

Finalmente consideremos:

$$\phi(\vec{x})|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} |\vec{p}\rangle$$

$[\hat{a}_p, \hat{H}] = \omega_p \hat{a}_p$
 $\hat{H} \hat{a}_p = \hat{a}_p (\hat{H} - E_p)$
 $\hat{H} \hat{a}_p^\dagger = \hat{a}_p^\dagger (\hat{H} + E_p)$
 $e^{-i\hat{H}t} \hat{a}_p e^{i\hat{H}t} = \hat{a}_p e^{+iE_p t}$
 $e^{-i\hat{H}t} \hat{a}_p^\dagger e^{i\hat{H}t} = \hat{a}_p^\dagger e^{-iE_p t}$

operador na representação de Schödinger, basta partir de 59.2 e usar $\phi_{\vec{x}}(\vec{x}) = e^{-i\hat{H}t} \phi_{\vec{x}}(\vec{x}) e^{+i\hat{H}t}$ lembrando que:

É uma superposição de vários estados de uma partícula (cada um deles com momento bem definido), muito similar aos auto-estados da posição em MQ (a diferença vem do fator $1/E_p$). De fato:

$$\langle 0 | \phi(\vec{x}) | \vec{p}\rangle = \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{p'}} e^{+i\vec{p}'\cdot\vec{x}} \langle \vec{p}' | \vec{p}\rangle = e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}$$

“$\langle \vec{x} | \vec{p}\rangle$” *$2E_{p'} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}' - \vec{p})$*

Da mesma forma que na MQ tínhamos $\langle \vec{x} | \vec{p}\rangle \sim e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}$

Por isso podemos interpretar esta função como a função de onda no espaço das posições da partícula criada com momento p , e dizemos que $\phi(x)$ **cria uma partícula** na posição x .

Campo Escalar Complexo

Para entender melhor a propagação (a evolução temporal) destes estados, nós passaremos à quatzização do campo escalar complexo:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi^* \phi - U(|\phi|^2)$$

Esta Lagrangeana é simétrica sobre: $\phi \rightarrow \phi e^{i\alpha}$ ↳ NÚMERO

que é uma simetria **U(1) Global**. Há várias formas de falar sobre ϕ : dizemos que ϕ é “carregado sobre U(1) Global”, “tem carga de U(1) global” ou se “transforma sobre U(1) global”.

Notem que temos um fator 1/2 faltando aí: $\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \leftrightarrow \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^*$

Isso porque um campo complexo tem dois graus de liberdade e trataremos ϕ e ϕ^* como campos independentes (poderíamos usar $\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Re}(\phi)$ e $\phi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Im}(\phi)$, mas é mais simples trabalhar com ϕ e ϕ^*)

EOM FOR ϕ : $(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi^* = -\frac{\partial U}{\partial \phi}$

FOR ϕ^* : $(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi = -\frac{\partial U}{\partial \phi^*}$

Seguimos um procedimento análogo ao do campo real, só que agora com o dobro dos graus de liberdade:

$$\phi(\vec{x}, t) \equiv \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \left[a_+(\vec{p}, t) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a_-(\vec{p}, t) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right]$$

$$\phi^\dagger(\vec{x}, t) \equiv \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \left[a_+^\dagger(\vec{p}, t) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a_-^\dagger(\vec{p}, t) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right] \quad (\text{eq. 60.1})$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Pi}(\vec{x}, t) &\equiv \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(-i\sqrt{\frac{\omega_p}{2}} \right) \left[a_-(\vec{p}, t) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} - a_+^\dagger(\vec{p}, t) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right] \\ \tilde{\Pi}^\dagger(\vec{x}, t) &\equiv \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(i\sqrt{\frac{\omega_p}{2}} \right) \left[a_+^\dagger(\vec{p}, t) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} - a_-(\vec{p}, t) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right]\end{aligned}\quad (\text{eq. 61.1})$$

