
$\eta$	0.0	0.033 (4)	0.041 (14)		