Vamos então fazer uma mudança de variável e escrever:

$$q(t) = q_{cl}(t) + \tilde{q}(t) \rightarrow \boxed{\tilde{q}(t_i) = \tilde{q}(t_f) = 0} \quad \text{(eq. 30.1)}$$

q_{cl} → Trajetória clássica, com condições de contorno não triviais

Do ponto de vista da integral de trajetória, mudar a integração de q para $\tilde{q}$ é o mesmo que uma mudança de variável dada pela adição de uma constante em uma integral usual, estamos apenas somando um caminho fixo. Então:

$$\int Dq\, e^{iS[q_{cl}(t)+\tilde{q};J]} = \int D\tilde{q}\, e^{iS[q_{cl}(t)+\tilde{q};J]}$$

De fato, isto decorre da definição da integral de trajetória de um modo trivial:

$$\prod_i dq_i = \prod_i d(\underbrace{q_i^{cl}}_{\text{número}} + \tilde{q}_i) = \prod_i d\tilde{q}_i$$

Lembrando que (pg 19), se acharmos um extremo q_0 de $S[q;J]$, podemos escrever:

$$S[q;J] = \frac{1}{2}Aq^2 + Jq = \underbrace{S[q_0;J]}_{\text{valor de S no mínimo } q_0} + \underbrace{\frac{1}{2}A(q-q_0)^2}_{\text{potencial quadrático em torno deste mínimo}} = S[q_0;J] + S[q-q_0;0]$$

justamente a ação para J = 0

$$\left.\frac{\delta S}{\delta q}[q;J]\right|_{q=q_0} = 0$$

Acontece que q_{cl} é justamente um extremo da ação, de forma que:

$$\boxed{S[q;J] = S[q_{cl};J] + S[\overbrace{q-q_{cl}}^{\tilde{q}};0] \Rightarrow S[q;J] = S[q_{cl};J] + S[\tilde{q};0]} \quad \text{(eq. 30.2)}$$

$$\therefore \boxed{Z[J] = e^{iS[q_{cl};J]}\int D\tilde{q}\, e^{iS[\tilde{q};0]}} \quad \text{(eq. 30.3)}$$

esta integral agora está bem definida, mas não interessa o seu resultado pois ela independe de J e pode ser absorvida na constante que acompanha Z. O importante é que a Δ que vai parar no determinante é obtida invertendo o operador Δ^{-1} numa base em que não há modos com autovalor zero

$$\therefore \boxed{Z[J] = N e^{iS[q_{cl};J]}} \quad \text{(eq. 30.4)}$$

E a equação de movimento para q_{cl} é

$$\boxed{\Delta^{-1} q_{cl}(t;J) = i J(t)} \quad \text{(eq. 31.1)}$$

E a solução:

$$q_{cl}(t;J) = \underbrace{q_{cl}(t;0)}_{\Delta^{-1} q_{cl}(t;0) = 0} + i(\Delta \cdot J)(t)$$

(estas são as funções problemáticas que satisfazem a eq. 29.2 , posso inverter Δ porque ele agora age em $q_{cl}(t;J)$, o segundo termo acima conserta o problema)

Note que:

$$\frac{\delta_{FULL} S[q_{cl};J]}{\delta_{FULL} J(t)} = \int dt' \left[\cancel{\left.\frac{\delta S}{\delta q(t')}\right|_{q=q_{cl}}}^{\to 0 \text{ (EOM)}} \frac{\delta q_{cl}(t';J)}{\delta J(t)} + \underbrace{\frac{\delta S[q_{cl};J]}{\delta J}}_{q_{cl}} \right] =$$

$$\int dJ \left(\frac{\delta_{FULL} S[q_{cl};J]}{\delta_{FULL} J(t)} = q_{cl}(t;J) = q_{cl}(t;0) + i(\Delta\cdot J)(t) \right)$$

$$S[q_{cl}(J);J] = \underbrace{S[q_{cl}(0);0]}_{\text{CONST}} + \underbrace{q_{cl}(0)\cdot J}_{\int q_{cl}(t;0) J(t)\, dt} + \frac{i}{2} J\cdot\Delta\cdot J$$

cada produto escalar deste é uma integral em t (por isso suprimi as dep. em t)

