

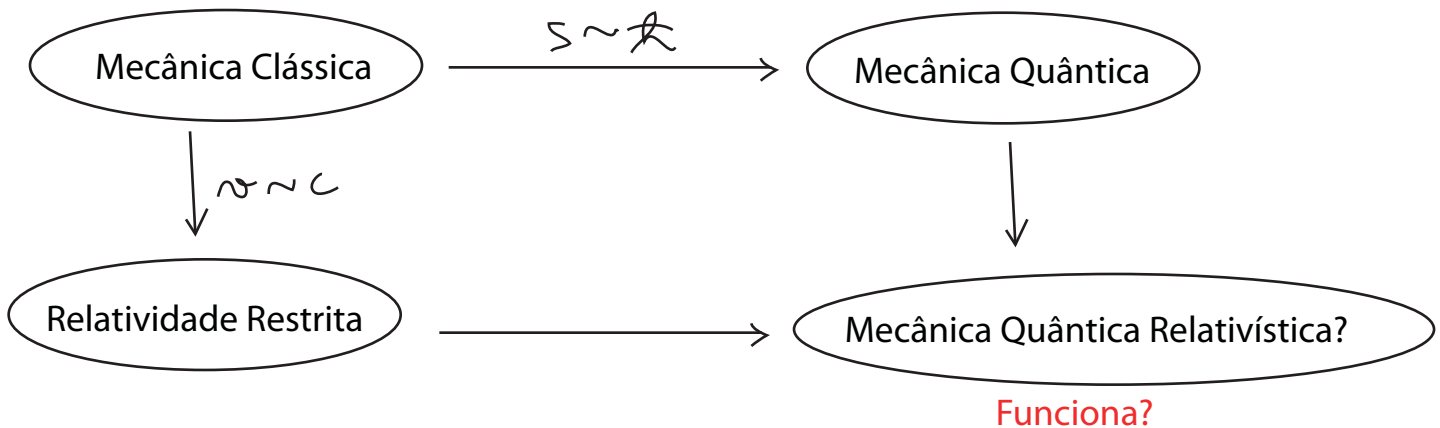
Teoria Quântica de Campos

(escopo do curso e um pouco de história)

(Weinberg cap 1, Peskin 2.1, Nastase 1)

Objetivo: uma teoria Quântica e Relativística (no sentido restrito)

Em se tratando de partículas(-onda):



Mecânica Clássica: "estado" definido por um conjunto de coordenadas canônicas $\{q_i, p_i\}$ e a evolução temporal deste estado é dado pela Hamiltoniana do sistema.

Quantizar é essencialmente transformar estas coordenadas em operadores, impondo:

$$[\hat{q}_i, \hat{q}_j] = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0 \quad [\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}$$

Convenção! $\hbar = 1$
unidades naturais: $c = 1$

e os estados passam a ser determinados por vetores no espaço de Hilbert, onde agem estes operadores. Representando estes vetores em termos de funções de onda $\Psi(\vec{x}, t)$ os operadores são:

$$\left. \begin{array}{l} (1) \\ \text{(partícula)} \\ (\hbar=1) \end{array} \right\} \begin{cases} \hat{p}^i = -i \nabla^i \\ \hat{x}^i = x^i \\ \hat{H} = i \frac{\partial}{\partial t} \end{cases}$$

(é importante notar que o tempo não é um operador, não é um observável, e sim um parâmetro. Logo há uma grande assimetria no tratamento do espaço e do tempo)

Podemos então obter a equação de Schrödinger para uma partícula livre:

Classicamente:

$$H = \frac{p^2}{2m}$$

Versão quantizada:

$$\hat{H} \psi = \frac{\hat{p}^2}{2m} \psi \implies i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = - \frac{1}{2m} \nabla^2 \psi(x, t) \quad (\text{eq. 1.1})$$

Primeira derivada no tempo, segundas derivadas no espaço, mau sinal

Lembrando que a interpretação probabilística nos diz que:

$$P(\vec{x}, t) = |\psi(\vec{x}, t)|^2 \xrightarrow{\text{(eq. 1.1)}} \frac{dP(\vec{x}, t)}{dt} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x}, t) = 0$$

(densidade de probabilidade) (esta é uma equação de continuidade)

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = -\frac{i}{2m} [\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*]$$

ρ é conservada e positivo definida!

