$$i\frac{d}{dt}a(\vec{p},t) = [a, H]$$

$$[a, a'a'^{+}] = a a' a'^{+} - a' \underbrace{a'^{+} a} = a a' a'^{+} - a'\left(-(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}^{\,o}-\vec{p}^{\,\prime}) + a a'^{+}\right) =$$

$a = a(\vec{p}^{\,o})$
$a' = a(\vec{p}^{\,\prime})$

$$= \cancel{a a' a'^{+}} + a'(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}^{\,o}-\vec{p}^{\,\prime}) - \cancel{\underbrace{a' a}_{a a'} a'^{+}}$$

$$[a, a'^{+}a'] = \underbrace{a a'^{+}} a' - a'^{+}a' a = \left((2\pi)^3\delta^3(\vec{p}^{\,o}-\vec{p}^{\,\prime}) + a'^{+}a\right)a' - a'^{+}a'a =$$

$$= a'(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}^{\,o}-\vec{p}^{\,\prime}) + \cancel{a'^{+}a a'} - \cancel{a'^{+}a'a}$$

$$i\frac{d}{dt}a(\vec{p},t) = \int\frac{d^3p'}{\cancel{(2\pi)^3}}\frac{\omega_{p'}}{\cancel{2}}\cancel{2}\,a(\vec{p}^{\,\prime},t)\,\cancel{(2\pi)^3}\,\delta^3(\vec{p}^{\,o}-\vec{p}^{\,\prime}) = \omega_p\, a(\vec{p}^{\,o},t) \qquad \text{(eq. 53.1)}$$

Cuja solução é:

$$\boxed{\begin{aligned} a(\vec{p},t) &= a_{\vec{p}}\, e^{-i\omega_p t} \\ a^{+}(\vec{p},t) &= a^{+}_{\vec{p}}\, e^{i\omega_p t}\end{aligned}} \qquad \text{(eq. 53.2)}$$

$$\therefore\ \phi(\vec{x},t) = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}\left(e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}a_{\vec{p}}\,e^{-i\omega_p t} + e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}a^{+}_{\vec{p}}\,e^{i\omega_p t}\right)$$

$E_p \equiv \sqrt{\vec{p}^{\,2}+m^2} = \omega_p$

$p\cdot x = p^0x^0 - \vec{p}\cdot\vec{x}$

$$\boxed{\phi(\vec{x},t) = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\left(a_{\vec{p}}\,e^{-ipx} + a^{+}_{\vec{p}}\,e^{+ipx}\right)\Bigg|_{p^0=E_p}} \qquad \text{(eq. 53.3)}$$

$$\Pi(\vec{x},t) = \frac{\partial}{\partial t}\phi(\vec{x},t) \qquad \text{(eq. 53.4)}$$

Discretização

Para ter uma imagem física mais clara do que sistema que estamos lidando aqui, vamos imaginar uma sistuação onde o campo esteja restrito a um volume finito *V*. O efeito disto é discretizar o momento, já que em uma direção *z* de comprimento L_z, somente existirão modos com:

$$k_{zn} = \frac{2\pi n}{L_z}$$

e aí fazemos: $\displaystyle\int d^3\vec{k} \to \frac{1}{V}\sum_{\vec{k}}$ $\qquad\delta^3(\vec{k}-\vec{k}') \to V\,\delta_{\vec{k}\,\vec{k}'}$

definimos também: $a_{\vec{k}} \to \sqrt{V(2\pi)^3}\, \alpha_{\vec{k}}$

de forma que: $[a_{\vec{k}}, a^{\dagger}_{\vec{k}'}] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k}-\vec{k}') \to V(2\pi)^3[\alpha_{\vec{k}}, \alpha^{\dagger}_{\vec{k}'}] = (2\pi)^3 V \delta_{\vec{k}\vec{k}'}$

$$\boxed{[\alpha_{\vec{k}}, \alpha^{\dagger}_{\vec{k}'}] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}}$$ (eq. 54.1)