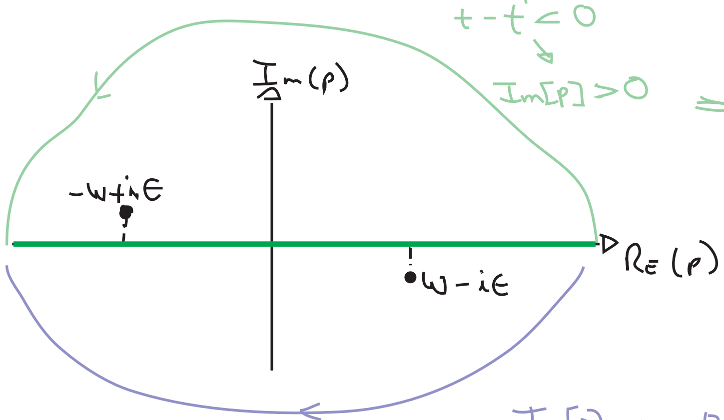
$$\boxed{Z[J] = N e^{iS[q_{cl};J]} \overset{\text{(eq. 30.4)}}{=} N\, e^{-\frac{1}{2} J\cdot\Delta\cdot J + i q_{cl}(0)\cdot J}} \quad \text{(eq. 31.2)}$$

Ainda resta saber qual é a forma deste Δ e quais condições de contorno usamos para $q_{cl}(t;J)$ na eq. 31.1

Uma opção que temos para evitar os polos em 29.1 é tirá-los do eixo real, faremos isto segundo a prescrição:

$$\boxed{\omega^2 \to \omega^2 - i\epsilon} \quad \text{(eq. 31.3)}$$

$$\Delta_F(t,t') = i\int \frac{dp}{2\pi} \frac{e^{-ip(t-t')}}{\underbrace{p^2-\omega^2+i\epsilon}_{\text{polos em: } p = \pm(\omega - i\epsilon)}} = i\int \frac{dp}{2\pi} \frac{e^{-i\,Re[p](t-t')}\, e^{Im[p](t-t')}}{\underbrace{(p+\omega-i\epsilon)(p-\omega+i\epsilon)}_{p^2-\omega^2+\underbrace{i2\omega\epsilon}_{\sim\epsilon}+\cancel{\epsilon^2}^{\to 0}}}$$



$$t-t'<0 \Rightarrow Im[p]>0 \Rightarrow \Delta_F(t,t') = \frac{1}{2\omega} e^{i\omega(t-t')}$$

$$t-t'>0 \Rightarrow Im[p]<0 \Rightarrow \Delta_F(t,t') = \frac{1}{2\omega} e^{-i\omega(t-t')}$$

$$\Rightarrow \Delta_F(t,t') = \frac{1}{2\omega} e^{-i\omega|t-t'|}$$

Voltemos então a equação 31.1:

$$\Delta^{-1} q_a(t;J) = iJ(t) \Rightarrow i\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega^2\right) q_a(t,J) = iJ(t)$$

E lembrando que: $$\underbrace{i\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega^2\right)}_{\Delta^{-1}} \underbrace{\left(i\int \frac{dp}{2\pi} \frac{e^{-ip(t-t')}}{p^2-\omega^2+i\epsilon}\right)}_{\Delta_F(t-t')} = \delta(t-t')$$

Fica fácil deduzir que: $$q_a(t,J) = i\int dt'\, \Delta_F(t-t')\, J(t')$$

Assumindo que $J(t) \to 0 \,/\, t \to \pm\infty \Rightarrow \int dt' \to \int_{-T}^{T} dt'$ algum número finito, pois fora desta região *J(t) = 0*

Então: $$t \to \infty \Rightarrow q_a(t,J) = e^{-i\omega t} \underbrace{i\int_{-T}^{T} dt' \frac{e^{i\omega t'}}{2\omega} J(t')}_{\text{const.}} = A e^{-i\omega t}$$

$$t \to -\infty \Rightarrow q_a(t,J) = e^{+i\omega t}\, i\int_{-T}^{T} dt' \frac{e^{-i\omega t'}}{2\omega} J(t') = B e^{+i\omega t}$$

