A eq. 45.1 tem somente uma solução para $\overbrace{(t_{E_1} - t_{E_2})}^{t_E} \in [0,\beta]$:

$$\boxed{\Delta_{FREE}(t_E) = \frac{1}{2\omega}\left[(1+n(\omega))\, e^{-\omega t_E} + n(\omega)\, e^{\omega t_E}\right]} \quad \text{(eq. 46.1)}$$

onde:

$$\boxed{n(\omega) = \frac{1}{e^{\beta|\omega|} - 1}} \quad \text{(eq. 46.2)}$$

é a distribuição de Bose-Einstein. E no limite de temperatura zero:

$$T = 0 \qquad n(\omega) \to 0$$

$$\beta \to \infty \qquad \Delta_{FREE} \to \Delta_F(t_E) = \frac{e^{-\omega t_E}}{2\omega} = \frac{e^{-i\omega t}}{2\omega} \quad \text{(compare com 37.3)}$$

voltando para Minkowski

O oscilador Harmônico forçado (de novo)

Vejamos como fica o oscilador no espaço Euclideano. Partindo da ação:

$$iS[q] = i\int dt \left[\frac{1}{2}\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 - \frac{\omega^2 q^2}{2} + Jq\right]$$

WICK

$$t = -it_E$$

$$q(t) = q(-it_E) = q_E(t_E)$$

$$J(t) = J(-it_E) = J_E(t_E)$$

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 = \left(\frac{1}{-i}\right)^2\left(\frac{dq_E}{dt_E}\right)^2$$

$$-S_E[q] = \int dt_E\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{dq_E}{dt_E}\right)^2 - \frac{\omega^2 q_E^2}{2} + J_E q_E\right]$$

Suprimindo todos os índices *"E"* para simplificar a notação, obtemos a seguinte função de partição:

$$\boxed{Z_E[J] = \int_P \mathcal{D}q \;\mathrm{Exp}\left\{-\frac{1}{2}\int dt\left[\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 + \omega^2 q^2\right] + \int dt\, J(t)\, q(t)\right\}} \quad \text{(eq. 46.2)}$$

A vantagem agora é que estamos fazendo esta integral em trajetórias fechadas, por isso não há problema com bordas quando integramos por partes (compare com a pg 28):

$$Z_E[J] = \int_P \mathcal{D}q \;\mathrm{Exp}\left\{-\frac{1}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_1+\beta} dt\, q \underbrace{\left[-\left(\frac{d}{dt}\right)^2 + \omega^2\right]}_{\Delta_E^{-1}} q + \int_{\tau_1}^{\tau_1+\beta} dt\, J(t)\, q(t)\right\} =$$

$$\tau_1 \to -\infty \qquad \tau_1 + \beta \to \infty \qquad \Rightarrow \beta \to \infty$$

$$\boxed{= N\, \mathrm{Exp}\left\{\frac{1}{2}\int ds \int ds'\, J(s)\, \Delta_E(s,s')\, J(s')\right\}} \quad \text{(eq. 46.3)}$$

$$(*) \quad J(t) \neq 0 \quad -T < t < T$$

$$J(t) = 0 \quad |t| > |T|$$

note que este Δ é a função de Green que soluciona o problema clássico:

$$-\frac{d^2 q_\omega}{dt^2} + \omega^2 q_\omega = J(t)$$

$$q_\omega(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \, \Delta_E(t,t') J(t')$$

$$\boxed{\Delta_E(s,s') \equiv \left(-\frac{d^2}{ds^2} + \omega^2\right)^{-1}(s,s') = \int \frac{dE_E}{2\pi} \frac{e^{-iE_E(s-s')}}{E_E^2 + \omega^2}}$$ (eq. 47.1)

$$\therefore \left(-\frac{d^2}{ds^2} + \omega^2\right)\Delta_E(s,s') = \int \frac{dE_E}{2\pi}\left(-(-iE_E)^2 + \omega^2\right)\frac{e^{-iE_E(s-s')}}{E_E^2+\omega^2} = \delta(s-s')$$