$$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\omega_k}{2}\Big[\underbrace{a^{\dagger}(\vec{k},t)\, a(\vec{k},t)}_{a^{\dagger}_{\vec{k}}\cancel{e^{i\omega_k t}}\; a_{\vec{k}}\cancel{e^{-i\omega_k t}}} + a(\vec{k},t)\, a^{\dagger}(\vec{k},t)\Big]$$

$$H = \frac{1}{\cancel{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\cancel{(2\pi)^3}} \frac{\omega_k}{2} \cancel{V(2\pi)^3}\left[\alpha^{\dagger}_{\vec{k}}\alpha_{\vec{k}} + \alpha_{\vec{k}}\alpha^{\dagger}_{\vec{k}}\right] = \sum_{\vec{k}} \frac{\omega_k}{2}\left(\alpha^{\dagger}_{\vec{k}}\alpha_{\vec{k}} + \alpha_{\vec{k}}\alpha^{\dagger}_{\vec{k}}\right)$$ (eq. 54.2)

$$\equiv \sum_{\vec{k}} h_{\vec{k}}$$

$h_{\vec{k}} = \omega_{\vec{k}}\left(N_{\vec{k}} + \frac{1}{2}\right)$ Hamiltoniano de um oscilador de frequência $\omega_{\vec{k}}$

$\boxed{N_{\vec{k}} \equiv \alpha^{\dagger}_{\vec{k}}\alpha_{\vec{k}}}$ Operador Número para o modo $\vec{k}$ (eq. 54.3)

Consideremos os autoestados deste operador: $N_{\vec{k}}|n_{\vec{k}}\rangle = n_{\vec{k}}|n_{\vec{k}}\rangle$

Vale toda a análise usual para osciladores harmônicos:

$\alpha^{\dagger}_{\vec{k}}$ operador "levantamento" $\qquad n_{\vec{k}} \in \mathbb{N}_+$ número de ocupação

$\alpha_{\vec{k}}$ operador "abaixamento"

$$\alpha_{\vec{k}}|n_{\vec{k}}\rangle = \sqrt{n_{\vec{k}}}\,|n_{\vec{k}}-1\rangle \qquad |n_{\vec{k}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_k!}}(\alpha^{\dagger}_{\vec{k}})^n|0\rangle$$

$$\alpha^{\dagger}_{\vec{k}}|n_{\vec{k}}\rangle = \sqrt{n_{\vec{k}}+1}\,|n_{\vec{k}}+1\rangle \qquad \langle n_{\vec{k}}|m_{\vec{k}}\rangle = \delta_{mn}$$

$$h_{\vec{k}}|n_{\vec{k}}\rangle = \omega_{\vec{k}}\left(n_{\vec{k}}+\frac{1}{2}\right)|n_{\vec{k}}\rangle$$

$$\alpha_{\vec{k}}|0\rangle = 0 \qquad \langle 0|N_{\vec{k}}|0\rangle = 0$$ (eq. 54.4)

No contexto da teoria quântica de campos, usamos a terminologia:

$\alpha^{\dagger}_{\vec{k}}, \alpha_{\vec{k}}$ operadores de criação e aniquilação

$n_{\vec{k}}$ número de partículas

pois veremos que cada um destes modos de excitação do campo corresponde a uma partícula (de momento $\vec{k}$)

Espaço de Fock

O espaço de Hilbert construído com os autoestados do operador número é conhecido como Espaço de Fock, a representação do espaço de Fock para um único oscilador é dada por:

$$\{|n_{\vec{k}}\rangle\}$$

Como o Hamiltoniano total é dado pela soma dos Hamiltonianos de cada modo, o espaço de Hilbert é o produto direto dos espaços de cada modo:

$$|\{n_k\}\rangle \in \bigotimes_k \{|n_{\vec{k}}\rangle\}$$

$$|\{n_k\}\rangle = \prod_{\vec{k}} |n_{\vec{k}}\rangle = \prod_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{n_{\vec{k}}}} (\alpha^{+}_{\vec{k}})^{n_{\vec{k}}} \underline{|0\rangle}$$