Poderíamos fazer a mesma coisa com a Hamiltoniana relativística? (Klein, Gordon e Schrödinger tentaram):

$$H^2 = \vec{p}^2 + m^2 \xrightarrow{c=1} -\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(\vec{x}, t) = -\nabla^2 \psi + m^2 \psi$$

$$\square (\square^2 + m^2) \psi = 0 \quad \text{(eq. 2.1)}$$

Equação de Klein-Gordon

$$\psi(\vec{x}, t) = N e^{i\vec{p} \cdot \vec{x} - iEt}$$

solução (com $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$) (eq. 2.2)

$$\square^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

A segunda derivada no tempo, deixa a equação de continuidade na forma:

$$-i\psi^* (\text{2.1}) + i\psi (\text{2.1})^* = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left[i \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) \right] + \vec{\nabla} \cdot \left[-i \left(\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^* \right) \right] = 0$$

(essencialmente a mesma de antes)

$$j = 2E|N|^2$$

No entanto:

$$(eq. 2.2) \rightarrow E = \pm \sqrt{(\vec{p}^2 + m^2)}$$

Energia e densidade de probabilidades negativas!

O Dirac encontrou outra solução, envolvendo apenas primeiras derivadas:

$$\hat{H}^2 \psi = (\vec{p}^2 + m^2) \psi \xleftrightarrow{\text{buscamos}} \hat{H} \psi = (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m) \psi$$

$$\alpha_i^2 = \beta^2 = 1$$

$$i \neq j \Rightarrow \{\alpha_i, \alpha_j\} = \{\alpha_i, \beta\} = 0$$

$$\hat{H}^2 = \frac{1}{2} (\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) \hat{p}_j \hat{p}_i + (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) \hat{p}_i m + \beta^2 m^2$$

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta\} \Rightarrow (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \gamma_\mu$$

(matrizes)

$$(i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0 \quad (\text{eq. 3.1})$$

$\gamma^0 = \beta$
 $\gamma^i = \beta \alpha_i$

Equação de Dirac

$$\psi = u(\vec{p}^0) e^{-i \rho_\mu x^\mu}$$

Spinores que descrevem uma partícula de spin 1/2
 (neste "approach" isto é um fortuito acidente)

$$\rho = |\psi|^2 \quad \checkmark$$

Probabilidades estão bem definidas

$$u = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \\ u^4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow E > 0 \\ \rightarrow E < 0 \end{matrix}$$

Os estados de energia negativa ainda estão presentes, o que leva ao famoso mar de Dirac
 (solução ruim para os férmions e inútil para Bósons)

Além disso a teoria assim obtida tem problemas de causalidade, o que pode ser visto se calcularmos:

$$U(t) = \langle \vec{x}^0 | e^{-i \hat{H} t} | \vec{x}_0^0 \rangle = \langle \vec{x}^0 | e^{-i t \sqrt{\hat{p}^2 + m^2}} | \vec{x}_0^0 \rangle =$$

$\uparrow H = \sqrt{p^2 + m^2}$ $\uparrow \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} |\vec{p}\rangle \langle \vec{p}|$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p e^{-i t \sqrt{p^2 + m^2}} e^{i \vec{p} \cdot (\vec{x}^0 - \vec{x}_0^0)} =$$