Note que a integral feita da primeira para a segunda linha de 46.3 é uma Gaussiana tradicional (nenhuma exponencial complexa por ali). Além disso o propagador Euclideano em 47.1 não tem pólos para E_E real e portanto não precisamos falar nada sobre o caminho de integração. Os polos foram movidos para o eixo complexo pela rotação de Wick:

polos de Δ_E: $E_E = \pm i\omega$

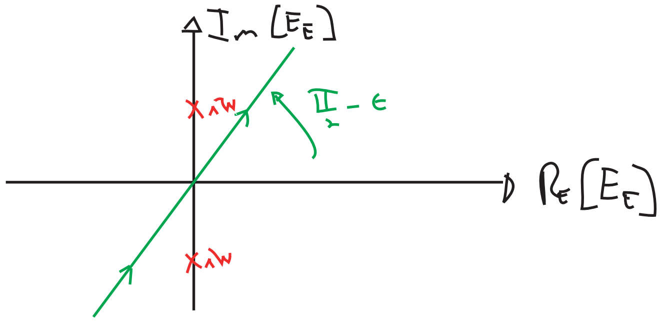
Queremos, finalmente, voltar para o espaço de Minkowski. Já sabemos que $t = -i t_E$ mas como rodamos E_E? Primeiramente exigimos que $E\,t = E_E\, t_E$, então:

$$E \simeq iE_E \simeq e^{i\frac{\pi}{2}} E_E \qquad E\,t = (iE_E)(-it_E) = E_E\, t_E$$

(o que é arbitrário, mas vai garantir que ondas planas se propagem na mesma direção espacial com t ou t_E crescente quando passarmos para mais dimensões, uma vez que :

$$e^{ip_\mu x^\mu} = e^{-i(Et - \vec{p}\cdot\vec{x})} = e^{-i(E_E t_E - \vec{p}\cdot\vec{x})}$$

) Além disso, para que a extensão analítica seja válida, não podemos cruzar os polos, portanto não podemos rodar totalmente para $E_E = -iE$ mas sim parar antes de chegar no polo:



$$E = e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\epsilon\right)} E_E = i(E_E - i\epsilon')$$

ou

$$E_E = e^{-i\left(\frac{\pi}{2}-\epsilon\right)} E = -i(E + i\epsilon')$$

Com esta rotação temos:

(eq. 47.1) $\Rightarrow$ $$\Delta_E(t_E = it) = \int \frac{dE_E}{2\pi}\frac{e^{-iE_E t_E}}{E_E^2+\omega^2} = \underbrace{\int \frac{i\,dE}{2\pi}\frac{e^{-iEt}}{E^2 - \omega^2 + i\epsilon}}_{} = \Delta_F(t)$$

$$E_E^2 = \left[-i(E + i\epsilon')\right]^2 = -\left(E^2 + i\epsilon'' + \mathcal{O}(\epsilon'^2)\right)$$

compare com o fim da pg 31
(lembrando que lá $p = p^0 = E$)

De forma que, mais uma vez, somos levados à prescrição de Feynman.

Quantização Canônica do Campo Escalar

(Peskin 2.3, Nastase 3)

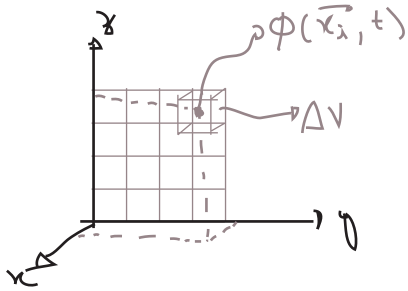
Queremos agora fazer a quantização do campos mais "simples" a disposição, o campo escalar. A lagrangeana mais geral, invariante de lorentz, para um campo escalar real é:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2 - V(\phi, \partial^\mu\phi) \qquad \text{(eq. 48.1)}$$