Podemos repetir todo o procedimento do campo real para mostrar que que a dependência temporal é a mesma e que:

$$\omega_p = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$$

$$[a_\pm(\vec{p}, t), a_\pm^\dagger(\vec{p}', t)] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}')$$

(qualquer outro comutador é zero)

A carga conservada pela simetria U(1) é (exercício):

$$Q = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\underbrace{a_{+\vec{k}}^\dagger a_{+\vec{k}}}_{N_{+\vec{k}}} - \underbrace{a_{-\vec{k}}^\dagger a_{-\vec{k}}}_{N_{-\vec{k}}} \right]$$

$N_{+\vec{k}}$

$N_{-\vec{k}}$

↳ Número de partículas com carga negativa

↳ Número de partículas com carga positiva

$a_+^\dagger \rightarrow$ cria carga +

$a_-^\dagger \rightarrow$ cria carga -

$a_+ \rightarrow$ aniquila carga +

$a_- \rightarrow$ aniquila carga -

$\phi \rightarrow$ aniquila carga + e cria carga - (de qualquer forma ele diminui a carga em 1)

$\phi^\dagger \rightarrow$ aniquila carga - e cria carga + (de qualquer forma ele aumenta a carga em 1)

Temos dois estados distintos de uma partícula: $|p, +\rangle \sim a_+^\dagger |0\rangle$
 $|p, -\rangle \sim a_-^\dagger |0\rangle$

ambos tem funções de onda de uma partícula, de mesma massa m e cargas opostas. Assim introduzimos o conceito de **antipartícula** e vemos que o mesmo campo complexo descreve tanto a partícula quanto a antipartícula, de forma indissociável (pense quão mais elegante isto é do que a história do mar de Dirac). Ademais, para este campo:

$$\vec{P} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \vec{k} [N_{+\vec{k}} + N_{-\vec{k}}]$$

$$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_k [N_{+\vec{k}} + N_{-\vec{k}}]$$

De forma que o momento e a energia (que é positiva) se comportam como esperaríamos de dois conjuntos de partículas (só a carga é subtraída). O campo real pode ser visto como um caso particular, onde as partículas são a própria antipartícula (já que tem carga zero).

Consideremos agora o objeto:

$\langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle$
 cria um estado em y
 aniquila um estado em x



$\langle q', t' | q, t \rangle$
 $(q, t) \rightarrow (q', t')$

$y^\mu = (t_y, \vec{y}) \rightarrow x^\mu = (t_x, \vec{x})$
 Note que esta é a função de dois pontos da teoria (compare com a pg 21 - aqui os estados "fixos" $|q\rangle$ e $|q'\rangle$ são o vácuo da teoria em um tempo não especificado - que mais tarde veremos ser infinito passado e infinito futuro)

Note que: $\langle q', t' | q, t \rangle = \langle q' | e^{iH(t-t')} | q \rangle$ (pg 15)

O que é o mesmo objeto que calculamos na pg 3:
 $U(t) = \langle \vec{x} | e^{-iHt} | \vec{x}_0 \rangle \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{y} = \vec{x} & y = x_0 \\ t' = t & t = 0 \end{cases}$

E que mostramos ter problemas com probabilidade não nula para propagação fora do cone de luz.

Voltemos por um instante para o campo real: $\phi^+(x) = \phi(x)$

53.3 $\Rightarrow \phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_{\vec{p}} e^{-ipx} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{ipx}) \Big|_{p^0 = E_p}$

$\langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle \sim \langle 0 | (a_{\vec{p}} e^{-ipx} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{ipx}) (a_{\vec{q}} e^{-iqy} + a_{\vec{q}}^\dagger e^{iqy}) | 0 \rangle =$
 $\langle 0 | a_{\vec{p}}^\dagger = 0$ $a_{\vec{q}} | 0 \rangle = 0$

$= \langle 0 | a_{\vec{p}} a_{\vec{q}}^\dagger | 0 \rangle e^{-ipx + iqy}$
 $\hookrightarrow a a^\dagger = [a, a^\dagger] + a^\dagger a$
 $(2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q})$ $\langle 0 | a^\dagger a | 0 \rangle = 0$