↳ mesmo vácuo para todos os modos

Ordenamento Normal

Assim como no caso do oscilador harmônico temos uma energia de modo zero para cada um dos modos permitidos:

$$\langle 0|h_{\vec{k}}|0\rangle = \frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{2}$$

No caso do campo, mesmo dentro de um volume finito, a energia total dada pela soma de todos estes modos zero é infinita:

$$E = \sum_{\vec{k}} \frac{\omega_{\vec{k}}}{2} = \infty$$

O que não pode ser um observável. Portanto definiremos a energia acima desta como a energia observável física do sistema e o estado em que todos os modos estão no estado fundamental fica definido como E = 0. Uma forma de operacionalizar esta redefinição da energia é usando Ordenamento Normal definido na pg 27:

$$\alpha^{+}\alpha = \alpha\alpha^{+} - 1$$

$$:H: = \sum_{\vec{k}} \frac{\omega_k}{2}\left(\alpha^{+}_{\vec{k}}\alpha_{\vec{k}} + \underbrace{\alpha^{+}_{\vec{k}}\alpha_{\vec{k}}}_{\text{(compare com 54.2)}}\right) = H - \underbrace{\sum_{\vec{k}} \frac{\omega_k}{2}}_{\text{infinito subtraído}} = \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} N_{\vec{k}}$$

$$\langle 0|:H:|0\rangle = 0$$

Nós vamos generalizar este procedimento, dizendo que somente operadores normalmente ordenados são observáveis: $\langle\Omega|:\hat{O}:|\Omega\rangle$

Notamos, finalmente, que:

$$\phi \sim \left(a_{\vec{p}}\, e^{-ipx} + a^\dagger_{\vec{p}}\, e^{+ipx} \right)\Bigg|_{p^0 = E_p}$$

$$E_p = +\sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2} > 0$$

$e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)}$

Onda plana se propagando na direção $\vec{x}$ com frequência ω

$\omega > 0$

No entanto o segundo termo tem o "sinal errado" em frente à evolução temporal: $a^\dagger_{\vec{p}}\, e^{+iE_p t}$ por isso é comum a seguinte denominação:

$$a_{\vec{p}}\, e^{-ipx} = a_{\vec{p}}\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} e^{-iE_p t} \quad \leftrightarrow \quad \text{solução de frequência (ou energia) positiva}$$

$$a^\dagger_{\vec{p}}\, e^{+ipx} = a^\dagger_{\vec{p}}\, e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} e^{+iE_p t} \quad \leftrightarrow \quad \text{solução de frequência (ou energia) negativa}$$

Note, no entanto, que o operador hamiltôniano: $H = \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} N_{\vec{k}} \rightarrow \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, \omega_{\vec{k}}\, \underbrace{a^\dagger(\vec{k})\, a(\vec{k})}_{N^{CONT.}_{\vec{k}}}$

só tem autovalores maiores ou iguais a zero. Portanto não há mais o problema de energia negativa (não há nenhum estado com energia menor que zero).

Interpretação de Partícula

Lembrando que a quantidade conservada quando fazemos translações espaço-temporais é o tensor energia momento:

$$T^{\mu}{}_{\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\, \partial_\nu \phi - \mathcal{L}\, \delta^{\mu}{}_{\nu}$$

E que podemos pensar nas componentes conservadas só por translações espaciais ou temporais:

$$t: \quad H = \int T^{00}\, d^3x = \int \left(\pi(x)\, \dot{\phi}(x) - \mathcal{L} \right) d^3x = \int \mathcal{H}\, d^3x$$

$$x^\mu: \quad P^i = \int T^{0i}\, d^3x = \int \pi\, \partial^i \phi\, d^3x \qquad \vec{P} = -\int \pi\, \vec{\nabla}\phi\, d^3x$$

$$\boxed{\vec{P} = -\int \pi\, \vec{\nabla}\phi\, d^3x = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, \vec{p}\, a^\dagger_{\vec{p}}\, a_{\vec{p}}} \qquad \text{(eq. 56.1)}$$

Isto nos mostra que o operador $a^\dagger_{\vec{p}}$ age no vácuo para criar um estado com momento $\vec{p}$ e energia $E = +\sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}$ por isso interpretaremos estes estados como partículas de massa m

Note que definimos o momento total do estado em termos da carga conservada pela invariância sob translações, e não como o momento canônicamente conjugado.