Para generalizar a quantização para o caso dos campos precisamos primeiro obter os Brackets de Poison da teoria. Uma vez que sabemos como fazer isto no caso de partículas (pontos), discretizaremos o espaço, definindo:

$$q_i(t) \equiv \sqrt{\Delta V}\,\phi_i(t) \equiv \sqrt{\Delta V}\,\phi(\vec{x}_i,t)$$

$$p_i(t) \equiv \sqrt{\Delta V}\,\pi_i(t) \equiv \sqrt{\Delta V}\,\pi(\vec{x}_i,t)$$



$$\frac{1}{\Delta V}\frac{\partial f_i(t)}{\partial\phi_j(t)} \underset{\text{discretização}}{\overset{\text{contínuo}}{\rightleftarrows}} \frac{\delta f\left(\phi(\vec{x}_i,t),\pi(\vec{x}_i,t)\right)}{\delta\phi(\vec{x}_j,t)}$$

$$\Delta V \longleftrightarrow d^3x$$

Com isso transformamos o espaço em um conjunto de coordenadas discretas, com o seguinte Bracket de Poison:

$$\frac{\partial}{\partial q_i} = \frac{1}{\sqrt{\Delta V}}\frac{\partial}{\partial\phi_i} \qquad \frac{\partial}{\partial p_i} = \frac{1}{\sqrt{\Delta V}}\frac{\partial}{\partial\pi_i}$$

$$\{f,g\}_{P.B.} = \sum_i\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right) = \sum_i \frac{1}{\Delta V}\left(\frac{\partial f}{\partial\phi_i}\frac{\partial g}{\partial\pi_i} - \frac{\partial f}{\partial\pi_i}\frac{\partial g}{\partial\phi_i}\right) =$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta V^2} \qquad \Delta V \to d^3x$$

CONT

$$= \int d^3x\left[\frac{\delta f}{\delta\phi}\frac{\delta g}{\delta\pi} - \frac{\delta f}{\delta\pi}\frac{\delta g}{\delta\phi}\right]$$

$$\{\phi(\vec{x},t),\pi(\vec{x}',t)\}_{P.B.} = \int d^3y\left[\overbrace{\frac{\delta\phi(\vec{x},t)}{\delta\phi(\vec{y},t)}}^{\delta^3(\vec{y}-\vec{x})}\;\overbrace{\frac{\delta\pi(\vec{x}',t)}{\delta\pi(\vec{y},t)}}^{\delta^3(\vec{y}-\vec{x}')} - 0\right] = \delta^3(\vec{x}-\vec{x}')$$

$$\{\phi(\vec{x},t),\phi(\vec{x}',t)\}_{P.B.} = \{\pi(\vec{x},t),\pi(\vec{x}',t)\}_{P.B.} = 0$$

relações para tempos iguais

A partir destas relações, fica fácil fazer a quantização canônica do campo escalar:

$$\{\ ,\ \}_{P.B} \longrightarrow -\frac{i}{\hbar}[\ ,\ ]$$

$$\boxed{\begin{aligned}&[\phi(\vec{x},t),\pi(\vec{x}',t)] = i\hbar\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')\\ &[\phi(\vec{x},t),\phi(\vec{x}',t)] = [\pi(\vec{x},t),\pi(\vec{x}',t)] = 0\end{aligned}}$$

(eq. 49.1)
relações de comutação para tempos iguais

Note que, no caso em que $V(\phi,\partial^\mu\phi)=0$ a equação de movimento para o campo dado pela eq. 48.1 é a equação de Klein-Gordon:

$$\underbrace{V(\phi,\partial_\mu\phi)=0 \Rightarrow \boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\,\partial_\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2}}_{\text{CAMPO ESCALAR LIVRE}} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2$$

eq 9.1 $\Rightarrow$ $$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right] = 0 \Rightarrow -m^2\phi + \partial_\mu\left[-\partial^\mu\phi\right] = 0$$

$$\boxed{(\partial^\mu\partial_\mu + m^2)\phi = 0}$$

Equação de Klein-Gordon
(eq. 49.2)

$$\partial_\mu\partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \Box^2 \Rightarrow (\Box^2 + m^2)\phi = 0 \quad \text{(eq. 2.1)}$$