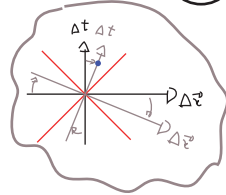
$\langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) e^{-ipx + iqy}$
 $\hookrightarrow \vec{p} = \vec{q} \Rightarrow E_p = E_q$
 $p_0 = q_0$

$D(x-y) \equiv \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip(x-y)} \Big|_{p^0 = E_p}$ (eq. 62.1)

Vamos ver o que acontece com este objeto sobre transformações de Lorentz. Temos que analisar dois casos:

- (1) $(x-y)$ é tipo-tempo $\rightarrow (x-y)^2 > 0$ dentro do cone de luz
- (2) $(x-y)$ é tipo-espaco $\rightarrow (x-y)^2 < 0$ fora do cone de luz

No caso (1) (tipo-tempo), podemos escolher um referencial em que: $\begin{cases} t = t_x = t_y \\ \vec{x} - \vec{y} = 0 \end{cases}$



E fazer a integral, usando: $d^3p = d\Omega p^2 dp$

$$p = \sqrt{E^2 - m^2}$$

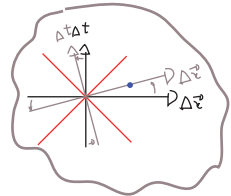
$$\frac{dE}{dp} = \frac{p}{\sqrt{p^2 + m^2}} \Rightarrow \frac{p dp}{\sqrt{p^2 + m^2}} = dE \Rightarrow \frac{p^2 dp}{\sqrt{p^2 + m^2}} = \sqrt{E^2 - m^2} dE$$

$$D(x-y) = \int d\Omega \int \frac{p^2 dp}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-iE_p t} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty dE \sqrt{E^2 - m^2} e^{-iEt} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} e^{-imt}$$

método da fase estacionária (ver material adicional)

A probabilidade é oscilatória (não vai a zero), mas como estamos olhando $\vec{x} = \vec{y}$, isto não é um problema.

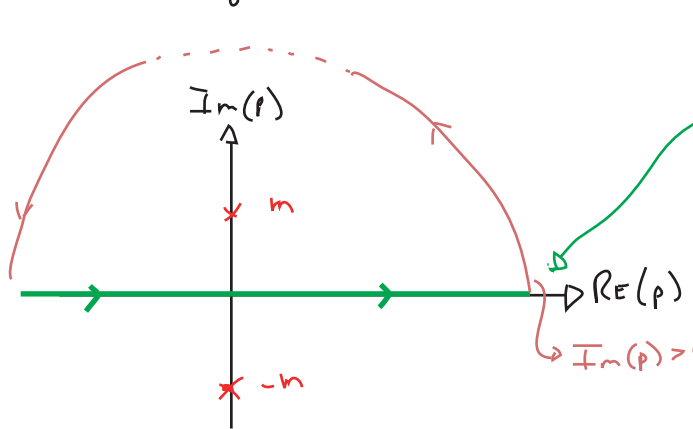
No caso (2) (tipo-espaco), podemos escolher um referencial em que: $\begin{cases} t_x = t_y \\ \vec{x} - \vec{y} = \vec{r} \end{cases}$



Neste caso:

$$D(x-y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}} = 2\pi \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{2E_p (2\pi)^3} \int_{-1}^1 d(\cos\theta) e^{i p r \cos\theta} = 2\pi \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{2E_p (2\pi)^3} \frac{e^{i p r} - e^{-i p r}}{i p r} = \frac{-i}{(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} p dp \frac{e^{i p r}}{\sqrt{p^2 + m^2}}$$

POLOS: $|\vec{p}| = \pm i m$



$$Im(p) > 0 \Rightarrow e^{i p r} = e^{i Re(p) r} e^{-Im(p) r} \rightarrow 0$$

$$D(x-y) = 2\pi i \left(\frac{i}{(2\pi)^2 r} \right) (i m) e^{-m r} = \frac{i m}{4\pi^2 r} e^{-m r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{-m r}$$

