

Seções de Choque e Matriz S

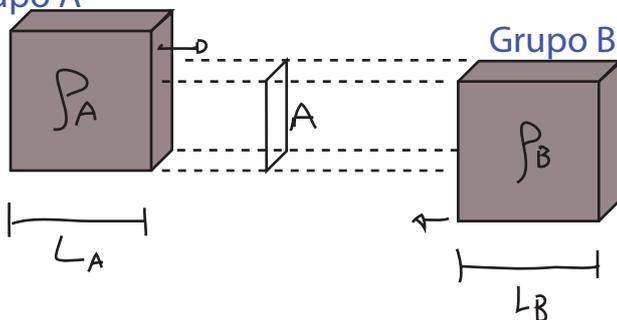
(Nastase 19; Peskin 4.5)

Chegamos em fim ao ponto em que formalizaremos a conexão entre as funções de n-pontos das teorias de campos com espalhamentos envolvendo estados assintóticos com n partículas. Começamos com a idéia por trás do que esperamos observar em experimentos envolvendo partículas ou quasi-partículas:

Seção de Choque

A situação que temos em mente é um espalhamento entre dois “amontoados” de partículas (ou quasi-partículas, enfim, excitações do campo), quer seja um projétil atirado em um alvo ou a colisão de dois objetos (o que é o mesmo, dependendo de referencial). Cada um destes grupos tem um número grande de partículas e dimensões finitas:

Grupo A

 $\rho_A, \rho_B \rightarrow$ densidade numéricas $A \rightarrow$ área de impacto $L_A, L_B \rightarrow$ comprimento ao longo da direção do impacto

Assumindo que ambos os grupos são rarefeitos e que as interações internas são desprezíveis, é razoável dizer que o número total de colisões (eventos) é proporcional a todas as grandezas definidas acima:

$$\# \text{EVENTOS} \propto \rho_A L_A \rho_B L_B A$$

A esta “constante” de proporcionalidade damos o nome de **seção de choque**:

$$\sigma \equiv \frac{\# \text{EVENTOS}}{\rho_A L_A \rho_B L_B A} \quad (\text{eq. 69.1})$$

Que tem dimensão de área: $[\sigma] = \frac{1}{L^{-3} L L^{-3} L L^2} = L^2$

E pode ser interpretada como o “tamanho de interação” da partícula, ou seja, a área em torno do “alvo” na qual um “projétil” seria espalhado (note, no entanto, que isto depende também do projétil). Outra forma de ver como devemos definir a seção de choque é pensando em um modelo clássico, o espalhamento por um potencial $V(r) = \frac{Ze^2}{r}$

Neste caso temos apenas um alvo, pontual, produzindo o potencial. Se temos um feixe de partículas sendo lançado neste alvo o número de espalhamentos por unidade de tempo é proporcional ao fluxo:

$$\text{Fluxo} \leftarrow \phi_0 = \frac{\Delta N_{\text{in}}}{A \cdot \Delta t} \quad \begin{array}{l} \rightarrow \# \text{ partículas incidentes} \\ \rightarrow \text{unidade. de tempo} \\ \rightarrow \text{unidade. de área} \end{array} \quad \Delta N_{\text{EV}} \leftrightarrow \# \text{ partículas espalhadas (eventos)}$$

$$\frac{\Delta N_{EV}}{\Delta t} \propto \phi_0$$

E a proporcionalidade entre os dois vai ser, de novo, a seção de choque:

$$\sigma = \frac{\Delta N_{EV} / \Delta t}{\phi_0} = \frac{\Delta N_{EV}}{\underbrace{\Delta N_{IN} / A}_{n_B \text{ densidade por área}}} = \frac{\Delta N_{EV}}{n_B} \quad (\text{eq. 176.1})$$

(unidades de área, consistentemente)