Se passarmos para o espaço dos momentos:

$$\phi(\vec{x},t) = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,e^{i\vec{x}\cdot\vec{p}}\,\phi(\vec{p},t) \longrightarrow \phi(\vec{p},t) = \int d^3x\; e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}\,\phi(\vec{x},t)$$

$$\pi(\vec{x},t) = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,e^{i\vec{x}\cdot\vec{p}}\,\pi(\vec{p},t) \longrightarrow \pi(\vec{p},t) = \int d^3x\; e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}\,\pi(\vec{x},t)$$

note que, para o campo real: $\phi^+(x,t) = \phi(x,t)$, $\pi^+(x,t) = \pi(x,t)$ só é verdade se: $\phi^+(p,t) = \phi(-p,t)$, $\pi^+(p,t) = \pi(-p,t)$

Eq K-G (49.2):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2\right)\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,e^{i\vec{x}\cdot\vec{p}}\,\phi(\vec{p},t) = 0$$

$$\nabla^2 e^{i\vec{x}\cdot\vec{p}} = \vec{\nabla}\cdot(i\vec{p})\, e^{i\vec{x}\vec{p}} = -|\vec{p}|^2 e^{i\vec{x}\vec{p}}$$

$$\int d^3k\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{p}'} \times \left(\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{x}\vec{p}} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + |\vec{p}|^2 + m^2 \right) \phi(\vec{p},t) = 0 \right)$$

$$\hookrightarrow \boxed{\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \left(|\vec{p}|^2 + m^2 \right) \right] \phi(\vec{p},t) = 0}$$

K-G no espaço dos momentos

(eq. 50.1)

Esta equação tem como solução:

$$\phi(\vec{p},t) = F(\vec{p})\, e^{\mp i\omega t} \qquad (\text{LEMBRE QUE } \hbar = 1)$$

$$\hookrightarrow \left((\pm i\omega)^2 + p^2 + m^2 \right) F(\vec{p}) = 0 \qquad \omega^2 = \omega_p^2 \equiv |\vec{p}|^2 + m^2$$

que é justamente o comportamento de um oscilador harmônico simples. Ou seja, pelo menos na versão em que o "potencial" V é zero, cada modo do campo satisfaz uma equação de oscilador com frequência:

$$\boxed{\omega_p \equiv \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}}$$

(eq. 50.2)

É claro que o caso com potencial é mais complicado, mas vamos usar esta informação e definir operadores em analogia com o oscilador harmônico:

$$\boxed{\begin{aligned} a(\vec{k},t) &= \sqrt{\frac{\omega_k}{2}}\, \phi(\vec{k},t) + \frac{i}{\sqrt{2\omega_k}}\, \pi(\vec{k},t) \\ a^\dagger(\vec{k},t) &= \sqrt{\frac{\omega_k}{2}}\, \phi^\dagger(\vec{k},t) - \frac{i}{\sqrt{2\omega_k}}\, \pi^\dagger(\vec{k},t) \end{aligned}}$$

(eq. 50.3)

Notando que: $\omega_k = \omega(|\vec{k}|)$

$$\phi(\vec{x},t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \left[a(\vec{p},t)\, e^{i\vec{p}\vec{x}} + a^\dagger(\vec{p},t)\, e^{-i\vec{p}\vec{x}} \right]$$

$$\int \frac{d^3p}{\omega_p} a^\dagger(\vec{p},t)\, e^{-i\vec{p}\vec{x}} \underset{\substack{\vec{p} \to -\vec{p} \\ \omega_p \to \omega_p}}{=} \int_{\infty}^{-\infty}\int_{\infty}^{-\infty}\int_{\infty}^{-\infty} \frac{(-d^3p)}{\omega_p} a^\dagger(-\vec{p},t)\, e^{i\vec{p}\vec{x}} = \int \frac{d^3p}{\omega_p} a^\dagger(-\vec{p},t)\, e^{i\vec{p}\vec{x}}$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\int\int$$

temos:

$$\boxed{\begin{aligned}\phi(\vec{x},t) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}\, e^{i\vec{p}\vec{x}}\left[a(\vec{p},t) + a^\dagger(-\vec{p},t)\right]\\ \Pi(\vec{x},t) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left(-i\sqrt{\frac{\omega_p}{2}}\right) e^{i\vec{p}\vec{x}}\left[a(\vec{p},t) - a^\dagger(-\vec{p},t)\right]\end{aligned}}$$