(muito fora do cone de luz)

Ops! Parece que temos (qualitativamente) o mesmo problema que antes! Acontece que ainda não definimos apropriadamente os observáveis desta teoria de campos. Será que este problema afeta quantidades observáveis? Veremos em breve que o que realmente importa são comutadores

do tipo: $[\phi(x), \phi(y)]$

(outra forma de pensar é a de que estamos construindo uma teoria quântica e ainda não definimos bem qual tipo de experiência ou observável queremos descrever. Então, por enquanto, estamos apenas verificando quais objetos na teoria violam causalidade ou não, e depois passaremos ao trabalho de mostrar quais destes objetos que aparecem nas grandezas observáveis)

Notemos então que:

$$[\phi(x), \phi(y)] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} \left[(a_{\vec{p}} e^{-ipx} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{ipx}), (a_{\vec{q}} e^{-iqy} + a_{\vec{q}}^\dagger e^{iqy}) \right]$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \left(e^{-ip(x-y)} - e^{-ip(y-x)} \right) = D(x-y) - D(y-x)$$

$e^{i p x + i q y} [a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}^\dagger] + e^{-i p x - i q y} [a_{\vec{p}}^\dagger, a_{\vec{q}}]$

 $(2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q})$ $-(2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q})$

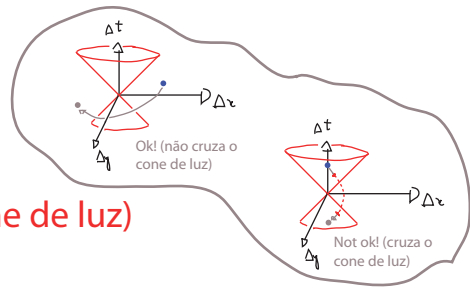
Note que o comutador de dois campos (operadores) é uma função, por isso: $\langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle = \langle 0 | 0 \rangle [\phi(x), \phi(y)]$

Note também que é a primeira vez que estamos falando em comutadores para tempos diferentes, veja a eq. 49.1

Veja que, para separações **tipo-espaço**: $(x-y) = (0, \vec{x} - \vec{y})$ e podemos fazer uma rotação $x-y \rightarrow -(x-y)$ que é uma transformação de Lorentz. Acontece que D é um invariante por transformações de Lorentz e portanto:

$$(x-y)^2 < 0 \rightarrow D(x-y) = D(y-x)$$

$$\therefore [\phi(x), \phi(y)] = 0 \quad \text{(fora do cone de luz)}$$



Por outro lado, para separações **tipo-tempo** temos: $\begin{cases} (x-y) = (t_x - t_y, 0) \\ (y-x) = (t_y - t_x, 0) \end{cases}$

e não há transformação de Lorentz que leve um vetor no outro (de fato seria necessária uma transformação discreta, a inversão temporal), logo:

$$(x-y)^2 > 0 \rightarrow D(x-y) \neq D(y-x)$$

$$\therefore [\phi(x), \phi(y)] \neq 0 \quad \text{(dentro do cone de luz)}$$

Esse resultado é importantíssimo. Ele mostra que, nestes comutadores, a contribuição que causaria violações de causalidade na transição de $x^\mu \rightarrow y^\mu$ é cancelada por uma outra transição na direção oposta $y^\mu \rightarrow x^\mu$ (**inclusive no eixo temporal**). Note também que fizemos esta conta para um campo escalar real, cujas partículas (excitações) são a **própria anti-partícula**, e que a contribuição que caminha na direção contrária também poderia ser lida como uma **solução de frequência negativa, andando na direção certa $x^\mu \rightarrow y^\mu$** .

Para deixar isto mais claro, vamos olhar estes comutadores com mais cuidado.