$e^{i |\vec{p}| |\vec{x}^0 - \vec{x}_0^0| \cos(\theta)}$

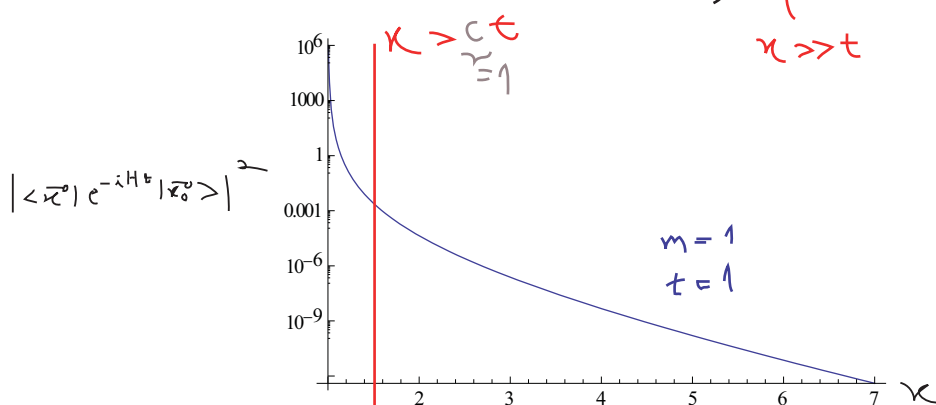
$$\int |\vec{p}| d|\vec{p}| \int 2\pi \sin(\theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi^2 |\vec{x}^0 - \vec{x}_0^0|} \int_0^\infty p dp \text{Sen}(p |\vec{x}^0 - \vec{x}_0^0|) e^{-i t \sqrt{p^2 + m^2}} =$$

$\vec{x}_0^0 = 0$

(Gradshteyn 6th ed., eq 3.914(6))

$$= \frac{1}{2\pi^2 x} \frac{i x t m^2}{x^2 - t^2} K_2(m \sqrt{x^2 - t^2}) = -\frac{t m^2}{2\pi^2 x^2} K_2(m x) \neq 0 !!$$



Poderíamos também aproximar esta integral usando a Saddle point approximation:

$$x_0: f'(x_0) = 0 \implies f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2} f''(x_0) + \dots$$

$$\int dx e^{f(x)} = e^{f(x_0)} \int dx e^{\frac{(x-x_0)^2}{2} f''(x_0)} = e^{f(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(x_0)|}}$$

$f''(x_0) < 0$

A idéia é que para qualquer ponto $x_1 \neq x_0$

$e^{x_1} \ll e^{x_0}$ porque x_0 é um máximo

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}^0 | e^{-iHt} | \vec{x}^0 \rangle &= \frac{i}{2\pi^2 x} \int_0^\infty p dp \underbrace{\text{Sen}(px)}_{\text{Saddle Point}} e^{-it\sqrt{p^2+m^2}} \\ &= -\frac{1}{4\pi^2 x} \int_0^\infty p dp (e^{-ipx} - e^{ipx}) e^{-it\sqrt{p^2+m^2}} \end{aligned}$$

Rigorosamente eu teria que rodar isso para o eixo real (em x_μ) e depois voltar mas existe um equivalente para exponenciais complexas, o método da fase estacionária

$$I_{\pm}(x,t) = \int_0^\infty p dp e^{\pm ipx} e^{-it\sqrt{p^2+m^2}} = \pm i \frac{d}{dx} \int_0^\infty dp e^{\underbrace{\pm ipx - it\sqrt{p^2+m^2}}_{f(p)}}$$

$$f'(p_0) = 0 \implies \pm ix - it p_0 (p_0^2+m^2)^{-1/2} = 0 \iff p_0 = \pm \frac{ix}{\sqrt{x^2-t^2}}$$

$$f''(p_0) = -it (p_0^2+m^2)^{-3/2} + it p_0^2 (p_0^2+m^2)^{-5/2} = -im^2 t \left(-\frac{x^2-t^2}{m^2 t^2} \right)^{3/2} = -\frac{1}{mt^2} (x^2-t^2)^{3/2} < 0 \quad \text{p/ } x^2 > t^2$$