(eq. 51.1)

Colocando estas expressões em 49.1, obtemos as relações de comutação para os *a*'s:

$$\boxed{\begin{aligned}&\left[a(\vec{p},t), a^\dagger(\vec{p}\,',t)\right] = (2\pi)^3\,\delta^3(\vec{p}-\vec{p}\,')\\ &\left[a(\vec{p},t), a(\vec{p}\,',t)\right] = \left[a^\dagger(\vec{p},t), a^\dagger(\vec{p}\,',t)\right] = 0\end{aligned}}$$

(eq. 51.2)

Checando: $[\phi(\vec{x},t), \Pi(\vec{x}\,',t)] =$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p'}{\cancel{(2\pi)^3}}\left(\frac{+i}{\cancel{2}}\right)\sqrt{\frac{\omega_p'}{\omega_p}}\left(\overbrace{\underbrace{-\left[a(\vec{p},t), a^\dagger(-\vec{p}\,',t)\right]}_{\cancel{(2\pi)^3}\,\delta(\vec{p}+\vec{p}\,')} + \underbrace{\left[a^\dagger(-\vec{p},t), a(\vec{p}\,',t)\right]}_{-\cancel{(2\pi)^3}\,\delta(\vec{p}+\vec{p}\,')}}^{\cancel{2}\delta(\vec{p}+\vec{p}\,')}\right) e^{i\vec{p}\vec{x}}\, e^{i\vec{p}\,'\vec{x}\,'} =$$

$\vec{p}\,' = -\vec{p}$

$\omega_p' = \omega_p$

$$= i\int d^3p\,\sqrt{\frac{\cancel{\omega_p}}{\cancel{\omega_p}}}\, e^{i\vec{p}\vec{x}}\, e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}\,'} = i\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}\,')$$

Usando estas definições, vamos calcular o operador Hamiltoniano:

$$H = \int d^3\vec{x}\,\underbrace{\left[\Pi(x,t)\,\dot{\phi}(x,t) - \mathcal{L}\right]}_{\mathcal{H}}$$

$$\Pi(x,t) = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{\phi}} = \frac{\delta}{\delta\dot{\phi}}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}\,\dot{\phi} + \dots\right) = \dot{\phi}(\vec{x},t)$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\Pi^2 + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2$$

$$H = \int d^3x\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\Bigg\{\overbrace{\frac{1}{2}(-i)^2\sqrt{\frac{\omega_p\,\omega_p'}{4}}\left[a(\vec{p},t) - a^\dagger(-\vec{p},t)\right]\left[a(\vec{p}\,',t) - a^\dagger(-\vec{p}\,',t)\right] e^{i(\vec{p}+\vec{p}\,')\vec{x}}}^{\Pi^2(\vec{x},t)} +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{4\omega_p\omega_{p'}}}\underbrace{\left[a(\vec{p},t)+a^\dagger(-\vec{p},t)\right]\left[a(\vec{p},t)+a^\dagger(-\vec{p},t)\right]}_{(\vec{\nabla}\phi)^2}\underbrace{\left(\vec{\nabla}e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}\right)\cdot\left(\vec{\nabla}e^{i\vec{p}'\cdot\vec{x}}\right)}_{=-\vec{p}\cdot\vec{p}'e^{i(\vec{p}+\vec{p}')\vec{x}}}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{m^2}{\sqrt{4\omega_p\omega_{p'}}}\underbrace{\left[a(\vec{p},t)+a^\dagger(-\vec{p},t)\right]\left[a(\vec{p},t)+a^\dagger(-\vec{p},t)\right]}_{m^2\phi^2}e^{i(\vec{p}+\vec{p}')\vec{x}}\Bigg\} =$$

$$H=\int d^3x\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{d^3p'}{(2\pi)^3}e^{i(\vec{p}+\vec{p}')\cdot\vec{x}}\times$$