Estatística de Bose-Einstein

Uma vez que: $\left[a^\dagger_{\vec{k}}, a^\dagger_{\vec{k}'}\right] = 0$ temos que:

$$|\psi\rangle = \sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2} \psi(\vec{k}_1,\vec{k}_2)\, \alpha^\dagger_{\vec{k}_1} \alpha^\dagger_{\vec{k}_2} |0\rangle = \sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2} \psi(\vec{k}_1,\vec{k}_2)\, \alpha^\dagger_{\vec{k}_2} \alpha^\dagger_{\vec{k}_1} |0\rangle$$

$$\vec{k}_2 \quad \vec{k}_1 \quad \vec{k}_1 \quad \vec{k}_2$$

comutam!

$$= \sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2} \psi(\vec{k}_2,\vec{k}_1)\, \alpha^\dagger_{\vec{k}_1} \alpha^\dagger_{\vec{k}_2} |0\rangle$$

Estado qualquer definido pela função de onda $\psi(\vec{k}_1,\vec{k}_2)$

Vemos que este estado é simétrico sobre a troca $\vec{k}_1 \longleftrightarrow \vec{k}_2$ portanto, se interpretarmos cada criação como uma partícula (e neste caso são todas idênticas) de momento k, estas estarão satizfazendo uma estatística de Bose-Einstein: $\psi(\vec{k}_1,\vec{k}_2) = \psi(\vec{k}_2,\vec{k}_1)$

\\

Propagador do Campo Escalar Livre

(Peskin 2.3-2.4, Nastase 4)

Vamos nos preocupar agora em achar expressões relativisticamente invariantes para as soluções da equação de Klein-Gordon e então abordar a questão da causalidade.

Vimos que, na versão discretizada, os estados são normalizados da seguinte forma (eq 54.3):

$$|n_{\vec{k}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_k!}}\left(\alpha^\dagger_{\vec{k}}\right)^{n_{\vec{k}}} |0\rangle \qquad \langle n|m\rangle = \delta_{mn}$$

Lembrando que a relação entre o discreto e o contínuo é:

$$\begin{cases} a_{\vec{k}} \longleftrightarrow \sqrt{V(2\pi)^3}\,\alpha_{\vec{k}} \\ \delta^3(\vec{k}-\vec{k}') \longleftrightarrow V\,\delta_{\vec{k}\vec{k}'} \end{cases}$$

$$n_{\vec{k}} = 1 \qquad |1_{\vec{k}}\rangle \equiv |\vec{k}\rangle = \alpha^\dagger_{\vec{k}} |0\rangle$$

Normalização no contínuo: $\langle \vec{p}|\vec{k}\rangle = (2\pi)^3 \underbrace{\delta^3(\vec{p}-\vec{k})}_{\text{não é invariante}}$

Considere um boost na direção 3:

$$\left.\begin{aligned} p_3' &= \gamma(p_3 + \beta E_p) \\ E_p' &= \gamma(E_p + \beta p_3) \\ k_3' &= \gamma(k_3 + \beta E_k) \\ E_k' &= \gamma(E_k + \beta k_3) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \delta(f(x) - f(x_0)) = \frac{1}{|f'(x_0)|}\delta(x - x_0)$$

$$\cdots \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \beta = \frac{v}{c} = v$$

unidades naturais

$$\delta^3(\vec{p}\,' - \vec{k}\,') = \delta^2(\vec{p}_{12}' - \vec{k}_{12}')\,\delta(p_3' - k_3')$$