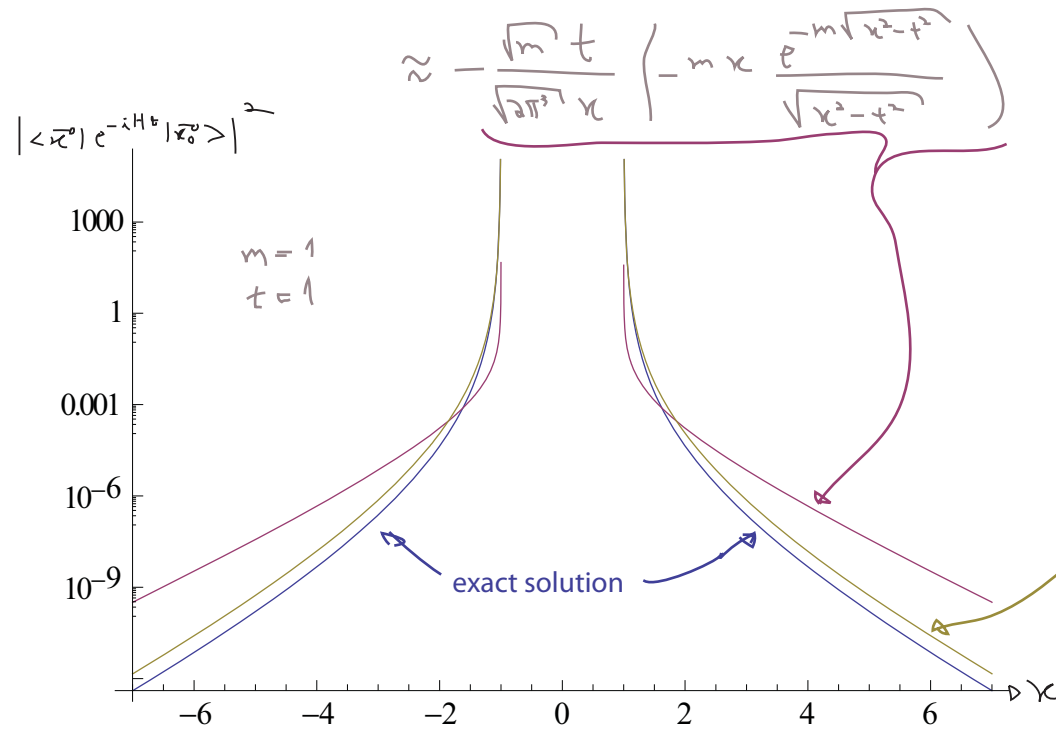
$$f(p_0) = \pm ix \left(\pm \frac{ix}{\sqrt{x^2-t^2}} \right) - it \sqrt{-\frac{m^2 t^2}{x^2-t^2}} = -\frac{mx^2}{\sqrt{x^2-t^2}} + \frac{mt^2}{\sqrt{x^2-t^2}} = -m \sqrt{x^2-t^2}$$

$$I_{\pm} = \pm i \frac{d}{dx} \left[e^{f(p_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(p_0)|}} \right]$$

$$\langle \vec{x}^0 | e^{-iHt} | \vec{x}^0 \rangle = -\frac{1}{4\pi^2 x} \left[I_-(x,t) - I_+(x,t) \right]$$

$$\langle \vec{x}_0 | e^{-iHt} | \vec{x}_0 \rangle = -\frac{1}{2\pi^2 x} i \frac{d}{dx} \left[e^{p(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{p''(x_0)}} \right] = -\frac{\sqrt{m} t}{\sqrt{2\pi^3} x} \frac{d}{dx} \left[\frac{e^{-m\sqrt{x^2-t^2}}}{(x^2-t^2)^{3/2}} \right]$$

Ignorando esta parte, já que o comportamento é dominado pela exponencial



Estes problemas estão intrinsicamente ligados ao fato de estarmos partindo de uma descrição quântica de UMA partícula e então introduzindo a relatividade. Esta teoria, que tem um número bem definido de partículas (UMA) não dá conta da possibilidade de que o número de partículas pode mudar dinamicamente, o que é um fato experimental uma vez que chegemos em energias comparáveis com as massas destas partículas (o regime relativístico). Olhando o problema deste ponto de vista, problemas eram mesmo esperados.

Uma forma encontrada para "concertar" estas teorias ficou conhecida como **Segunda Quantização** (muito cuidado com este nome):

$$(\mathbb{D}^2 + m^2) \psi(x, t) = 0 \quad (i \gamma^\mu d_\mu - m) \psi(x, t) = 0$$

Estas funções são re-interpretadas. Não mais como funções de onda de 1 partícula livre, mas como campos definidos em todo espaço e cuja amplitude está ligada ao número de partículas.