$$\times\Bigg\{-\frac{\sqrt{\omega_p\omega_{p'}}}{4}\overbrace{\left[a(\vec{p},t)-a^\dagger(-\vec{p},t)\right]\left[a(\vec{p}',t)-a^\dagger(-\vec{p}',t)\right]}^{\mathrm{I}}+$$

$$+\frac{-\vec{p}\cdot\vec{p}'+m^2}{4\sqrt{\omega_p\omega_{p'}}}\underbrace{\left[a(\vec{p},t)+a^\dagger(-\vec{p},t)\right]\left[a(\vec{p}',t)+a^\dagger(-\vec{p}',t)\right]}_{\mathrm{II}}\Bigg\}$$

$$\int d^3x\, e^{i(\vec{p}+\vec{p}')\vec{x}}=(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}+\vec{p}')$$

fazemos a integral $\int d^3p' \longrightarrow \vec{p}'=-\vec{p}$

$$\Rightarrow\begin{cases}-\dfrac{\sqrt{\omega_p\omega_{p'}}}{4}\longrightarrow-\dfrac{\omega_p}{4}\\[2ex]\dfrac{-\vec{p}\cdot\vec{p}'+m^2}{4\sqrt{\omega_p\omega_{p'}}}\longrightarrow\dfrac{\overbrace{\vec{p}^2+m^2}^{\omega_p^2}}{4\omega_p}=\dfrac{\omega_p}{4}\end{cases}$$

suprimi t só para encurtar a notação

$$\mathrm{I}\rightarrow\left[a(\vec{p},t)-a^\dagger(-\vec{p},t)\right]\left[a(-\vec{p},t)-a^\dagger(\vec{p},t)\right]=a(\vec{p})a(-\vec{p})-a(\vec{p})a^\dagger(\vec{p})-a^\dagger(-\vec{p})a(-\vec{p})+a^\dagger(-\vec{p})a^\dagger(\vec{p})$$

$$\mathrm{II}\rightarrow\left[a(\vec{p},t)+a^\dagger(-\vec{p},t)\right]\left[a(-\vec{p},t)+a^\dagger(\vec{p},t)\right]=a(\vec{p})a(-\vec{p})+a(\vec{p})a^\dagger(\vec{p})+a^\dagger(-\vec{p})a(-\vec{p})+a^\dagger(-\vec{p})a^\dagger(\vec{p})$$

$$-\mathrm{I}+\mathrm{II}=2a(\vec{p})a^\dagger(\vec{p})+2a^\dagger(-\vec{p})a(-\vec{p})$$

posso fazer p ⟶ -p na integral

$$\boxed{H=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\omega_p}{2}\left[a^\dagger(\vec{p},t)a(\vec{p},t)+a(\vec{p},t)a^\dagger(\vec{p},t)\right]}\qquad\text{(eq. 52.1)}$$

E aqui fica bem claro que estamos somando sobre um conjunto infinito (e contínuo) de osciladores harmônicos. Podemos obter as dependências temporais dos operadores *a*:

$$i\frac{d}{dt}a(\vec{p},t) = [a, H]$$

$$[a, a'a'^+] = aa'a'^+ - a'\underbrace{a'^+a} = aa'a'^+ - a'\left(-(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}^0-\vec{p}') + aa'^+\right) =$$

$a = a(\vec{p}^0)$

$a' = a(\vec{p}')$

$$= \cancel{aa'a'^+} + a'(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}^0-\vec{p}') - \cancel{\underbrace{a'a}_{aa'}a'^+}$$

$$[a, a'^+a'] = \underbrace{aa'^+}a' - a'^+a'a = \left((2\pi)^3\delta^3(\vec{p}^0-\vec{p}') + a'^+a\right)a' - a'^+a'a =$$

$$= a'(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}^0-\vec{p}') + \cancel{a'^+aa'} - \cancel{a'^+a'a}$$

$$i\frac{d}{dt}a(\vec{p},t) = \int\frac{d^3p'}{\cancel{(2\pi)^3}}\frac{\omega_{p'}}{\cancel{2}}\cancel{2}\,a(\vec{p}',t)\,\cancel{(2\pi)^3}\,\delta^3(\vec{p}^0-\vec{p}') = \omega_p\,a(\vec{p}^0,t) \qquad \text{(eq. 53.1)}$$