Também podemos escrever:

$$\phi_0 = \frac{\Delta N_{IN}}{A \cdot \Delta t} = \frac{\rho_B (\underbrace{v \Delta t}_{\text{velocidade relativa}}) A}{A \cdot \Delta t} = \rho_B \cdot v$$

volume incidente em um tempo Δt

Podemos então considerar o caso de N alvos independentes onde $N = \int_A L_A A$ então a seção de choque **por alvo** (e essa é a definição de seção de choque) é:

$$\sigma = \frac{\Delta N_{EV} / \Delta t}{\phi_0 N} = \frac{\Delta N_{EV}}{\underbrace{\rho_B (v \Delta t)}_{L_B} \rho_A L_A A} = \frac{\Delta N_{EV}}{\rho_B L_B \rho_A L_A A} \quad \text{como vimos antes}$$

A seção do choque definida acima é chamada de **Seção de Choque Total**, pois mede a intensidade do espalhamento sem colocar condições sobre a energia das partículas espalhadas nem o seu momento (o que inclui a direção em que foram espalhadas). Tipicamente tanto a energia quanto o momento (ou no mínimo a direção) são medidos em experimentos e muita informação física pode ser tirada daí sobre a interação que está gerando os espalhamentos. Para um dado modelo estamos interessados em saber por exemplo, qual é a taxa de espalhamentos em uma certa direção, ou para estados finais com energia e momento acima de um certo valor. A grandeza que nos permite obter estas distribuições é a **Seção de Choque Diferencial**:

$$\frac{d\sigma}{d^3p_1 \dots d^3p_n}$$

↪ momentos dos estados finais

O exemplo mais útil é o espalhamento $2 \rightarrow 2$ (duas partículas iniciais e duas finais, elástico ou inelástico). Nesse caso temos dois estados finais, logo dois **tri-momentos**¹. Tenho quatro deltas de Dirac (da conservação total de momento e energia), o que me deixa com duas variáveis independentes, que posso escolher como sendo dois ângulos θ (de 0 a π em relação ao momento inicial / direção do feixe) e ϕ (azimutal, vai de 0 a 2π em torno do momento inicial). Estes dois ângulo definem um ângulo sólido Ω , e é comum definir:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}$$

¹Está embutida a suposição (razoável) de que os estados finais estão "on-shell" (vale a relação relativística entre momento e energia), de forma que a energia não é livre uma vez que conhecemos o momento. Ainda precisamos provar que os estados assintóticos na teoria interagente têm essa propriedade.

Taxa de Decaimento

Outro exemplo de interesse é o de processos $1 \rightarrow n$, onde começamos com uma partícula

instável que decaí em um numero maior de outras partículas. Dada uma amostra de partículas deste tipo, o número de decaimentos por unidade de tempo vai ser proporcional ao número de partículas na amostra: (mais uma vez assumindo que a amostra seja rarefeita ou com pouca interação, para evitar reações em cadeia)

$$\frac{\# \text{DECAIMENTOS}}{\Delta t} \propto \# \text{PARTICULAS}$$

Definimos então:

$$\Gamma \equiv \frac{\# \text{DECAIMENTOS}}{\Delta t \# \text{PARTICULAS}} = \frac{dN}{N dt}$$

Taxa (ou Largura) de Decaimento
(eq. 71.1)

Uma mesma partícula pode ter vários decaimentos possíveis, como larguras diferentes em cada um destes canais. A vida média da partícula, neste caso, é dada por:

$$\tau = \frac{1}{\sum_i \Gamma_i}$$

(eq. 71.2)
soma sobre os canais

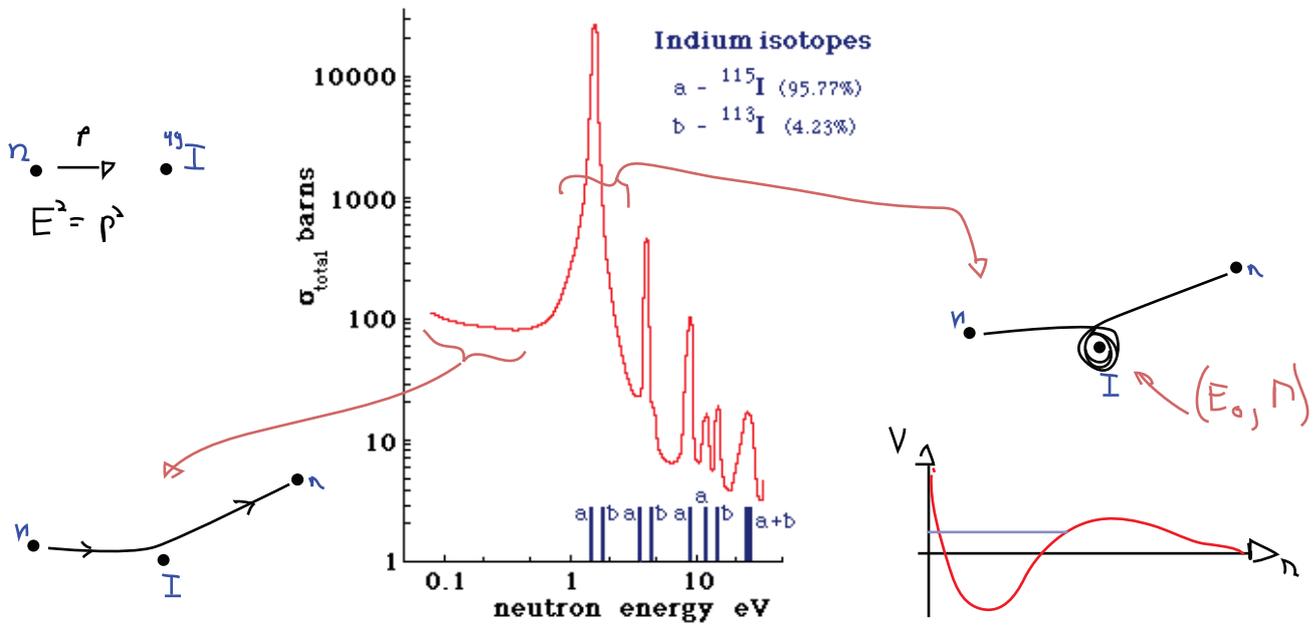
Sabemos que estados atômicos ou nucleares instáveis (ressonâncias) aparecem, segundo a MQ não relativística, como distribuições de Breit-Wigner no espalhamento, cuja amplitude é:

$$f(E) \propto \frac{1}{E - E_0 + i\Gamma/2}$$

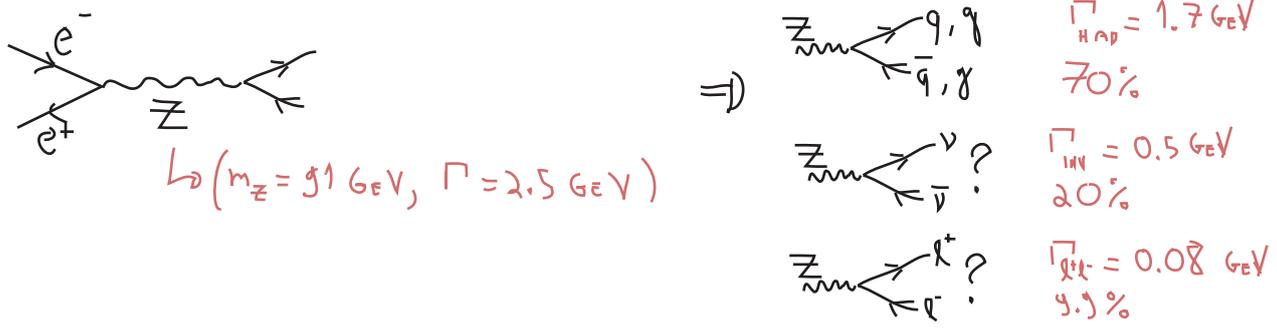
e (densidade de) probabilidade:

$$\sigma \propto \frac{1}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}$$
 Distribuição de Breit-Wigner
(eq. 71.3)

energia do espalhamento no centro de massa Pico da distribuição Largura



Em espalhamentos relativísticos o mesmo ocorre, as partículas iniciais podem se combinar para formar estados instáveis, que então decaem em outros, por exemplo:



Na amplitude de espalhamento isso vai aparecer como uma generalização relativística da distribuição de Breit-Wigner, lembrando que uma partícula em movimento relativístico vai ter uma taxa de decaimento (por conta da dilatação temporal): $\frac{m}{E_p} \Gamma$

$$\frac{1}{p^2 - m^2 + i m \Gamma} \approx \frac{1}{2 E_p (p^0 - E_p + \frac{i m}{E_p} \frac{\Gamma}{2})}$$

$p^2 \sim -m^2$
 $p^0 \sim E_p$ distribuição perto do pico

$$p^2 - m^2 = (p^0)^2 - \frac{|\vec{p}|^2 - m^2}{-E_p^2} = \underbrace{(E_p + p^0)}_{\sim 2E_p} (p^0 - E_p)$$

A matriz S

Começamos o cálculo do espalhamento definindo os estados inicial e final.

Estados iniciais: consideramos um número finito de pacotes que, em $t = -\infty$, estão isolados entre si e tem momento definido. Estes estados, definidos na representação de Heisenberg, são chamados de **in-states**:

$$|\{ \vec{p}_i \} \rangle_{in}$$

Para tempos finitos $-T < t < +T$, estes pacotes de onda vão se sobrepor e interagir (elastica ou inelasticamente) dando origem a um outro conjunto de pacotes de onda que se afastam e acabam por ficar mutuamente isolados. Definiremos estes estados em $t = +\infty$, e os chamamos de **out-states**:

$$|\{ \vec{p}_i \} \rangle_{out}$$

O conjunto de todos possíveis estados in (out) é completo:

$$\sum_{in} |\{ \vec{p}_i \} \rangle_{in} \langle \{ \vec{p}_i \} |_{in} = \sum_{out} |\{ \vec{p}_i \} \rangle_{out} \langle \{ \vec{p}_i \} |_{out} = 1$$

O que quer que podemos expandir um destes estados em função do conjunto de outros.

O que queremos saber é (duas partículas iniciais, n finais):

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots | \vec{k}_A, \vec{k}_B \rangle_{\text{in}} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \langle \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots; T | \vec{k}_A, \vec{k}_B; -T \rangle_{\text{in}} = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \langle \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots | e^{-iHT} | \vec{k}_A, \vec{k}_B \rangle_{\text{in}} \quad (\text{eq. 73.1}) \end{aligned}$$

(podemos tomar T como o tempo em que os dois quadros são iguais)

Com isso, definimos a **matriz S**:

$$\langle \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots | S | \vec{k}_A, \vec{k}_B \rangle \equiv \langle \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots | \vec{k}_A, \vec{k}_B \rangle_{\text{in}} \quad (\text{eq. 73.2})$$

Vamos então, definir os pacotes de onda. O caso de uma partícula é trivial, pois ela está sempre isolada, então:

$$|\vec{p}\rangle_{\text{in}} = |\vec{p}\rangle_{\text{out}} = |\vec{p}\rangle = \sqrt{2E_p} \alpha_p^+ |0\rangle$$

↳ teoria livre apenas

$$|\phi\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_k}} \phi(\vec{k}) |\vec{k}\rangle \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle \phi | \phi \rangle = 1 \\ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |\phi(\vec{k})|^2 = 1 \end{array} \right.$$

E podemos escolher a distribuição de momentos, por ex.: $\phi(\vec{k}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$

No caso de duas partículas temos que tomar cuidado com a possibilidade de que, mesmo que elas "colidam" (interajam), os centros das duas distribuições espaciais nunca tenham se encontrado.

$$|\phi_A \phi_B\rangle_{\text{in}} = \int \frac{d^3k_A}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k_B}{(2\pi)^3} \frac{\phi_A(\vec{k}_A) \phi_B(\vec{k}_B)}{\sqrt{2E_A} \sqrt{2E_B}} e^{-i\vec{k}_A \cdot \vec{k}_B} |\vec{k}_A, \vec{k}_B\rangle_{\text{in}} \quad (\text{eq. 73.3})$$

↳ para deixar a possível separação \vec{b} entre os pacotes explícita. \vec{b} , transversa a direção do impacto, é o **parâmetro de impacto**

Os estados finais são definidos da forma usual:

$$\langle \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots | = \prod_k \int \frac{d^3p_k}{(2\pi)^3} \frac{\phi_k(p_k)}{\sqrt{2E_k}} \langle \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots | \quad (\text{eq. 73.4})$$

Os elementos da matriz S serão dados por: $S_{\alpha\beta} = \langle \beta_{\text{out}} | \alpha_{\text{in}} \rangle$

As equações 73.1 e 73.2 mostram que S é um operador de evolução, portanto devemos **exigir**:

$$S S^\dagger = S^\dagger S = 1$$

Mas em S está também contida a possibilidade das partículas iniciais não interagirem, de forma que os estado final seja igual ao inicial, ou seja S contém a identidade. Para separar esses eventos dos espalhamentos propriamente ditos, definimos:

$$S \equiv 1 + i T \quad (\text{eq. 74.1})$$

↳ puramente convencional

Além disso, sabemos que o momento e a energia totais se conservam, o que é implementado por meio de uma delta de Dirac. Definimos então o **Elemento de Matriz Invariante**:

$$\langle p_1 p_2 \dots | i T | k_A, k_B \rangle \equiv (2\pi)^4 \delta^4(k_A + k_B - \sum p_k) i \mathcal{M}(k_A, k_B \rightarrow p_k) \quad (\text{eq. 74.2})$$

Fórmula de Redução de LSZ

A formula que relaciona os elementos da matriz S (o que queremos calcular) com as funções de Green da teoria (o que sabemos calcular) é chamada de Fórmula de Redução de LSZ. Ela será provada em TQCII, aqui nos limitaremos a enunciá-la. Dada a função de Green no espaço dos momentos:

$$\tilde{G}_{n+m}(p_i^N, k_j^N) = \int \prod_{i=1}^n d^4x_i e^{i p_i x_i} \int \prod_{j=1}^m d^4y_j e^{-i k_j y_j} \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \phi(y_1) \dots \phi(y_m) \} | \Omega \rangle$$

↳ # partículas iniciais
↳ # partículas finais

temos:

$$\langle \{ p_i \}_n | \{ k_j \}_m \rangle_{in} = \lim_{\substack{p_i^2 \rightarrow m_i^2 \\ k_j^2 \rightarrow m_j^2}} \frac{1}{(i\sqrt{Z})^{m+n}} \prod_{i=1}^n (p_i^2 - m_i^2 + i\epsilon) \prod_{j=1}^m (k_j^2 - m_j^2 + i\epsilon) \tilde{G}_{n+m}(p_i^N, k_j^N)$$

(eq. 74.3)

veremos que as funções de Green no espaço dos momentos têm um propagador para cada linha externa. Estes serão cancelados por **estes termos** entre parênteses, que nada mais são que os inversos dos propagadores (no espaço dos momentos). Essencialmente vemos que o elemento da matriz S se trata do resíduo da função de Green quando todos os momentos das partículas espalhadas (estados assintóticos) estão em seus polos.

Note que esta expressão é para a função de Green completa, da teoria interagente e não da livre, em TQCII veremos que este fator Z que aparece aí está ligado às correções ao propagador livre. As massas também não são as mesmas que aparecem na teoria livre e sim as massas corrigidas pela interação do campo (massas físicas). A função de Green completa de 2 pontos, próximo ao polo, tem a forma:

$$G_2^c(p) = \int d^4x e^{-i p x} \langle \Omega | T \{ \phi(x), \phi(y) \} | \Omega \rangle \sim \frac{i Z}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$