Logo vemos que, tentando escrever 21.1 e 21.2 como uma única expressão, temos:

$$\boxed{\int Dq\; e^{iS[q]}\, q(\bar{t}_2)\, q(\bar{t}_1) = \langle q', t' | T\{\hat{q}(\bar{t}_2)\, \hat{q}(\bar{t}_1)\} | q, t\rangle}$$ (eq. 22.1)

onde aparece o Produto Temporalmente Ordenado:

$$\boxed{T\{\hat{q}(\bar{t}_2)\, \hat{q}(\bar{t}_1)\} \equiv \begin{cases} \hat{q}(\bar{t}_1)\, \hat{q}(\bar{t}_2) & \leftrightarrow \bar{t}_2 < \bar{t}_1 \\ \hat{q}(\bar{t}_2)\, \hat{q}(\bar{t}_1) & \leftrightarrow \bar{t}_1 < \bar{t}_2 \end{cases}}$$ (eq. 22.2)

Tanto 22.1 e 22.2 são generalizados de forma direta para um número maior de operadores:

$$T\{\hat{q}(\bar{t}_1), \ldots \hat{q}(\bar{t}_N)\} \equiv \underline{\hat{q}(\bar{t}_1) \ldots \hat{q}(\bar{t}_N)} \leftrightarrow \underline{\bar{t}_N < \ldots < \bar{t}_1}$$

ordenados temporalmente

$$\boxed{G_n(\bar{t}_1, \ldots \bar{t}_n) = \langle q', t' | T\{\hat{q}(\bar{t}_1) \ldots \hat{q}(\bar{t}_n)\} | q, t\rangle = \int Dq\; e^{iS[q]}\, q(\bar{t}_1) \ldots q(\bar{t}_n)}$$ (eq. 22.3)

Função de n-pontos ou Função de Correlação (de n pontos) ou Correlator.

Em breve veremos em que contexto estes correlatores aparecem e porque estamos interessados neles. Definamos um outro objeto que nos será útil, lembrando que para qualquer conjunto $\{a_n\}$ podemos definir a função geradora F(z):

$$F(z) \equiv \sum_n \frac{1}{n!} a_n z^n$$

tal que: $$a_n = \frac{d^n}{dz^n} F(z) \Big|_{z=0}$$

(conhecer esta função nos permiter obter qualquer elemento do conjunto, bastando fazer o número apropriado de derivações)

O equivalente para o conjunto de todos os correlatores $\{G_n\}$ seria o funcional gerador:

$$\boxed{Z[J] \equiv \sum_{N \geq 0} \int dt_1 \ldots \int dt_N\, \underbrace{\frac{i^N}{N!}}_{\text{convencional}}\, G_N(t_1, \ldots, t_N)\, J(t_1) \ldots J(t_N)}$$ (eq. 22.4)

A diferença é que os elementos do conjunto em questão são funções (de vários t's) e por isso a variável em que derivaremos deve ser também uma função (os J's) e o gerador vira um funcional.

Podemos escrever ele em uma forma mais conveniente substituindo $G_n$ de 22.3:

$$Z[J] = \sum_{N>0} \int dt_1 \ldots \int dt_N \frac{i^N}{N!} J(t_1)\ldots J(t_N) \int Dq\, e^{iS[q]} q(t_1)\ldots q(t_n) =$$

$$\int dt_1\, i J(t_1)\, q(t_1) \int dt_2\, i J(t_2)\, q(t_2) \ldots$$

$$= \int Dq\, e^{iS[q]} \sum_{N>0} \frac{1}{N!} \left[\int dt\, i\, q(t)\, J(t)\right]^N = \int Dq\, e^{i \underbrace{\left[S[q] + \int dt\, q(t) J(t)\right]}_{S[q,J]}}$$

$$\boxed{Z[J] = \int Dq\, e^{iS[q,J]}}$$

( eq. 23.1 )

Para ver como podemos obter qualquer $G_n$, basta fazer as derivadas funcionais:

$$\boxed{\frac{\delta^N}{i\delta J(t_1)\ldots i\delta J(t_N)} Z[J]\Big|_{J=0} = \int Dq\, e^{iS[q]} q(t_1)\ldots q(t_N) = G_N(t_1,\ldots,t_N)}$$

( eq. 23.2 )