Cuja solução é:

$$\boxed{\begin{aligned} a(\vec{p},t) &= a_{\vec{p}}\,e^{-i\omega_p t} \\ a^+(\vec{p},t) &= a^+_{\vec{p}}\,e^{i\omega_p t}\end{aligned}} \qquad \text{(eq. 53.2)}$$

$$\therefore\ \phi(\vec{x},t) = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}\left(e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}a_{\vec{p}}\,e^{-i\omega_p t} + e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}a^+_{\vec{p}}\,e^{i\omega_p t}\right)$$

$$E_p \equiv \sqrt{\vec{p}^2+m^2} = \omega_p \qquad\qquad p\cdot x = p^0x^0 - \vec{p}\cdot\vec{x}$$

$$\boxed{\phi(\vec{x},t) = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\left(a_{\vec{p}}\,e^{-ipx} + a^+_{\vec{p}}\,e^{+ipx}\right)\Big|_{p^0=E_p}} \qquad \text{(eq. 53.3)}$$

$$\Pi(\vec{x},t) = \frac{\partial}{\partial t}\phi(\vec{x},t) \qquad \text{(eq. 53.4)}$$

Discretização

Para ter uma imagem física mais clara do que sistema que estamos lidando aqui, vamos imaginar uma sistuação onde o campo esteja restrito a um volume finito *V*. O efeito disto é discretizar o momento, já que em uma direção *z* de comprimento L_z, somente existirão modos com:

$$k_{zn} = \frac{2\pi n}{L_z}$$

e aí fazemos: $$\int d^3\vec{k} \rightarrow \frac{1}{V}\sum_{\vec{k}} \qquad\qquad \delta^3(\vec{k}-\vec{k}') \rightarrow V\delta_{\vec{k}\vec{k}'}$$

definimos também: $a_{\vec{k}} \to \sqrt{V(2\pi)^3}\, \alpha_{\vec{k}}$

de forma que: $[a_{\vec{k}}, a^{+}_{\vec{k}'}] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k}-\vec{k}') \to V(2\pi)^3[\alpha_{\vec{k}}, \alpha^{+}_{\vec{k}'}] = (2\pi)^3 V \delta_{\vec{k}\vec{k}'}$

$$\boxed{[\alpha_{\vec{k}}, \alpha^{+}_{\vec{k}'}] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}}$$ (eq. 54.1)

$$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\omega_k}{2}\Big[\underbrace{a^{+}(\vec{k},t)\, a(\vec{k},t)}_{a^{+}_{\vec{k}} \cancel{e^{i\omega_k t}}\; a_{\vec{k}} \cancel{e^{-i\omega_k t}}} + a(\vec{k},t)\, a^{+}(\vec{k},t)\Big]$$

$$H = \frac{1}{\cancel{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\cancel{(2\pi)^3}} \frac{\omega_k}{2} \cancel{V(2\pi)^3}\left[\alpha^{+}_{\vec{k}}\alpha_{\vec{k}} + \alpha_{\vec{k}}\alpha^{+}_{\vec{k}}\right] = \sum_{\vec{k}} \frac{\omega_k}{2}\left(\alpha^{+}_{\vec{k}}\alpha_{\vec{k}} + \alpha_{\vec{k}}\alpha^{+}_{\vec{k}}\right)$$ (eq. 54.2)

$$\equiv \sum_{\vec{k}} h_{\vec{k}}$$

$h_{\vec{k}} = \omega_{\vec{k}}\left(N_{\vec{k}} + \frac{1}{2}\right)$ Hamiltoniano de um oscilador de frequência $\omega_{\vec{k}}$

$\boxed{N_{\vec{k}} \equiv \alpha^{+}_{\vec{k}}\alpha_{\vec{k}}}$ Operador Número para o modo $\vec{k}$ (eq. 54.3)