Vemos que a prescrição 31.3 (chamada de prescrição de Feynman) é equivalente a resolver 31.1 com as condições de contorno:

$$\boxed{\begin{aligned} q_a(t\to\infty, J) &= A e^{-i\omega t} \\ q_a(t\to-\infty, J) &= B e^{i\omega t} \end{aligned}} \quad \text{(eq. 32.1)}$$

(atente para os sinais, que serão importantes mais adiante) e estas condições exigem que *J(t)* seja limitado no tempo. Além disso, como estas condições não permitem soluções não triviais da equação 29.2, vemos que a integral de trajetória original em *q(t)* está bem definida (com a trajetória clássica satisfazendo 32.1 e a quântica satisfazendo 30.1).

Espaço de Fase Harmônico

Vejamos agora como podemos tratar este oscilador forçado de forma mais rigorosa. Começando com o oscilador livre, temos:

$$H(p,q) = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 q^2}{2} \Rightarrow \begin{cases} q(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\left[a(t) + a^+(t)\right] \\ p(t) = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}\left[a(t) - a^+(t)\right] \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} a(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\left[\omega q - ip\right] = a(0)\, e^{-i\omega t} \\ a^+(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\left[\omega q + ip\right] = a^+(0)\, e^{i\omega t} \end{aligned}} \quad \text{(eq. 33.1)}$$

(quantizando)

$$H(\hat{a}, \hat{a}^+) = \omega \hat{a}^+ \hat{a} \qquad [\hat{a}, \hat{a}^+] = 1$$

Espaço de Fock: $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^+)^n |0\rangle$

Até aqui, nada de novo, mas podemos também definir um outro conjunto de estados os estados coerentes:

$$\boxed{|\alpha\rangle \equiv e^{\alpha \hat{a}^+}|0\rangle = \sum_{n\geq 0} \frac{\alpha^n}{n!}(\hat{a}^+)^n |0\rangle} \quad \text{(eq. 33.2)}$$

Estas combinações lineares dos estados no espaço de Fock são autoestados de $\hat{a}$:

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \hat{a}\, e^{\alpha \hat{a}^+}|0\rangle + \underbrace{e^{\alpha\hat{a}^+}\hat{a}|0\rangle}_{0} = \left[\hat{a}, e^{\alpha \hat{a}^+}\right]|0\rangle$$

$[a, bcd] = [a,b]cd + b[a,c]d + bc[a,d]$

$$\left[\hat{a}, e^{\alpha\hat{a}^+}\right] = \sum_{n\geq 1} \frac{\alpha^n}{n!} \underbrace{\Big(\underbrace{[\hat{a},\hat{a}^+]}_{1}(\hat{a}^+)^{n-1} + \hat{a}^+\underbrace{[\hat{a},\hat{a}^+]}_{1}(\hat{a}^+)^{n-2} + \dots + (\hat{a}^+)^{n-1}\underbrace{[\hat{a},\hat{a}^+]}_{1}\Big)}_{n(\hat{a}^+)^{n-1}} =$$

$[\hat{a}, \hat{1}] = 0$

$$= \sum_{n\geq 1} \frac{\alpha^n}{(n-1)!}(\hat{a}^+)^{n-1} = \alpha \sum_{n\geq 1}\frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!}(\hat{a}^+)^{n-1} = \alpha\, e^{\alpha\hat{a}^+}$$

$$\boxed{\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle} \quad \text{(eq. 33.3)}$$

Da mesma forma:
$$\begin{cases} \langle\alpha^*| \equiv \langle 0|\, e^{\alpha^* \hat{a}} \\ \boxed{\langle\alpha^*|\,\hat{a}^+ = \langle\alpha^*|\alpha^*} \quad \text{(eq. 33.4)} \end{cases}$$

Note que:

$$\alpha|\alpha\rangle$$

$$\boxed{\langle\alpha^*|\alpha\rangle} = \langle 0| e^{\alpha^*\hat{a}}|\alpha\rangle = e^{\alpha^*\alpha}\underbrace{\langle 0|\alpha\rangle}_{\langle 0|e^{\alpha\hat{a}^+}|0\rangle = \langle 0|0\rangle = 1} = \boxed{e^{\alpha^*\alpha}} \qquad \text{(eq. 34.1)}$$

$$\langle 0|\, 1 + \underbrace{\hat{a}^+}_{0} + \underbrace{(\hat{a}^+)^2}_{0} + \dots$$