$$p_3' = f(p_3) = \gamma\left(p_3 + \beta\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + m^2}\right) \qquad k_3' = f(k_3) \ldots \quad \begin{matrix} p_3 = \eta \\ k_3 = \eta_0 \end{matrix}$$

$$\delta^3(\vec{p}\,' - \vec{k}\,') = \delta^3(\vec{p} - \vec{k})\,\frac{1}{\left.\frac{d f(p_3)}{d p_3}\right|_{\vec{p}=\vec{k}}} \longrightarrow \vec{p} = \vec{k} \rightarrow E_p = E_k = E$$

$$\delta^3(\vec{p} - \vec{k}) = \delta^3(\vec{p}\,' - \vec{k}\,')\,\gamma\left(1 + \beta\frac{\partial E}{\partial p_3}\right) \longleftarrow \begin{cases} E = \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2} \\ \dfrac{\partial E}{\partial p_3} = \dfrac{1}{2\sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}}\,2p_3 = \dfrac{p_3}{E} \end{cases}$$

$$\delta^3(\vec{p} - \vec{k}) = \delta^3(\vec{p}\,' - \vec{k}\,')\,\frac{\gamma}{E}\underbrace{(E + \beta p_3)}_{E'}$$

$$\delta^3(\vec{p} - \vec{k}) = \delta^3(\vec{p}\,' - \vec{k}\,')\,\frac{E'}{E}$$

Fica óbvio então que o objeto: $E\,\delta^3(\vec{p} - \vec{k}) = E'\,\delta^3(\vec{p}\,' - \vec{k}\,')$

é invariante. Por isso usaremos a normalização relativística a seguir:

$$\boxed{\langle \vec{p}\,|\,\vec{q}\,\rangle = 2E_{\vec{p}}\,(2\pi)^3\,\delta^3(\vec{p} - \vec{q})} \quad \text{(eq. 58.1)}$$

Que, para um número arbitrário de excitações, fica:

$$\langle \{\vec{k}_i\}\,|\,\{\vec{q}_j\}\rangle = \sum_{\pi(j)}\prod_i 2\omega_{\vec{k}_i}\,(2\pi)^3\,\delta^3(\vec{k}_i - \vec{q}_{\pi(j)}) \quad \text{(eq. 58.2)}$$

$\pi(j)$, $\vec{q}_{\pi(j)}$ → permutações de $\{\vec{q}_j\}$

Se colocarmos um fator adicional de $\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}$ na normalização do estado, obtemos as relações acima:

$$|n_{\vec{k}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_k!}}\left(\alpha_{\vec{k}}^\dagger\right)^{n_{\vec{k}}}|0\rangle \xrightarrow{\text{redefino}} |n_{\vec{k}}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{n_{\vec{k}}!}}\left(\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}\,\alpha_{\vec{k}}^\dagger\right)^{n_{\vec{k}}}|0\rangle$$

$$|\{n_{\vec{k}}\}\rangle \equiv \prod_{\vec{k}}\frac{1}{\sqrt{n_{\vec{k}}!}}\left(\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}\,\alpha_{\vec{k}}^\dagger\right)^{n_{\vec{k}}}|0\rangle$$

Que passando para o contínuo:

$$\boxed{|\{\vec{k}_i\}\rangle = \prod_{\vec{k}}\frac{1}{\sqrt{n_{\vec{k}}!}}\left(\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}\,a_{\vec{k}}^\dagger\right)^{n_{\vec{k}}}|0\rangle} \quad \text{(eq. 58.3)} \longleftrightarrow \left[\prod_{\vec{k}}\left(\sqrt{V(2\pi)^3}\right)^{n_{\vec{k}}}\right]|\{n_{\vec{k}}\}\rangle$$

$$|\vec{p}\rangle = \sqrt{2E_p}\,a_{\vec{p}}^\dagger|0\rangle$$

Temos também que tomar cuidado em mudar esta normalização em todos os lugares:

$$\hat{1} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} |p\rangle\langle p|$$

