

As equações 73.1 e 73.2 mostram que S é um operador de evolução, portanto devemos exigir:

$$S S^\dagger = S^\dagger S = 1$$

Mas em S está também contida a possibilidade das partículas iniciais não interagirem, de forma que os estado final seja igual ao inicial, ou seja S contém a identidade. Para separar esses eventos dos espalhamentos propriamente ditos, definimos:

$$S \equiv 1 + i T \quad (\text{eq. 74.1})$$

↳ puramente convencional

Além disso, sabemos que o momento e a energia totais se conservam, o que é implementado por meio de uma delta de Dirac. Definimos então o Elemento de Matriz Invariante:

$$\langle p_1 p_2 \dots | i T | k_A, k_B \rangle \equiv (2\pi)^4 \delta^4(k_A + k_B - \sum p_k) i \mathcal{M}(k_A, k_B \rightarrow p_k) \quad (\text{eq. 74.2})$$

Fórmula de Redução de LSZ

A formula que relaciona os elementos da matriz S (o que queremos calcular) com as funções de Green da teoria (o que sabemos calcular) é chamada de Fórmula de Redução de LSZ. Ela será provada em TQCII, aqui nos limitaremos a enunciá-la. Dada a função de Green no espaço dos momentos:

$$\tilde{G}_{n+m}(p_i^N, k_j^N) = \int \prod_{i=1}^n d^4x_i e^{i p_i x_i} \int \prod_{j=1}^m d^4y_j e^{-i k_j y_j} \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \phi(y_1) \dots \phi(y_m) \} | \Omega \rangle$$

↳ # partículas iniciais
↳ # partículas finais

temos:

$$\langle \{ p_i \}_n | \{ k_j \}_m \rangle_{in} = \lim_{\substack{p_i^2 \rightarrow m_i^2 \\ k_j^2 \rightarrow m_j^2}} \frac{1}{(i\sqrt{Z})^{m+n}} \prod_{i=1}^n (p_i^2 - m_i^2 + i\epsilon) \prod_{j=1}^m (k_j^2 - m_j^2 + i\epsilon) \tilde{G}_{n+m}(p_i^N, k_j^N)$$

(eq. 74.3)

veremos que as funções de Green no espaço dos momentos têm um propagador para cada linha externa. Estes serão cancelados por estes termos entre parênteses, que nada mais são que os inversos dos propagadores (no espaço dos momentos). Essencialmente vemos que o elemento da matriz S se trata do resíduo da função de Green quando todos os momentos das partículas espalhadas (estados assintóticos) estão em seus polos.

Note que esta expressão é para a função de Green completa, da teoria interagente e não da livre, em TQCII veremos que este fator Z que aparece aí está ligado às correções ao propagador livre. As massas também não são as mesmas que aparecem na teoria livre e sim as massas corrigidas pela interação do campo (massas físicas). A função de Green completa de 2 pontos, próximo ao polo, tem a forma:

$$G_2^c(p) = \int d^4x e^{-i p x} \langle \Omega | T \{ \phi(x), \phi(y) \} | \Omega \rangle \sim \frac{i Z}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Em contraste com o propagador da teoria livre:

$$G_2(p) = \frac{i}{p^2 - \underbrace{m_0^2}_{\text{massa "nua" (a que aparece na Lagrangeana, e que é física na teoria livre)} + i\epsilon}$$

O que significa que, em primeira aproximação: $\begin{cases} Z = 1 \\ m = m_0 \end{cases}$
 (nível árvore, que explicaremos adiante)

Com esta fórmula conseguimos obter os elementos M a partir das funções de Green. Resta saber como obtemos σ . A probabilidade de, dado um estado inicial $|\phi_A \phi_B\rangle$, produzirmos n partículas com momentos no intervalo $d^3p_1 \dots d^3p_n$ é:

$$P(A, B \rightarrow 1, 2, \dots, n) = \left(\frac{\prod d^3p_k}{f (2\pi)^3 dE_k} \right) \Big|_{\text{OUT}} \langle p_1, p_2, \dots, p_n | \phi_A \phi_B \rangle_{\text{IN}}^2$$

↳ normalização

Suponha que tenhamos apenas uma partícula A (alvo) e um monte de partículas B, com n_B partículas por unidade de área transversa, e diferentes parâmetros de impacto b . O número de partículas espalhadas é:

$$\Delta N_{ev} = \sum_{i = \text{partículas B incidentes}} P_i = \int d^2b n_B P(\vec{b}) = n_B \int d^2b P(\vec{b})$$

↳ distribuição uniforme

Então, de 70.1, temos:

$$d\sigma = \frac{\Delta N_{ev}}{n_B} = \int d^2b P(\vec{b}) \quad (\text{eq. 75.1})$$

↳ porque estamos considerando a versão infinitesimal

$$\langle \{p_k\} | \phi_A \phi_B \rangle \langle \{p_k\} | \phi_A \phi_B \rangle^*$$

↳ d^3k_A, d^3k_B ↳ d^3_{2A}, d^3_{2B}

$$d\sigma = \int d^2b \left(\frac{\prod d^3p_k}{f (2\pi)^3 dE_k} \right) \Big|_{\text{OUT}} \langle \{p_k\} | \phi_A \phi_B \rangle_{\text{IN}}^2 =$$

$$\int d^2b \left(\frac{\prod d^3p_k}{f (2\pi)^3 dE_k} \right) \prod_{i=A,B} \int \frac{d^3k_i}{(2\pi)^3} \frac{\phi_i(\vec{k}_i)}{\sqrt{2E_i}} \int \frac{d^3\bar{k}_i}{(2\pi)^3} \frac{\phi_i^*(\vec{k}_i)}{\sqrt{2E_i}} e^{i\vec{b} \cdot (\vec{k}_B - \vec{k}_B)}$$

(eq. 73.3)

$$\times \langle \{p_k\} | \{k_i\} \rangle_{\text{IN}} \langle \{p_k\} | \{\bar{k}_i\} \rangle_{\text{IN}}^* =$$

(eq. 75.2)

Podemos fazer a integral no parâmetro de impacto:

$$\int d^2b e^{i\vec{b} \cdot (\vec{k}_B - \vec{k}_B)} = (2\pi)^2 \delta^{(2)}(\vec{k}_B - \vec{k}_B)$$

↳ $\vec{b} = b^\perp$

E usar a definição dos elementos de matriz:

$$\langle \text{OUT} | \{P_f\} | \{k_i\} \rangle_{\text{IN}} = i \mathcal{M}(k_A, k_B \rightarrow \{P_f\}) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum k_i - \sum P_f)$$

só queremos a parte não trivial ($\neq \hat{1}$)

$$\langle \text{OUT} | \{P_f\} | \{\bar{k}_i\} \rangle_{\text{IN}}^* = -i \mathcal{M}^*(\bar{k}_A, \bar{k}_B \rightarrow \{P_f\}) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum \bar{k}_i - \sum P_f)$$

A integral nos \bar{k} , fica (levando em conta as deltas vindo da integração no parâmetro de impacto e do elemento de matriz):

$$\int \frac{d^3 \bar{k}_A}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \bar{k}_B}{(2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum \bar{k}_i - \sum P_f) (2\pi)^3 \delta^{(4)}(k_B^\perp - k_A^\perp) =$$

$$d^3 k_i = d^2 k_i^\perp d k_i^\parallel \quad \delta^{(4)}(\sum \bar{k}_i - \sum P_f) = \delta^{(4)}(k_A^\perp + k_B^\perp - \sum P_f^\perp) \delta(k_A^\parallel + k_B^\parallel - \sum P_f^\parallel) \delta(E_A + E_B - \sum E_f)$$

$$= \int d^2 k_A^\perp d k_A^\parallel d k_B^\parallel \delta^{(4)}(k_A^\perp + k_B^\perp - \sum P_f^\perp) \delta(k_A^\parallel + k_B^\parallel - \sum P_f^\parallel) \delta(E_A + E_B - \sum E_f) \Big|_{k_B^\perp = k_A^\perp} =$$

k_A^\perp (imposto pela outra delta, de $\langle \text{OUT} | \{P_f\} | \{k_i\} \rangle_{\text{IN}} \propto \delta(\sum k_i - \sum P_f)$)

$$= \int d k_A^\parallel d k_B^\parallel \delta(k_A^\parallel + k_B^\parallel - \sum P_f^\parallel) \delta(E_A + E_B - \sum E_f) \Big|_{k_i^\perp = k_i^\perp} = \int d k_A^\parallel \delta(\sqrt{k_A^{\parallel 2} + m_A^2} + \sqrt{k_B^{\parallel 2} + m_B^2} - \sum E_f) =$$

$k_i^\perp = k_i^\perp$
 $k_B^\parallel = \sum P_f^\parallel - k_A^\parallel$

$$\frac{d E_A}{d k_A^\parallel} = \frac{k_A^\parallel}{E_A} \quad \frac{d E_B}{d k_B^\parallel} = \frac{k_B^\parallel}{E_B} = - \frac{d E_B}{d k_A^\parallel}$$

$k_B^\parallel = \sum P_f^\parallel - k_A^\parallel$

$$\delta(\bar{E}_A + \bar{E}_B - \sum E_f) = \left| \frac{d}{d k_A^\parallel} (\bar{E}_A + \bar{E}_B) \right|^{-1} \Big|_{\bar{E}_A + \bar{E}_B = \sum E_f} = \left| \frac{k_A^\parallel}{E_A} - \frac{k_B^\parallel}{E_B} \right|^{-1} \Big|_{\bar{E}_A + \bar{E}_B = \sum E_f}$$

$\nu_A \quad \nu_B$

$$= \frac{1}{|\nu_A - \nu_B|} \Big|_{\substack{\bar{E}_A + \bar{E}_B = \sum E_f \\ k_i^\perp = k_i^\perp \\ k_B^\parallel = \sum P_f^\parallel - k_A^\parallel}}$$

Lembrando que em todo resto do integrando temos que impor as três condições obtidas:

- (1) $\bar{E}_A + \bar{E}_B = \sum E_f$
- (2) $k_i^\perp = k_i^\perp$
- (3) $k_B^\parallel = \sum P_f^\parallel - k_A^\parallel$

E que ainda temos outra delta de Dirac:

$$\delta(\sum k_i - \sum P_f) = \delta(k_A^\parallel + k_B^\parallel - \sum P_f^\parallel) \delta(k_A^\perp + k_B^\perp - \sum P_f^\perp) \delta(E_A + E_B - \sum E_f)$$

(4) (5)

vemos que de fato (unindo as condições (1) a (3) com a delta acima):

$$(3) + (4) \Rightarrow k_A^z + k_B^z = \bar{k}_A^z + \bar{k}_B^z \Rightarrow (6) \bar{k}_B^z = k_A^z + k_B^z - \bar{k}_A^z$$

$$(1) + (5) \Rightarrow \bar{E}_A + \bar{E}_B = E_A + E_B$$

$$\sqrt{k_A^z{}^2 + k_A^{\perp}{}^2 + m_A^2} + \sqrt{k_B^z{}^2 + k_B^{\perp}{}^2 + m_B^2} = \sqrt{\bar{k}_A^z{}^2 + k_A^{\perp}{}^2 + m_A^2} + \sqrt{\bar{k}_B^z{}^2 + k_B^{\perp}{}^2 + m_B^2}$$

$$(6) \Rightarrow (6a) \bar{k}_B^z{}^2 = k_A^z{}^2 + k_B^z{}^2 + \bar{k}_A^z{}^2 + 2k_A^z k_B^z - 2k_A^z \bar{k}_A^z - 2k_B^z \bar{k}_A^z$$

$$(E_A + E_B)^2 = (\bar{E}_A + \bar{E}_B)^2 \quad (6a)$$

$$k_A^z{}^2 + k_B^z{}^2 + 2E_A E_B = \bar{k}_A^z{}^2 + \bar{k}_B^z{}^2 + 2\bar{E}_A \bar{E}_B$$

$$\dots + \bar{k}_A^z k_B^z + A k_B^z \quad (6)$$

$$2\sqrt{(k_A^z{}^2 + A^2)(k_B^z{}^2 + B^2)} = 2k_A^z k_B^z - 2k_A^z \bar{k}_A^z - 2k_B^z \bar{k}_A^z + 2\sqrt{(k_A^z{}^2 + A^2)(\bar{k}_B^z{}^2 + B^2)}$$

$$2(B-A)k_A^z = 2(B-A)\bar{k}_A^z \xrightarrow{+B, A} \boxed{k_A^z = \bar{k}_A^z} \quad (7)$$

$$(7) + (6) \Rightarrow \boxed{k_B^z = \bar{k}_B^z \quad E_A = \bar{E}_A \quad E_B = \bar{E}_B} \quad (8)$$

Voltando a $d\sigma$:

$$d\sigma = \left(\prod \frac{d^3 p_k}{(2\pi)^3} \right) \prod_{i=A,B} \int \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3} \frac{|\phi_i(\vec{k}_i)|^2}{2E_i} \frac{1}{|v_A - v_B|} |\mathcal{M}(p_A, p_B \rightarrow \{p_k\})|^2 (2\pi)^4 \delta^4\left(\sum_{A,B} k_i - \sum p_k\right) \quad (\text{eq. 77.1})$$

Especializando para o caso em que as distribuições de momento são estreitas:

$$|\phi_A(\vec{k}_A)|^2 \sim (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k}_A - \vec{p}_A)$$

$$|\phi_B(\vec{k}_B)|^2 \sim (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k}_B - \vec{p}_B)$$

(na verdade uma distribuição estreita, mas de largura finita)

temos:

$$d\sigma = \frac{1}{2E_A 2E_B |v_A - v_B|} \left(\prod \frac{d^3 p_k}{(2\pi)^3} \right) |\mathcal{M}(p_A, p_B \rightarrow \{p_k\})|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_B - \sum p_k) \quad (\text{eq. 77.2})$$

Note que a razão pela qual essa última expressão é útil consiste no fato de que, experimentalmente, tanto os estados que preparamos para a colisão quanto aqueles que medimos, se parecem muito com estados de momento bem determinado, mas não são ondas planas. Isso ocorre porque tanto na produção quanto na medida temos uma certa precisão FINITA na determinação do momento. Isso significa que sobra uma pequena incerteza no momento e o pacote não fica totalmente delocalizado. "Estreito" na definição acima quer dizer "menor que a precisão experimental".

Das grandezas em 77.2, todas abaixo são invariantes de Lorentz (desde que integremos nos momentos):

$$\left(\prod \frac{d^3 p_k}{(2\pi)^3} \right) \& \mathcal{M}(p_A, p_B \rightarrow \{p_k\}) \& (2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_B - \sum p_k)$$

De fato chamamos:

$$\int d\Omega_n \equiv \left(\int \prod \frac{\delta^3 p_k}{(2\pi)^3} dE_k \right) (2\pi)^4 \delta(\mathbf{P}_A + \mathbf{P}_B - \sum \mathbf{P}_k) \quad (\text{eq. 78.1})$$

de Espaço de Fase Invariante para n corpos. No entanto temos um fator que muda sobre boosts:

$$\frac{1}{E_A E_B |\mathcal{V}_A - \mathcal{V}_B|} = \frac{1}{|E_B \mathbf{P}_A^z - E_A \mathbf{P}_B^z|} = \frac{1}{|E_{\nu \times \gamma \nu} \mathbf{P}_A^\nu \mathbf{P}_B^\nu|} = A^{\nu \gamma}$$

(área transversa a z , e se transforma como tal. Invariante a boosts na direção z)

Se $\vec{P}_A \parallel \vec{P}_B$ (referencial do centro de massa ou do laboratório, que de fato é o que assumimos até agora, por exemplo na integral em b) podemos escrever:

$$\frac{1}{E_A E_B |\mathcal{V}_A - \mathcal{V}_B|} = \frac{1}{F} \quad \text{Fator de fluxo invariante de Møller}$$

$$F^2 = (\mathbf{P}_A \cdot \mathbf{P}_B)^2 - m_A^2 m_B^2 = |E_A \vec{P}_B - E_B \vec{P}_A|^2 - |\vec{P}_1 \times \vec{P}_2|^2$$

O que nos fornece uma expressão invariante de Lorentz para a seção de choque total (note que a seção de choque diferencial não é invariante em geral, embora possamos definir algumas que são, a chamada rapidity é um exemplo):

$$\sigma = \frac{1}{4 \sqrt{(\mathbf{P}_A \cdot \mathbf{P}_B)^2 - m_A^2 m_B^2}} \left(\int \prod \frac{\delta^3 p_k}{(2\pi)^3} dE_k \right) |\mathcal{M}(P_A, P_B \rightarrow \{P_k\})|^2 (2\pi)^4 \delta(\mathbf{P}_A + \mathbf{P}_B - \sum \mathbf{P}_k) \quad (\text{eq. 78.2})$$

esta integral exige cuidado quando temos partículas idênticas no estado final, para que não contemos múltiplas vezes o mesmo espalhamento temos que dividir por $1/n!$ (onde n é o # de partículas ident.)Um caso específico bastante relevante é o espalhamento $2 \rightarrow 2$, no referencial do centro de massa ($\vec{P}_{TOT} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = 0$), o espaço de fase fica:

$$\int d\Omega_2 = \int \frac{\delta^3 p_1 \delta^3 p_2}{(2\pi)^6 4E_1 E_2} (2\pi)^4 \delta(\mathbf{P}_A + \mathbf{P}_B - \sum \mathbf{P}_k) \delta(E_A + E_B - E_1 - E_2) =$$

$\underbrace{E_{cm}}_{\substack{\text{mesma coisa que} \\ \text{fizemos na pg 76}}} \quad \underbrace{\delta(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)}_{\substack{\text{L} \\ \mathbf{P}_1 = -\mathbf{P}_2}}$

$$= \int \frac{d\Omega P_1^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \frac{1}{|\frac{P_1}{E_1} + \frac{P_2}{E_2}|} \bigg|_{\substack{\mathbf{P}_1 = -\mathbf{P}_2 \\ E_1 + E_2 = E_{cm}}} =$$

$$= \int \frac{d\Omega P_1}{16\pi^2 E_{cm}} \quad (\text{eq. 78.3})$$

$$\therefore \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{cm} = \frac{1}{2E_A 2E_B |\mathcal{V}_A - \mathcal{V}_B|} \frac{|\vec{P}_1|}{16\pi^2 E_{cm}} |\mathcal{M}(P_A, P_B \rightarrow P_1, P_2)|^2 \quad (\text{eq. 78.4})$$

Se todas as partículas tiverem massas idênticas, então:

$$E_A = E_B = E_{cm}/2 \quad |\vec{p}_A| = |\vec{p}_B| = |\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = |\vec{p}|$$

$$E_A E_B / |v_A - v_B| = |E_A p_B - p_A E_B| = E_{cm} |\vec{p}|$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{cm} = \frac{|M|^2}{64 \pi^2 E_{cm}^2}$$

(eq. 79.1)

Espalhamento com quatro estados de massa idêntica



Decaimento

Também podemos especializar as contas acima para o caso de uma partícula inicial decaindo (o caso $1 \rightarrow n$), basta voltar na eq. 75.2 e remover todas as integrais em k_B e \bar{k}_B (além do parâmetro de impacto):

$$d\Gamma = \left(\prod \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 dE_f} \right) \int \frac{d^3 k_A}{(2\pi)^3} \frac{\phi_A(\vec{k}_A)}{\sqrt{2E_A}} \int \frac{d^3 \bar{k}_A}{(2\pi)^3} \frac{\phi_A^*(\vec{k}_A)}{\sqrt{2E_A}} \langle \{p_f\} | \{k_A\} \rangle_{OUT} \langle \{p_f\} | \{\bar{k}_A\} \rangle_{IN}^*$$

o que significa que obteremos:

$$\int d^3 \bar{k}_A \delta(\vec{k}_A - \sum p_f) \delta(E_A - \sum E_f) = \delta(E_A - \sum E_f) \Big|_{\vec{k}_A = \sum p_f} \quad \left(\text{o que também implicará: } \vec{k}_A = \sum p_f, E_A = E_A \right)$$

ao invés do fator $|v_A - v_B|$ obtido na pg 76. Esta é de fato a única mudança. Assumindo de novo que o estado inicial é um pacote estreito e indo para o referencial do centro de massa (que neste caso coincide com o referencial de repouso da partícula inicial, que é onde definimos Γ de qualquer forma):

$$d\Gamma = \frac{1}{2m_A} \left(\prod \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 dE_f} \right) |M(m_A \rightarrow \{p_f\})|^2 (2\pi)^4 \delta(p_A - \sum p_f)$$

(eq. 79.2)

Aonde cabe a ressalva de que, uma vez que não é possível pensar em uma partícula INSTÁVEL no passado infinito, o que estamos assumindo aqui é que o tempo da vida τ , é tal que:

$$\tau \gg T \quad \Downarrow \quad \Delta E \simeq \frac{1}{T} \gg \frac{1}{\tau}$$

↑ tempo que mandamos para infinito

↑ energia total envolvida (neste caso ~ massa)

} lembrando que estas duas grandezas estão ligadas pelo princípio da incerteza

ou seja, quando a largura é pequena em relação a massa (estado estreito) ou de vida longa.