Para um tratamento um pouco mais longo de derivação funcional, chequem o material adicional [a] no site do curso ( http://www.ift.unesp.br/users/matheus/files/courses/2016tqc2/func%20deriv.pdf ), e as referências lá citadas. Para os nossos fins basta saber que:

$$\frac{\delta f(x)}{\delta f(y)} = \delta(x-y) \qquad\qquad \frac{\delta g(f(x))}{\delta f(y)} = \delta(x-y) \frac{dg}{df}\Big|_{f=f(x)}$$

De forma que:

$$\frac{\delta^2}{i\delta J(t_1)\, i\delta J(t_2)} Z[J] = \frac{\delta}{i\delta J(t_1)} \left\{ \frac{\delta}{i\delta J(t_2)} \int Dq\, e^{i\left[S[q] + \int dt\, q(t) J(t)\right]} \right\} =$$

$$= \int Dq \frac{\delta}{i\delta J(t_1)} \left\{ e^{i\left[S[q] + \int dt\, q(t) J(t)\right]} \frac{\delta}{\cancel{i}\delta J(t_2)} \left[ \cancel{i} \left( S[q] + \int dt\, q(t) J(t) \right) \right] \right\} =$$

$$= \int Dq \frac{\delta}{i\delta J(t_1)} \left\{ e^{i\left[S[q] + \int dt\, q(t) J(t)\right]} \int dt\, q(t)\, \delta(t - t_2) \right\} =$$

$$= \int Dq\, q(t_2) \underbrace{\frac{\delta}{i\delta J(t_1)} e^{i\left[S[q] + \int dt\, q(t) J(t)\right]}}_{q(t_1)\, e^{i[\ldots]}} = \int Dq\, q(t_2) q(t_1)\, e^{iS[q,J]}$$

$$\therefore \left. \frac{\delta^2}{i\delta J(t_1)\, i\delta J(t_2)} Z[J] \right|_{J=0} = \int Dq\, q(t_2) q(t_1)\, e^{iS[q]} = G_2(t_1, t_2)$$

$\cancel{J} = 0$

Com este conjunto de idéias e ferramentas podemos atacar um sistema bem conhecido: o oscilador harmônico.

## O Oscilador Harmônico

(Ramond cap2, Nastase 2)

Dada a Lagrangeana de um oscilador harmônico (com m = 1):

$$\boxed{m=1} \Rightarrow L = \frac{\dot{q}^2}{2} - \omega^2 \frac{q^2}{2} \qquad \Longrightarrow H = p\dot{q} - \left( \frac{\dot{q}^2}{2} - \omega^2 \frac{q^2}{2} \right) =$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dot{q} \qquad\qquad = \frac{1}{2}\left(p^2 + \omega^2 q^2\right)$$

É conveniente definir:

$\hbar = 1$

$$\boxed{a \equiv \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega q + ip) \qquad a^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega q - ip)} \qquad \text{(eq. 24.1)}$$

$$\therefore \quad \boxed{\begin{aligned} p &= -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}\,(a-a^+) \\ q &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\,(a+a^+) \end{aligned}} \qquad \text{( eq. 25.1 )}$$

$$H = \frac{1}{2}\left(-\frac{\omega}{2}(a-a^+)^2 + \frac{\omega}{2}(a+a^+)^2\right) = \frac{\omega}{2}\left(aa^+ + a^+a\right) \qquad \text{( eq. 25.2 )}$$

poderíamos juntar isso pois ainda não quantizamos

Definimos os Brackets de Poison como:

$$f = f(p,q), \quad g = g(p,q) \rightarrow \quad \boxed{\{f,g\}_{PB} \equiv \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right)} \qquad \text{( eq. 25.3 )}$$

$$\therefore \{p_i, q_j\}_{PB} = \sum_k \left(\underset{=0}{\frac{\partial p_i}{\partial q_k}}\,\underset{=0}{\frac{\partial q_j}{\partial p_k}} - \underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial p_k}}\,\underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial q_k}}\right) = -\delta_{ij}$$

$$\delta_{ik}\cdot\delta_{kj} = \delta_{ij}$$

Podemos escrever as equações de Hamilton na forma:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \{q_i, H\}_{PB} = \sum_k \left(\underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial q_k}}_{\delta_{ik}}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \cancel{\frac{\partial q_i}{\partial p_k}}^{\,0}\frac{\partial H}{\partial q_k}\right)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \{p_i, H\}_{PB} = \sum_k \left(\cancel{\frac{\partial p_i}{\partial q_k}}^{\,0}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial p_k}}_{\delta_{ik}}\frac{\partial H}{\partial q_k}\right) \qquad \text{( eq. 25.4 )}$$