Para determinar o estado deste sistema (clássico!) em um dado momento, preciso dizer o valor do campo em todos os pontos e seu momento canonicamente conjugado:

$$\left\{ \psi(\vec{x}), \pi(\vec{x}) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\psi}} \right\}$$

Quantizar este sistema (a tal segunda quantização) consiste em transformar estas novas coordenadas canônicas em operadores, impondo:

$$[\hat{\Psi}(\vec{x}), \hat{\Pi}(\vec{y})]_{\pm} = i \delta^3(\vec{x} - \vec{y})$$

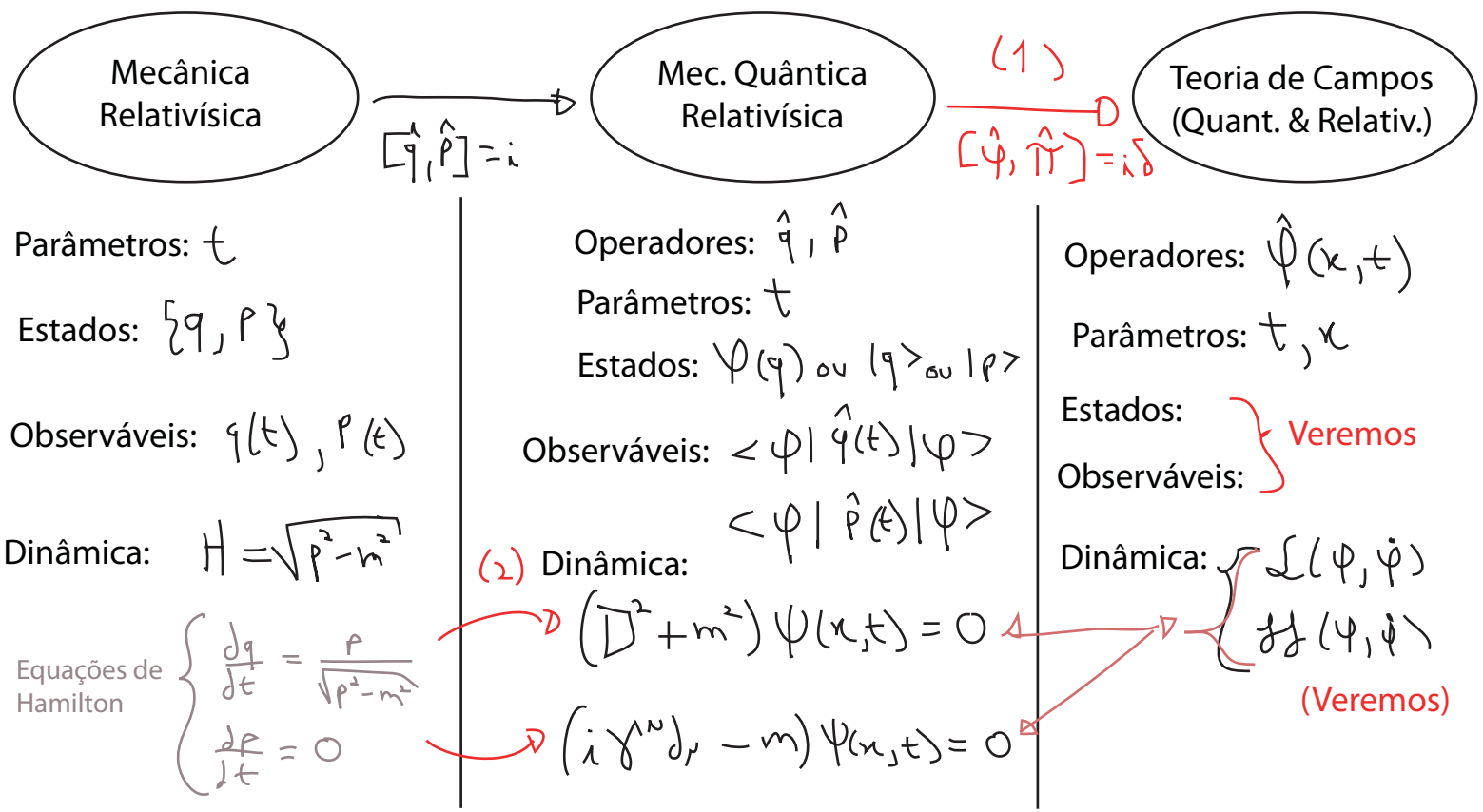
De forma que agora temos que especificar um estado $|\sigma\rangle$ e o valor esperado do campo naquele estado é um "observável": $\langle \sigma | \hat{\Psi}(x) | \sigma \rangle$