Propagador de Klein-Gordon

Considere o número complexo: $[\phi(x), \phi(y)] = \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle =$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \left[e^{-i p(x-y)} - e^{+i p(x-y)} \right] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{2E_p} e^{-i p(x-y)} \Big|_{p^0 = E_p} + \frac{1}{-2E_p} e^{-i p(x-y)} \Big|_{p^0 = -E_p} \right]$$

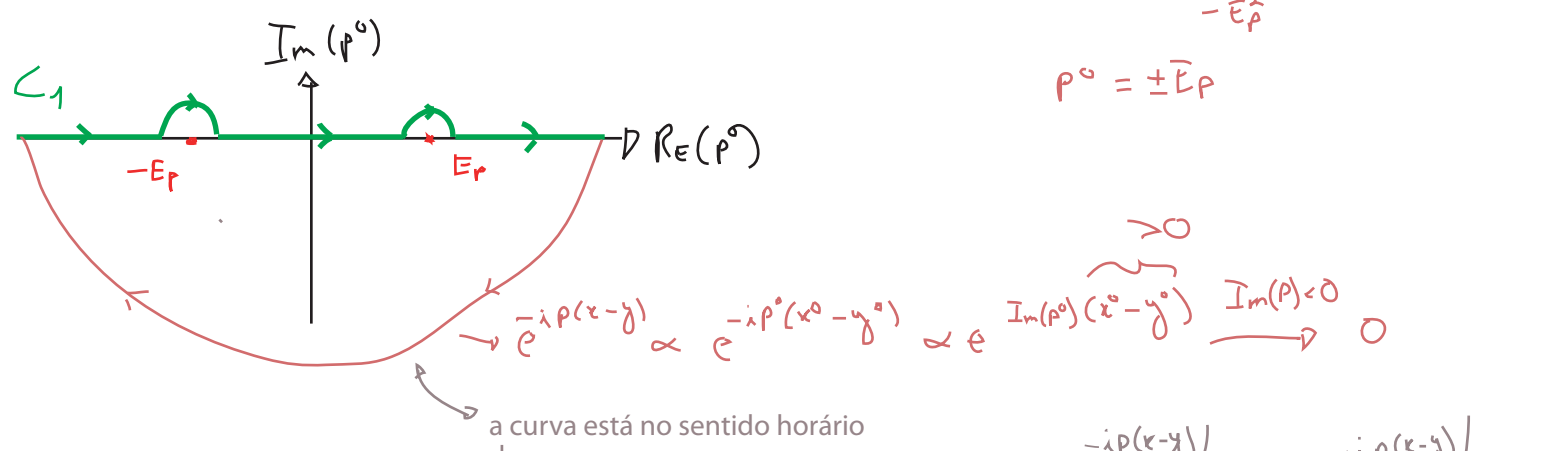
$p^0 = E_p \Rightarrow \bar{p}^0 = -E_p$
 $\bar{p}^0 \Rightarrow -p^0$
 $e^{+i p(x-y)} \Rightarrow e^{-i p(x-y)}$

Transições na mesma direção no tempo
 (em ambos tempos: $e^{-i p^0 (t_x - t_y)}$)

É possível reescrever isto em termos de uma integral em p^0 :

$x^0 > y^0 \Rightarrow [\phi(x), \phi(y)] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int_{C_1} \frac{dp^0}{2\pi i} \frac{-1}{p^2 - m^2} e^{-i p(x-y)}$

POLOS: $(p^0)^2 - \vec{p}^2 - m^2 = 0$
 $-E_p^2$
 $p^0 = \pm E_p$



$\int_{C_1} \frac{dp^0}{2\pi i} \frac{-1}{p^2 - m^2} e^{-i p(x-y)} = - (RES(E_p) + RES(-E_p)) = \frac{1}{2E_p} e^{-i p(x-y)} \Big|_{p^0 = E_p} - \frac{1}{2E_p} e^{+i p(x-y)} \Big|_{p^0 = -E_p}$

$p^2 - m^2 = (p^0)^2 - \vec{p}^2 - m^2 = (p^0)^2 - E_p^2 = (p^0 - E_p)(p^0 + E_p)$