E temos a identidade (provar que isto é a identidade vai para lista de exercícios):

$$\hat{1} = \int \frac{d\alpha\, d\alpha^*}{2\pi i}\, e^{-\alpha\alpha^*}|\alpha\rangle\langle\alpha^*|$$

Usemos agora estes estados para calcular a amplitude de transição entre estados:

$$F(\alpha^*, t'; \alpha, t) = {}_H\langle\alpha^*, t'|\alpha, t\rangle_H = {}_S\langle\alpha^*|e^{-i\hat{H}(t'-t)}|\alpha\rangle_S$$

estados no quadro de Heisenberg, assim como no moving frame (pg 15)

Mudando para o oscilador forçado:

$$H = \underbrace{\frac{\hat{p}^2}{2} + \frac{\omega^2\hat{q}^2}{2}}_{\omega a^+ a} - \hat{q}J = \omega\hat{a}^+\hat{a} - \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\left[J\hat{a} + \underbrace{J}_{\in\mathbb{R}}\hat{a}^+\right] \qquad \gamma(t) = \frac{J(t)}{\sqrt{2\omega}}$$

$$\boxed{H(\hat{a}^+, \hat{a}; t) = \omega\underline{\hat{a}^+\hat{a}} - \gamma(t)\hat{a}^+ - \bar{\gamma}(t)\hat{a}} \qquad \text{(eq. 34.2)}$$

dependem ou não do tempo de acordo com o quadro, neste caso não pois estamos no q. de Schrödinger

Vale que:

$$\langle\alpha^*|\hat{H}(\hat{a}^+, \hat{a}; t)|\beta\rangle = H(\alpha^*, \beta; t)\langle\alpha^*|\beta\rangle = H(\alpha^*, \beta; t)\, e^{\alpha^*\beta} \qquad \text{(eq. 34.3)}$$

Agora seguimos o procedimento usual para transformar a transição F em uma integral de trajetória, dividindo o tempo entre t e t' em n+1 intervalos de tamanho ε:

$$\epsilon = \frac{t'-t}{N+1} \qquad \{t_0 = t,\ t_1, t_2, \dots, t_n, t' = t_{n+1}\}$$

$$F(\alpha^*, t'; \alpha, t) = \int \prod_{i=1}^{n}\Bigg[\overbrace{\frac{d\alpha(t_i)\, d\alpha^*(t_i)}{2\pi i}\, e^{-\alpha^*(t_i)\alpha(t_i)}}^{\text{das n identidades inseridas}}\Bigg]\langle\alpha^*(t')|e^{-i\epsilon\hat{H}}|\alpha(t_n)\rangle \times$$

$$\times\langle\alpha^*(t_n)|e^{-i\epsilon\hat{H}}|\alpha(t_{n-1})\rangle \dots \langle\alpha^*(t_1)|e^{-i\epsilon\hat{H}}|\alpha(t)\rangle$$

como:

$$\langle\alpha^*(t_{i+1})|e^{-i\epsilon\hat{H}}|\alpha(t_i)\rangle = e^{-i\epsilon H(\alpha^*(t_{i+1}), \alpha(t_i); t_i)}\, e^{\alpha^*(t_{i+1})\alpha(t_i)}$$

(aqui está a vantagem dos estados coerentes, se tentássemos fazer o mesmo no espaço de Fock apareceriam problemas pois o termo com fontes mistura níveis de Fock diferentes)

$$F(\alpha^*, t'; \alpha, t) = \int \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{d\alpha(t_i)\, d\alpha^*(t_i)}{2\pi i} \right] \mathrm{EXP}\left[-i \sum_{i=0}^{n} \epsilon H(\alpha^*(t_{i+1}), \alpha(t_i); t_i) \right] \times$$

$$\times\, \mathrm{EXP}\left[\sum_{i=1}^{n} -\alpha^*(t_i)\alpha(t_i) \right] \mathrm{EXP}\left[\sum_{i=0}^{n} +\alpha^*(t_{i+1})\alpha(t_i) \right]$$

$$\mathrm{EXP}\Big[\alpha^*(t')\alpha(t_n) - \alpha^*(t_n)\alpha(t_n) + \alpha^*(t_n)\alpha(t_{n-1}) - \alpha^*(t_{n-1})\alpha(t_{n-1}) \ldots - \alpha^*(t_1)\alpha(t_1) + \underbrace{\alpha^*(t_1)\alpha(t)}_{\text{“órfão”}} \Big]$$