## Quantização Canônica do Oscilador Harmônico

O que chamamos de quantização canônica consiste em transformar $q$ e $p$ em operadores $\hat{q}$ e $\hat{p}$, substituindo os Brackets de Poison por comutadores:

$$q, p \rightarrow \hat{q}, \hat{p} \qquad \{\ ,\ \}_{PB} \rightarrow -\frac{i}{\hbar}[\ ,\ ]$$

$\hbar = 1$

$$\{p_i, q_j\}_{PB} = -\delta_{ij} \longrightarrow -i[\hat{p}_i, \hat{q}_j] = -\delta_{ij}$$

$$[\hat{p}, \hat{q}] = -i$$

$$\boxed{[\hat{p}_i, \hat{q}_j] = -i\delta_{ij}}$$ (eq. 26.1)

(eq. 25.1)

$$[\hat{p}, \hat{q}] = \left[-i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(\hat{a} - \hat{a}^{+}), \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^{+})\right] =$$

$$= -\frac{i}{2}\left\{[\hat{a}, \hat{a}^{+}] - [\hat{a}^{+}, a]\right\} = -i[\hat{a}, \hat{a}^{+}] = -i$$

$$\boxed{[\hat{a}, \hat{a}^{+}] = 1}$$ (eq. 26.2)

Podemos usar a mesma substituição nas equações de Hamilton (5.4) para obter a evolução destes operadores no quadro de Heisenberg:

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\}_{PB} \longrightarrow \frac{d\hat{q}_i}{dt} = -i[\hat{q}_i, \hat{H}]$$

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\}_{PB} \longrightarrow \frac{d\hat{p}_i}{dt} = -i[\hat{p}_i, \hat{H}]$$ (eq. 26.3)

E o hamiltoniano pode ser obtido de (5.2)

$$\hat{H} = \frac{\omega}{2}\Big(\underbrace{\hat{a}\hat{a}^{+}}_{1+\hat{a}^{+}\hat{a}} + \hat{a}^{+}\hat{a}\Big) = \hbar\omega\left(\hat{a}^{+}a + \frac{1}{2}\right)$$ (eq. 26.4)

se tivéssemos acompanhado os h's corretamente

Os autoestados deste hamiltoniano são definidos em termos de um número de ocupação *n* e os operadores $a^{\dagger}$ e a são operadores de criação e aniquilação:

$$a^{+}|n\rangle = \underbrace{A_n}\,|n+1\rangle \quad ; \quad a\,|n\rangle = \underbrace{A'_n}\,|n-1\rangle$$ (eq. 26.5)

normalizações

$$\boxed{a^{+}a|n\rangle \equiv \hat{N}|n\rangle = n|n\rangle}$$ (eq. 26.6)

Operador Número

No estado fundamental, ou vácuo, defindo por $a|\Omega\rangle = 0$ $\therefore N|\Omega\rangle = 0$

$|\Omega\rangle = |n=0\rangle$

a energia é:

$$\hat{H} = \omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right) \qquad \hat{H}|n=0\rangle = E_0|n=0\rangle$$

$$\boxed{E_0 = \frac{\omega}{2}}$$ Energia de ponto zero ou do vácuo

Podemos definir um hamiltoniano sem esta energia de ponto zero, definindo o ordenamento normal:

$$:a^\dagger a + a a^\dagger + a a + a^\dagger a^\dagger: = a^\dagger a + a^\dagger a + a a + a^\dagger a^\dagger$$

Coloca todos os $a^\dagger$'s a esquerda dos a's

$$:\hat{H}: = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} = \omega \hat{N}$$

vejamos agora um caso um pouco mais complicado (o oscilador forçado), no qual aplicaremos a integral de trajetória.

## O oscilador Harmônico forçado

( Nastase 7 e 8, Ramond 2.3)

Quando definimos o gerador funcional (eqs. 22.4 e 23.1):

$$Z[J] = \int \mathcal{D}q\, e^{iS[q;J]} = \int \mathcal{D}q\, e^{iS[q] + i\int dt\, q(t) J(t)}$$

a partir do qual obtemos os correlatores (16.2):

$$G_N(\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_n) = \frac{\delta}{i\delta J(\bar{t}_1)} \cdots \frac{\delta}{i\delta J(\bar{t}_n)} Z[J]\Big|_{J=0}$$

Não discutimos os significado da função *J(t)*, que não passava de um artifício matemático, introduzida apenas para definir o funcional gerador e igualada a zero assim que possível. No entanto podemos nos perguntar o que acontece se não fizemos *J(t) = 0*. A ação definida com a inclusão do termo com *J* é:

$$S[q;J] = S[q] + \int dt\, J(t)\, q(t)$$

que, pelo princípio da extrema ação: $$\frac{\delta S[q;J]}{\delta q} = \frac{\delta S[q]}{\delta q} + J(t) = 0$$

Se $$L(q) = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 - w^2 q^2) \Rightarrow \boxed{-w^2 q - \ddot{q} + J(t) = 0}$$ (eq. 28.1)

Oscilador Harmônico Forçado

Note que *J(t)* é uma força externa ao sistema descrito por esta eq. de movimento, no sentido de que sua dinâmica não é influenciada pelo valor de *q(t)* (ou suas derivadas). Todo o comportamento desta "Fonte" é estabelecido a priori por fatores externos e o que resolvemos é a resposta do oscilador a isto. Neste sentido vemos que os correlatores da teoria descrevem o comportamento do sistema isolado, na ausência de fontes.

A ação $S[q;J] = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 - w^2 q^2) + qJ$ é quadrática em *q* e portanto podemos fazer a integral de trajetória usando o resultado da pg 19.1 para integrais gaussianas. Há, no entanto, um sutil problema ligado às condições de contorno de q(t), vamos primeiro fingir que não notamos este problema (ou de fato ser honestos a respeito):

$$S[q] = \int dt \left[ \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{dq}{dt}\right)^2} - \frac{w^2 q^2}{2} + Jq \right] = \int dt \left[ -\frac{1}{2} q \left(\frac{d^2}{dt^2} + w^2\right) q + Jq \right]$$

$$\int \frac{dq}{dt}\frac{dq}{dt} = \cancelto{0}{\int \frac{d}{dt}\left(q \frac{dq}{dt}\right)} - \int q \frac{d^2 q}{dt^2}$$

O que leva à integral de trajetória:

$$Z[J] = \int Dq \, \exp\left\{ \left[ -\frac{1}{2} q \cdot \Delta^{-1} q + i J \cdot q \right] \right\}$$

$$\Delta^{-1} = i\left(\frac{d^2}{dt^2} + w^2\right)$$

$$\Rightarrow J \cdot q = \int dt \; J(t) \, q(t)$$

Comparando com 19.1:

$$\int d^n x \, e^{-\left(\frac{1}{2} \vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x} + \vec{b}^T \cdot \vec{x}\right)} = (2\pi)^{n/2} (\mathrm{Det}\, A)^{-1/2} e^{\frac{1}{2} \vec{b}^T \cdot A^{-1} \vec{b}} \Rightarrow \begin{array}{l} b = -iJ(t) \\ A = \Delta^{-1} \end{array}$$

$$Z[J] = \underbrace{N'}_{(\mathrm{Det}\, \Delta^{-1})^{-1/2}} e^{-\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J}$$

( por enquanto usaremos este resultado, mas cuidado! Veja eq 31.2 para a versão correta )

( não depende de J)

$$J \cdot \Delta \cdot J = \int dt \int dt' \, J(t)\, \Delta(t,t')\, J(t')$$

$$\Delta^{-1}\Delta(t,t') = i\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega^2\right] \overbrace{i\int \frac{dp}{2\pi}\frac{e^{-ip(t-t')}}{p^2-\omega^2}}^{\text{ANSATZ P/ } \Delta} = \cancel{-}\int \frac{dp}{2\pi}\frac{\cancel{-p^2+\omega^2}}{\cancel{p^2-\omega^2}} e^{-ip(t-t')}$$

$$= \delta(t-t')$$

$$\boxed{\Delta(t,t') = i\int \frac{dp}{2\pi}\frac{e^{-ip(t-t')}}{p^2-\omega^2}} \quad \text{( eq. 29.1 )}$$

No entanto temos uma singularidade aqui, que seria evitada escolhendo caminhos apropriados no plano complexo (o que veremos mais adiante).

Esta singularidade invalida a inversão que fizemos de $\Delta^{-1}$? A pergunta só pode ser respondida pensando em que espaço de funções $\Delta^{-1}$ está agindo, pois neste caso podemos pensar no operador como uma matriz e ver que, se existem funções que satisfaçam:

$$\boxed{\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega^2\right] q_0(t) = 0} \quad \text{( eq. 29.2 )}$$

isto significaria que o operador tem autovalores iguais a zero e é singular, não pode ser invertido! Para piorar, estes modos de autovalor zero são justamente as soluções clássicas do oscilador livre.

$$\Rightarrow q_0(t) = C_\pm e^{\pm i\omega t}$$

Para conseguir inverter $\Delta^{-1}$, portanto, precisamos excluir estas soluções do espaço em que $\Delta^{-1}$ está agindo, o que quer dizer que precisamos que elas não sejam varidas pela integral de trajetória. Lembre-se que para definir a intregral de trajetória, temos que também escolher os pontos inicial e final da trajetória, que estão fixos. Note ainda que a equação só tem soluções $q(t),\ t \in [t_i, t_f]$ não triviais se:

$$q(t_i) \neq 0 \quad \text{ou} \quad q(t_f) \neq 0$$

$$q_0(t) = C_+ e^{i\omega t} + C_- e^{-i\omega t}$$

$$q_0(t_i) = 0 \Rightarrow \left(C_+ e^{i\omega t_i} + C_- e^{-i\omega t_i}\right) = 0$$

&

$$q_0(t_f) = 0 \Rightarrow \left(C_+ e^{i\omega t_f} + C_- e^{-i\omega t_f}\right) = 0$$

$$\left\{ \begin{aligned} &(C_+ - C_-)\,\mathrm{sen}\left[\frac{\omega(t_f+t_i)}{2}\right]\cos\left[\frac{\omega(t_f-t_i)}{2}\right] = 0 \\ &(C_+ + C_-)\cos\left[\frac{\omega(t_f+t_i)}{2}\right]\cos\left[\frac{\omega(t_f-t_i)}{2}\right] = 0 \end{aligned} \right.$$

$$\left.\begin{aligned}&\forall t_i\\ &\forall t_f\end{aligned}\right\} \Rightarrow C_+ = C_- = 0$$

Vamos então fazer uma mudança de variável e escrever:

$$q(t) = q_{cl}(t) + \tilde{q}(t) \rightarrow \boxed{\tilde{q}(t_i) = \tilde{q}(t_f) = 0} \quad \text{( eq. 30.1 )}$$

$q_{cl}$ → Trajetória clássica, com condições de contorno não triviais

Do ponto de vista da integral de trajetória, mudar a integração de $q$ para $\tilde{q}$ é o mesmo que uma mudança de variável dada pela adição de uma constante em uma integral usual, estamos apenas somando um caminho fixo. Então:

$$\int Dq\, e^{iS[q_{cl}(t)+\tilde{q};J]} = \int D\tilde{q}\, e^{iS[q_{cl}(t)+\tilde{q};J]}$$

De fato, isto decorre da definição da integral de trajetória de um modo trivial:

$$\prod_i dq_i = \prod_i d(\underbrace{q_i^{cl}}_{\text{número}} + \tilde{q}_i) = \prod_i d\tilde{q}_i$$

Lembrando que (pg 19), se acharmos um extremo $q_0$ de $S[q;J]$, podemos escrever:

$$\left.\begin{array}{l} S[q;J] = \frac{1}{2}Aq^2 + Jq \\ \left.\frac{\delta S}{\delta q}[q;J]\right|_{q=q_0} = 0 \end{array}\right\} = S[q_0;J] + \underbrace{\frac{1}{2}A(q-q_0)^2}_{\text{justamente a ação para } J=0} = S[q_0;J] + S[q-q_0;0]$$

Acontece que $q_{cl}$ é justamente um extremo da ação, de forma que:

$$\boxed{S[q;J] = S[q_{cl};J] + S[\overbrace{q-q_{cl}}^{\tilde{q}};0] \Rightarrow S[q;J] = S[q_{cl};J] + S[\tilde{q};0]} \quad \text{( eq. 30.2 )}$$

$$\therefore \boxed{Z[J] = e^{iS[q_{cl};J]}\int D\tilde{q}\, e^{iS[\tilde{q};0]}} \quad \text{( eq. 30.3 )}$$

esta integral agora está bem definida, mas não interessa o seu resultado pois ela independe de J e pode ser absorvida na constante que acompanha Z. O importante é que a Δ que vai parar no determinante é obtida invertendo o operador $\Delta^{-1}$ numa base em que não há modos com autovalor zero

$$\therefore \boxed{Z[J] = N e^{iS[q_{cl};J]}} \quad \text{( eq. 30.4 )}$$