$\frac{-1}{p^0 - E_p} \frac{1}{p^0 + E_p} e^{-i p(x-y)} \Big|_{p^0 = E_p} \Rightarrow -\frac{1}{2E_p} e^{-i p(x-y)} \Big|_{p^0 = E_p}$
 $\frac{-1}{p^0 + E_p} \frac{1}{p^0 - E_p} e^{-i p(x-y)} \Big|_{p^0 = -E_p} \Rightarrow \frac{1}{2E_p} e^{+i p(x-y)} \Big|_{p^0 = -E_p}$

Esta mesma integral $\left(\int_{C_1} \frac{dp^0}{2\pi i} \frac{-1}{p^2 - m^2} e^{-i p(x-y)} \right)$ se calculada para $x^0 < y^0$ dá zero. Isto porque seremos forçados a fechar o contorno por cima, sem pegar nenhum polo.

$e^{-i p(x-y)} \propto e^{-i p^0 (x^0 - y^0)} \propto e^{-Im(p^0)(y^0 - x^0)}$
 $\frac{Im(p^0) > 0}{> 0} \Rightarrow 0$

Assim, definiremos o **propagador retardado**:

$$D_R(x-y) \equiv \Theta(x^0 - y^0) \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \int_{c_1} \frac{dp^0}{2\pi i} \frac{-1}{p^2 - m^2} e^{-i p(x-y)} \quad (\text{eq. 66.1})$$

igualdade garantida pela função θ

$$D_R(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-i p(x-y)} \quad (\text{eq. 66.2})$$

Fazendo uma transformada de Fourier, temos:

$$D_R(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-i p(x-y)} D_R(p) \Rightarrow D_R(p) = \frac{i}{p^2 - m^2}$$

Considere o operador de Klein-Gordon: $\mathcal{O}_{KG}(x) = (\square^2 + m^2) = (d^\mu d_\mu + m^2)$

mostramos que (eq 50.1) no espaço dos (tri-)momentos: $\mathcal{O}_{KG}(t, \vec{p}) = \left(\frac{d^2}{dt^2} + \vec{p}^2 + m^2 \right)$

de forma análoga, poderíamos mostrar que: $\mathcal{O}_{KG}(p) = (p^2 - m^2)$

Vemos então que: $\mathcal{O}_{KG}(p) D_R(p) = i$ (eq. 66.3)

Voltando para as posições:

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-i p(x-y)} \mathcal{O}_{KG}(p) D_R(p) = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-i p(x-y)} \delta(x-y)$$

$$(p^2 - m^2) e^{-i p(x-y)} = (-d_\mu d^\mu - m^2) e^{-i p(x-y)}$$

$$(d_\mu d^\mu + m^2) D_R(x-y) = -i \delta(x-y) \quad (\text{eq. 66.4})$$

(quer sejam derivadas em x ou y, o resultado é o mesmo)

O que mostra que este **propagador retardado** é uma **função de Green** do operador de KG.

De forma totalmente análoga, poderíamos definir o **propagador avançado** usando um contorno que passasse abaixo de ambos os polos. Este seria zero para $x^0 > y^0$ e seria também uma função de Green do operador de KG.

Propagador de Feynman

Consideremos agora uma forma diferente de definir o caminho no plano complexo. Ao invés de deformar o caminho no eixo real de p^0 , deslocamos um pouco os polos. Além disso passamos "por cima" (eixo imaginário positivo) de um deles e "por baixo" do outro.



$$D_F(x-y) \equiv \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-i p(x-y)} \quad (\text{eq. 67.1})$$

o caminho para integração em p^0 é simplesmente o eixo real
 a informação da posição dos polos em relação ao caminho está aqui

não é o mesmo ϵ , mas é um número pequeno > 0

$$p^2 - m^2 + i\epsilon = (p^0)^2 - \vec{p}^2 - m^2 + i\epsilon = (p^0 + \underbrace{E_p}_{E_p} - \underbrace{i\frac{\epsilon}{2}}_{\frac{\epsilon}{2}}) (p^0 - \underbrace{E_p}_{E_p} + \underbrace{i\frac{\epsilon}{2}}_{\frac{\epsilon}{2}})$$

Assim como no caso anterior, ao fazer a integral em p^0 , temos que decidir como fechar o caminho de integração.