No limite $\epsilon \to 0$ $\qquad \epsilon \dfrac{\alpha^*(t') - \alpha^*(t_n)}{\epsilon} \alpha(t_n) \longrightarrow d\tau\, \dot{\alpha}^*(\tau)\alpha(\tau)$

$$\boxed{F(\alpha^*, t'; \alpha, t) = \int D\alpha D\alpha^* \, \mathrm{EXP}\left\{ i \int_t^{t'} d\tau \left[\frac{\dot{\alpha}^*(\tau)}{i} \alpha(\tau) - H \right] + \alpha^*(t)\alpha(t) \right\}}$$ (eq. 35.1)

Para resolver esta integral precisamos pensar um pouco sobre as condições de contorno. É tentador dizer que $\alpha*$ e α estão ambos fixos nas “bordas” (t' e t), mas temos um problema, pois estes são autovalores de operadores diferentes ($\hat{a}^\dagger$ e $\hat{a}$ respectivamente) e estes dois operadores não comutam. Sabemos que, em mecânica quântica, a nossa capacidade de especificar autovalores em um mesmo estado está limitada por:

$$\sigma_A \sigma_B \geq \frac{1}{2} \left| i \langle \psi | [\hat{A}, \hat{B}] | \psi \rangle \right|$$ (Griffiths de Mec. Quant., sec 3.4)

$$\sigma_O^2 = \langle \psi | (\hat{O} - O\hat{1})^2 | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{O}^2 | \psi \rangle - \langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle^2$$

$$O = \langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle$$

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar \rightarrow \sigma_q \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Como estamos no quadro de Schrödinger e os estados evoluem no tempo, não podemos especificar $\alpha*$ e α ao mesmo tempo no estado inicial e nem no final, mas podemos fazer:

$t \Rightarrow \quad \alpha(t) = \alpha \qquad \alpha^*(t)$ é livre $\quad (\sigma_{\alpha^*} = \infty)$

$t' \Rightarrow \quad \alpha^*(t') = \alpha^* \qquad \alpha(t)$ é livre $\quad (\sigma_{\alpha} = \infty)$

este objeto vai aparecer exponenciado em todas as integrais da trajet. p/ F ou Z

Note que a equação 35.1 está na forma: $\quad F = \int D\alpha D\alpha^* \, e^{i\tilde{S}[\alpha, \alpha^*]}$

e portanto podemos usar o princípio da extrema ação para achar a equação de movimento para as soluções clássicas do sistema. Podemos re-escrever a ação de duas formas:

$$\tilde{S} = \int_t^{t'} d\tau \left[\frac{\dot{\alpha}^*(\tau)}{i}\alpha(\tau) - H \right] + \alpha^*(t)\alpha(t) = \int_t^{t'} d\tau \left[-\frac{\alpha^*(\tau)}{i}\dot{\alpha}(\tau) - H \right] + \underbrace{\alpha(\tau)\alpha^*(\tau)\Big|_{\cancel{t}}^{t'} + \cancel{\alpha^*(t)\alpha(t)}}_{+\alpha(t')\alpha^*(t')}$$

As equações de movimento obtidas (no interior do intervalo [t,t']) são:

$$\delta\alpha(\tau)\left(\frac{\delta\tilde{S}}{\delta\alpha(\tau)}\right) + \delta\alpha^*(\tau)\left(\frac{\delta\tilde{S}}{\delta\alpha^*(\tau)}\right) = 0$$

$$\frac{\delta S}{\delta\alpha(\tau)} = \frac{\dot{\alpha}^*_{cl}(\tau)}{i} - \frac{\partial H}{\partial\alpha_{cl}(\tau)} = 0$$

$$\frac{\delta S}{\delta\alpha^*(\tau)} = -\frac{\dot{\alpha}_{cl}(\tau)}{i} - \frac{\partial H}{\partial\alpha^*_{cl}(\tau)} = 0$$

$$H(\alpha^*, \alpha; \tau) = \omega\alpha^*\alpha - \gamma\alpha^* - \bar{\gamma}\alpha$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\dot{\alpha}^*_{cl} - i\omega\alpha^*_{cl} + i\bar{\gamma} = 0 \\ &\dot{\alpha}_{cl} + i\omega\alpha_{cl} - i\gamma = 0 \end{aligned}}$$