Assim como antes, a evolução temporal deste sistema vai ser especificada pelo Hamiltoniano do campo, que pode ser obtido com um pouco de engenharia reversa a partir das equações de movimento.

Note que a posição "x" que aparece em $\psi(x,t)$ foi "rebaixada" para o mesmo status que o tempo tinha na MQ, é apenas um índice (contínuo) para o campo. Ela não é mais uma coordenada canônica do sistema e não há mais operador posição do campo. Faz tanto sentido querer medir a "posição do campo" quanto faria querer medir o "tempo do campo". Isto é bem mais promissor do ponto de vista de quem está querendo fazer uma teoria relativística.

Com esta re-interpretação passamos de fato a trabalhar com uma Teoria de Campos Relativística e Quantizada que, como veremos (ao longo do semestre), não tem problemas nem com energias e probabilidades negativas e não viola causalidade. Fomos forçados, no entanto, a abandonar a descrição da mecânica para uma descrição de campos.

Qual é problema com o nome Segunda Quantização? Note o caminho que fizemos:



No passo (1) o que estamos fazendo é quantizar (transformar em operadores) uma função definida em todo espaço (um campo) e cuja equação de movimento CLÁSSICA é de Dirac ou Klein-Gordon. Uma vez obtidas estas equações e abandonada a interpretação de ψ como amplitude de probabilidade, os operadores de posição e momento perdem todo significado. O que estamos realmente fazendo é pegar uma teoria clássica (relativística) de campos e a quantizando UMA VEZ. O nome segunda quantização portanto se refere mais ao fato de que ela veio depois historicamente do que ao fato que estamos quantizando de novo o mesmo sistema (não estamos).

De fato, parece que a única função da "primeira" quantização foi nos fornecer as equações de Dirac e Klein-Gordon no passo (2), existe alguma outra forma de obter estas equações?

A resposta é sim. Uma vez que aceitemos que o objeto básico da teoria deve ser um campo, podemos obter equações de movimento para estes campos baseado somente nas simetrias que o sistema deve ter. A primeira delas é a invariância por mudança entre referenciais inerciais, e de fato as equações de Dirac e Klein-Gordon podem ser obtidas se buscarmos todos os campos que tem uma transformação bem definida sob estas transformações (campos que pertencem à representação do grupo definido por estas transformações, o grupo de Poincaré). Aí basta quantizar esta teoria. Esta visão, que decorre mais diretamente de primeiros princípios, tem ainda a vantagem de nos fornecer outras equações clássicas, como por exemplo àquela para partículas de spin 1. É este caminho que faremos ao longo deste curso.

A obtenção destas equações de movimento é o domínio da teoria clássica de campos, sob a qual faremos agora uma (rápida) revisão, notando que estamos interessados sempre em teorias relativísticas:

	Ñ-Relativístico	Relativístico	
Clássico	Teoria de Campos (ñ-relativ)	Teoria Clássica de Campos	Revisão
Quântico	Teoria Quântica de Campos (ñ-relativ)	Teoria Quântica de Campos	Resto do curso

Teoria Clássica de Campos

(Ramond 1.1 - 1.7)

Em mecânica clássica:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \underbrace{L(q_i(t), \dot{q}_i(t))}_{\text{Lagrangiana}} \quad (\text{eq. 7.1})$$

Ação

Coordenadas

$$\delta S = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (\text{eq. 7.2})$$

Equações de Lagrange (equações do movimento)