Transformação de Lorentz: $|\Lambda\vec{p}\rangle = \underbrace{U(\Lambda)}_{\text{unitária}} |\vec{p}\rangle \qquad \langle \Lambda\vec{q} | \Lambda\vec{p}\rangle = \langle \vec{q} | \vec{p}\rangle$

Importante: note que agora que quantizamos o campo (transformando o mesmo em um operador) o requisito para que ele seja ESCALAR muda:

$$\phi'_{cl}(x'=\Lambda x) = \underbrace{R(\Lambda)}_{\to 1} \phi_{cl}(x) \Longrightarrow$$

$$\phi_{cl}(x) \xleftrightarrow{\text{equivalência}} \langle\psi|\hat{\phi}(x)|\psi\rangle$$

$$\| \qquad\qquad\qquad$$

$$\phi'_{cl}(x') \longleftrightarrow \langle\psi|U^{-1}(\Lambda)U(\Lambda)\hat{\phi}(x)U^{-1}(\Lambda)U(\Lambda)|\psi\rangle$$

$$|\Lambda\vec{p}\rangle = \sqrt{2E_{\Lambda p}}\, a^{\dagger}_{\Lambda\vec{p}}|0\rangle = U(\Lambda)\sqrt{2E_p}\, a^{\dagger}_{p}\underbrace{|0\rangle}_{U^{-1}(\Lambda)U(\Lambda)} \qquad U(\Lambda)|0\rangle = |0\rangle$$

$$\boxed{U(\Lambda)\, a^{\dagger}_{\vec{p}}\, U^{-1}(\Lambda) = \sqrt{\frac{E_{\Lambda p}}{E_p}}\, a^{\dagger}_{\Lambda\vec{p}}} \qquad \text{(eq. 59.1)}$$

Outro objeto que gostaríamos de ter em uma forma explicitamente relativística é a expansão do campo escalar:

$$\phi(\vec{x},t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\left(a_{\vec{p}}\, e^{-ipx} + a^{\dagger}_{\vec{p}}\, e^{+ipx}\right)\Big|_{p^0=E_p} \overset{\cdot \times \frac{\sqrt{2E_p}}{\sqrt{2E_p}}}{=} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}\sqrt{2}\left(\sqrt{E_p}\, a_{\vec{p}}\, e^{-ipx} + \underbrace{\sqrt{E_p}\, a^{\dagger}_{\vec{p}}}_{=U^{-1}(\Lambda)\sqrt{E_{\Lambda p}}\, a^{(\dagger)}_{\Lambda\vec{p}}\, U(\Lambda)} e^{+ipx}\right)\Big|_{p^0=E_p}$$

Para que: $\phi(x) = U^{-1}(\Lambda)\phi'(x')U(\Lambda)$ este pedaço deve ser invariante

De fato:

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}(2\pi)\,\delta(p^2-m^2)\Big|_{p^0>0}$$

só tenho invariantes

$$\delta(p^2-m^2) = \delta(+p_0^2-\vec{p}^2-m^2) = \delta(p_0^2-E_p^2)$$

$$\delta(f(p^0)-f(E_p)) = \frac{1}{|f'(p^0)|}\delta(p^0-E_p) = \frac{1}{2p^0}\delta(p^0-E_p)$$

o que mostra que esta é uma integral no tri-momento invariante de Lorentz, de forma que:

$$f(p) \xrightarrow{\text{Lorentz}} f(p) \Longrightarrow \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{f(p)}{2E_p} \longrightarrow \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{f(p)}{2E_p}$$