- $x^0 > y^0 \Rightarrow e^{-i p(x-y)} \sim e^{-i p^0(x^0 - y^0)}$ $\xrightarrow{Im(p^0) \rightarrow -\infty}$ \bigcirc Fechamos por baixo (C_-)
- $x^0 < y^0 \Rightarrow e^{-i p(x-y)} \sim e^{-i p^0(x^0 - y^0)}$ $\xrightarrow{Im(p^0) \rightarrow +\infty}$ \bigcirc Fechamos por cima (C_+)

$D_F(x-y) = 2\pi i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{i}{-2E_p + i\epsilon} e^{-i p(x-y)} \Big|_{p^0 = -E_p} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-i p^0(x^0 - y^0) + i \vec{p}(\vec{x} - \vec{y})} \Big|_{p^0 = -E_p} =$
 $= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{+i E_p(x^0 - y^0) - i \vec{p}(\vec{x} - \vec{y})} \Big|_{p^0 = \bar{E}_p} = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-i p(y-x)} \Big|_{p^0 = \bar{E}_p} = D(y-x)$
 $D_F(x-y) = -2\pi i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{i}{2E_p - i\epsilon} e^{-i p(x-y)} \Big|_{p^0 = E_p} = D(x-y)$ (eq. 62.1)

$$\therefore D_F(x-y) = \Theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle + \Theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \phi(y) \phi(x) | 0 \rangle$$

importante notar que o propagador de Feynman não é causal (ele é muito útil, mas não estará diretamente ligado aos observáveis da teoria), isto é uma correlação e não uma propagação de informação.

$$D_F(x-y) = \langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | 0 \rangle \quad (\text{eq. 68.1})$$

$$(\not{\partial}^n \not{\partial}_n + m^2) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-i p(x-y)} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{(i)(-p^2 + m^2)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-i p(x-y)}$$

$$(\not{\partial}^n \not{\partial}_n + m^2) D_F(x-y) = -i \not{\Delta}(x-y) \quad (\text{eq. 68.2})$$

E o campo escalar complexo? Muitas das expressões acima são diretamente generalizáveis e não adicionam nada de novo. A questão da causalidade, no entanto, é interessante. No caso do campo complexo:

$\phi \rightarrow$ aniquila carga + e cria carga -

$\phi^\dagger \rightarrow$ aniquila carga - e cria carga +

Os comutadores de interesse serão: $[\phi(x), \phi^\dagger(y)]$

$$\int \begin{cases} \langle 0 | \phi(x) \phi^\dagger(y) | 0 \rangle & \begin{array}{c} + \\ \rightarrow \\ y \quad x \end{array} \\ -\langle 0 | \phi^\dagger(y) \phi(x) | 0 \rangle & \begin{array}{c} \rightarrow \\ x \quad y \\ - \end{array} \end{cases}$$

O resultado é que teremos um termo representando uma partícula de carga positiva fazendo a transição de $y^\mu \rightarrow x^\mu$ menos um outro representando uma carga negativa na direção oposta $x^\mu \rightarrow y^\mu$ (que também pode ser interpretada como uma carga positiva e frequência negativa andando na direção certa $y^\mu \rightarrow x^\mu$). Estas duas contribuições se cancelam exatamente fora do cone de luz, mas não dentro dele. Isto deixa bem claro que a teoria precisa de antipartículas com a mesma massa e carga oposta (na verdade todos os números quânticos) para ser causal.

O próximo passo é tratar o campo escalar na presença de um potencial, o campo escalar interagente, mas antes vamos ver como obtemos observáveis desta teoria.