Consideremos os autoestados deste operador: $N_{\vec{k}}|n_{\vec{k}}\rangle = n_{\vec{k}}|n_{\vec{k}}\rangle$

Vale toda a análise usual para osciladores harmônicos:

$\alpha^{+}_{\vec{k}}$ operador "levantamento" $n_{\vec{k}} \in \mathbb{N}_{+}$ número de ocupação

$\alpha_{\vec{k}}$ operador "abaixamento"

$$\boxed{\begin{array}{ll} \alpha_{\vec{k}}|n_{\vec{k}}\rangle = \sqrt{n_{\vec{k}}}\,|n_{\vec{k}}-1\rangle & |n_{\vec{k}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_k!}}(\alpha^{+}_{\vec{k}})^n|0\rangle \\ \alpha^{+}_{\vec{k}}|n_{\vec{k}}\rangle = \sqrt{n_{\vec{k}}+1}\,|n_{\vec{k}}+1\rangle & \langle n_{\vec{k}}|m_{\vec{k}}\rangle = \delta_{mn} \\ h_{\vec{k}}|n_{\vec{k}}\rangle = \omega_{\vec{k}}\left(n_{\vec{k}}+\frac{1}{2}\right)|n_{\vec{k}}\rangle & \\ \alpha_{\vec{k}}|0\rangle = 0 & \langle 0|N_{\vec{k}}|0\rangle = 0 \end{array}}$$ (eq. 54.4)

No contexto da teoria quântica de campos, usamos a terminologia:

$\alpha^{+}_{\vec{k}}, \alpha_{\vec{k}}$ operadores de criação e aniquilação

$n_{\vec{k}}$ número de partículas

pois veremos que cada um destes modos de excitação do campo corresponde a uma partícula (de momento $\vec{k}$)

Espaço de Fock

O espaço de Hilbert construído com os autoestados do operador número é conhecido como Espaço de Fock, a representação do espaço de Fock para um único oscilador é dada por:

$$\{|n_{\vec{k}}\rangle\}$$

Como o Hamiltoniano total é dado pela soma dos Hamiltonianos de cada modo, o espaço de Hilbert é o produto direto dos espaços de cada modo:

$$|\{n_k\}\rangle \in \bigotimes_k \{|n_{\vec{k}}\rangle\}$$

$$|\{n_k\}\rangle = \prod_{\vec{k}} |n_{\vec{k}}\rangle = \prod_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{n_{\vec{k}}}} (\alpha^{+}_{\vec{k}})^{n_{\vec{k}}} |0\rangle$$

mesmo vácuo para todos os modos

Ordenamento Normal

Assim como no caso do oscilador harmônico temos uma energia de modo zero para cada um dos modos permitidos:

$$\langle 0|h_{\vec{k}}|0\rangle = \frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{2}$$

No caso do campo, mesmo dentro de um volume finito, a energia total dada pela soma de todos estes modos zero é infinita:

$$E = \sum_{\vec{k}} \frac{\omega_{\vec{k}}}{2} = \infty$$

O que não pode ser um observável. Portanto definiremos a energia acima desta como a energia observável física do sistema e o estado em que todos os modos estão no estado fundamental fica definido como E = 0. Uma forma de operacionalizar esta redefinição da energia é usando Ordenamento Normal definido na pg 27:

$$\alpha^{+}\alpha = \alpha\alpha^{+} - 1$$

$$:H: = \sum_{\vec{k}} \frac{\omega_k}{2}\left(\alpha^{+}_{\vec{k}}\alpha_{\vec{k}} + \alpha^{+}_{\vec{k}}\alpha_{\vec{k}}\right) = H - \underbrace{\sum_{\vec{k}} \frac{\omega_k}{2}}_{\text{infinito subtraído}} = \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} N_{\vec{k}}$$

(compare com 54.2)

$$\langle 0|:H:|0\rangle = 0$$

Nós vamos generalizar este procedimento, dizendo que somente operadores normalmente ordenados são observáveis: $\langle\Omega|:\hat{O}:|\Omega\rangle$