Podemos enfim escrever:

$$\boxed{\phi(x) \equiv \phi(\vec{x},t) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}(2\pi)\,\delta(p^2-m^2)\Big|_{p^0>0}\left(\sqrt{2E_p}\, a_{\vec{p}}\, e^{-ipx} + \sqrt{2E_p}\, a^{\dagger}_{\vec{p}}\, e^{+ipx}\right)\Big|_{p^0=E_p}} \qquad \text{(eq. 59.2)}$$

redundante pois é garant. pela $\delta(p^2-m^2)$

Finalmente consideremos:

$$\phi(\vec{x})|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p} e^{-i\vec{p}\vec{x}}|\vec{p}\rangle$$

operador na representação de Schödinger, basta partir de 59.2 e usar $\phi_S(\vec{x}) = e^{-i\hat{H}t}\phi_H(x)\, e^{+i\hat{H}t}$ lembrando que:

$$[\hat{a}_p, \hat{H}] = \omega_p \hat{a}_p$$

$$\hat{H}\hat{a}_p = \hat{a}_p(\hat{H}-E_p) \qquad \hat{H}\hat{a}^{+} = \hat{a}^{+}(\hat{H}+E_p)$$

$$\hat{H}^n\hat{a}_p = \hat{a}_p(\hat{H}-E_p)^n \qquad \hat{H}^n\hat{a}^{+} = \hat{a}^{+}(\hat{H}+E_p)^n$$

$$e^{-i\hat{H}t}\hat{a}_p e^{+i\hat{H}t} = \hat{a}_p e^{+iE_pt} \qquad e^{-i\hat{H}t}\hat{a}^{+}_p e^{+i\hat{H}t} = \hat{a}^{+}_p e^{-iE_pt}$$

É uma superposição de vários estados de uma partícula (cada um deles com momento bem definido), muito similar aos auto-estados da posição em MQ (a diferença vem do fator $1/E_p$). De fato:

$$\underbrace{\langle 0|\phi(\vec{x})}_{\text{“}\langle\vec{x}|\text{”}}|\vec{p}\rangle = \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{p'}} e^{+i\vec{p}'\vec{x}}\underbrace{\langle \vec{p}'|\vec{p}\rangle}_{2E_{p'}(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}'-\vec{p})} = e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}$$

Da mesma forma que na MQ tínhamos $\langle\vec{x}|\vec{p}\rangle \sim e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}$

Por isso podemos interpretar esta função como a função de onda no espaço das posições da partícula criada com momento *p*, e dizemos que $\phi(x)$ cria uma partícula na posição *x*.

Campo Escalar Complexo

Para entender melhor a propagação (a evolução temporal) destes estados, nós passaremos à quatização do campo escalar complexo:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi^* - m^2\phi^*\phi - U(|\phi|^2)$$

Esta Lagrangeana é simétrica sobre: $\phi \to \phi\, e^{i\alpha}$ (α → NÚMERO)

que é uma simetria U(1) Global. Há várias formas de falar sobre ϕ: dizemos que ϕ é “carregado sobre U(1) Global”, “tem carga de U(1) global” ou se “transforma sobre U(1) global”.

Notem que temos um fator 1/2 faltando aí: $\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi \longleftrightarrow \partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi^*$

Isso porque um campo complexo tem dois graus de liberdade e trataremos ϕ e ϕ^* como campos independentes (poderíamos usar $\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Re}(\phi)$ e $\phi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Im}(\phi)$, mas é mais simples trabalhar com ϕ e ϕ^*)

EOM FOR ϕ: $\quad (\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\phi^* = -\dfrac{\partial U}{\partial\phi}$

FOR ϕ^*: $\quad (\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\phi = -\dfrac{\partial U}{\partial\phi^*}$

Seguimos um procedimento análogo ao do campo real, só que agora com o dobro dos graus de liberdade:

$$\boxed{\begin{aligned}\phi(\vec{x},t) &\equiv \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}\left[a_+(\vec{p},t)\,e^{i\vec{p}\vec{x}} + a_-^\dagger(\vec{p},t)\,e^{-i\vec{p}\vec{x}}\right]\\ \phi^\dagger(\vec{x},t) &\equiv \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}\left[a_+^\dagger(\vec{p},t)\,e^{-i\vec{p}\vec{x}} + a_-(\vec{p},t)\,e^{i\vec{p}\vec{x}}\right]\end{aligned}} \quad \text{(eq. 60.1)}$$