(eq. 36.1)

com as condições: $\begin{cases} \delta\alpha^*(\tau)\Big|_{\tau=t'} = 0 \\ \delta\alpha(\tau)\Big|_{\tau=t} = 0 \end{cases}$

Que tem como solução:

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha_{cl}(\tau) &= \alpha\, e^{i\omega(t-\tau)} + i\int_t^{\tau} e^{i\omega(s-\tau)}\gamma(s)\,ds \\ \alpha^*_{cl}(\tau) &= \alpha^*\, e^{i\omega(\tau-t')} + i\int_{\tau}^{t'} e^{i\omega(\tau-s)}\bar{\gamma}(s)\,ds \end{aligned}}$$

(eq. 36.2)

Note que:

$$\alpha_{cl}(t) = \alpha$$

$$\alpha^*_{cl}(t') = \alpha^*$$

Usando estas soluções (ou as equações de movimento), dá para mostrar que (exercício):

$$i\int_t^{t'} d\tau \left[\frac{\dot{\alpha}^*_{cl}(\tau)}{i}\alpha_{cl}(\tau) - H(\alpha^*_{cl}, \alpha_{cl}) \right] + \alpha^*_{cl}(t)\alpha_{cl}(t) = \alpha^*_{cl}(t)\alpha_{cl}(t) + i\int_t^{t'} d\tau\, \gamma(\tau)\alpha^*_{cl}(\tau) =$$

$$= \alpha^*\alpha\, e^{-i\omega(t'-t)} + i\int_t^{t'} ds \left[\alpha\, e^{i\omega(t-s)}\bar{\gamma}(s) + \alpha^*\, e^{i\omega(s-t')}\gamma(s) \right] +$$

$$- \frac{1}{2}\int_t^{t'} ds \int_t^{t'} ds'\, \gamma(s)\bar{\gamma}(s')\, e^{-i\omega|s'-s|}$$

(eq. 36.3)

Compare 36.3 com 31.2: mais uma vez temos um termo indepente das fontes (que em 31.2 foi absorvido na normalização) um termo linear na fonte e um termo quadrático, de onde podemos obter o propagador. Vamos usar o mesmo método que antes, fazendo:

$$\alpha(t) = \alpha_{cl}(t) + \tilde{\alpha}(t)$$
$$\alpha^*(t) = \alpha^*_{cl}(t) + \tilde{\alpha}^*(t)$$

De novo, podemos mostrar que:

$$\tilde{S}\left[\alpha(t), \alpha^*(t); \gamma, \bar{\gamma}\right] = \tilde{S}\left[\alpha_{cl}(t), \alpha^*_{cl}(t); \gamma, \bar{\gamma}\right] + \tilde{S}\left[\tilde{\alpha}(t), \tilde{\alpha}^*(t); 0, 0\right]$$

e obter, de forma análoga a 30.4, que:

$$\tilde{Z} = \mathcal{N}\, e^{i\tilde{S}[\alpha_{cl}, \alpha^*_{cl}; \gamma, \bar{\gamma}]}$$

Para relacionar este resultado com o anterior, temos que escolher os estados iniciais e finais como o vácuo:

$$|\alpha\rangle = e^{\alpha a^+}|0\rangle \to \alpha = 0 \to |\alpha\rangle = |0\rangle$$
$$\alpha^* = 0 \to \langle\alpha^*| = \langle 0|$$

E então tomamos $\begin{cases} t \to -\infty \\ t' \to +\infty \end{cases}$

De 36.3 obtemos:

$$\boxed{Z[J] \equiv \langle 0, \infty | 0, -\infty\rangle_J} = \mathcal{N}\, \mathrm{EXP}\Big\{ \underbrace{\alpha^* \alpha}_{\to 0}\, e^{-i\omega(t'-t)} + i\int_t^{t} d\alpha \Big[\underbrace{\alpha}_{\to 0} e^{i\omega(t-s)}\bar{\gamma}(s) + \underbrace{\alpha^*}_{\to 0} e^{i\omega(s-t')}\gamma(s)\Big] +$$

(funcional gerador das transições vácuo-vácuo)

$$- \frac{1}{2}\int_t^{t'} ds \int_t^{t'} ds'\, \underbrace{\gamma(s)}_{J/\sqrt{2\omega}}\, \underbrace{\bar{\gamma}(s')}_{J/\sqrt{2\omega}}\, e^{-i\omega|s'-s|}\Big\} = \boxed{\mathcal{N}\, \mathrm{EXP}\left[-\frac{1}{2} J\cdot\Delta_F\cdot J\right]}$$ (eq. 37.1)

Note que: $\boxed{\mathcal{N} = \langle 0, \infty | 0, -\infty\rangle_0}$ (eq. 37.2)

$$\boxed{\Delta_F = \frac{1}{2\omega} e^{-i\omega|s-s'|}}$$ (eq. 37.3)

Que é o mesmo resultado obtido na pg 32. Note também que a condição de contorno:

$\left.\begin{array}{l} t \to -\infty \\ \alpha(t) = 0 \\ \alpha^*(t) \text{ livre} \end{array}\right\} \Rightarrow$ só temos a parte de criação no passado

$\alpha^*(t)$ é autovalor de a^+

$$\left.\begin{array}{l} t \to +\infty \\ \alpha^*(t) = 0 \\ \alpha(t) \text{ livre} \end{array}\right\} \Rightarrow$$ só temos a parte de aniquilação no futuro

$\alpha(t)$ é autovalor de a

Como $$\hat{q}(t) = \frac{1}{\sqrt{2w}}\left[\hat{a}\, e^{-iwt} + \hat{a}^+ e^{iwt}\right]$$

$$\langle 0,-\infty|\hat{q}(t)|0,-\infty\rangle = \frac{\alpha^*}{\sqrt{2w}} e^{iwt}$$

$$\langle 0,+\infty|\hat{q}(t)|0,+\infty\rangle = \frac{\alpha(t)}{\sqrt{2w}} e^{-iwt}$$

verificamos que isto é o mesmo que as condições 32.1.

O que ganhamos fazendo de novo este caminho? Para começar ele é mais limpo, não houve o uso prescrição alguma. Adicionalmente vimos que o resultado final só pôde ser obtido escolhendo os estados inicial e final como o vácuo, este passo não ficou explicito no caso anterior. De fato a projeção no vácuo estava escondida no único lugar em que poderia, na prescrição de Feynman que, como já veremos, está intrinsecamente ligada a projeção no vácuo assintótico (para tempos grandes) da teoria.

Rotação de Wick para o tempo Euclideano

Até agora viemos fazendo integrais que tipicamente envolviam exponenciais do tipo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-i\alpha x^2}$$

que exige que α ou x sejam tomados ligeiramente complexos para que a integral convirja, ou seja, estas integrais só estão definidas via sua continuação analítica. Este tipo de integral aparece com frequência em teoria de campos, pois em geral podemos expandir as integrais da ação em torno da solução clássica usando a Saddle Point Approximation:

$$S = \underbrace{S[q_{cl}]}_{\boxed{\left.\frac{\delta S}{\delta q}\right|_{q=q_{cl}} = 0}} + \frac{1}{2}\delta q_i\, S_{ij}\, \delta q_j + \underbrace{\mathcal{O}(\delta q^3)}$$

se a ação já é quadrática em q (e.g. no caso livre) este termo é zero e o resultado da SPA é exato.

Uma outra forma de olhar a continuação analítica é fazendo uma rotação para o Espaço Euclideano, este procedimento é também bastante instrutivo pois revela paralelos interessantes entre a Mecânica Quântica e a Mecânica Estatística. Pois bem, analisemos o seguinte caso:

$$\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$$

$$E_n > 0$$

$$\hat{1} = \sum |n\rangle\langle n|$$

Uma amplitude de transição seria escrita como: