

Quadro de Interação e o Teorema de Wick

(Nastase 5, Peskin 4.2 e 4.3, Stermann Appendix A)

Os "quadros" da MQ:

Dado um elemento de matriz: $\langle \psi | \hat{A} | \phi \rangle$
 $\hookrightarrow \hat{A} = \hat{A}(Q, P)$ (no que segue estou forçando minha letra a diferenciar $\frac{d}{dt}$ de $\frac{d}{dt}$)

a evolução temporal é dada por:

$$i \frac{d}{dt} \langle \psi | \hat{A} | \phi \rangle = \langle \psi | [\hat{A}, \hat{H}] | \phi \rangle \quad (\text{eq. 80.1})$$

\hookrightarrow calculado em t

A equação 80.1 tem toda a informação sobre a evolução, mas gostaríamos de separar a evolução dos operadores e estados, definindo:

$$i \frac{d\hat{A}}{dt} \equiv [\hat{A}, \hat{M}] \quad i \frac{d|\psi\rangle}{dt} \equiv \hat{N}|\psi\rangle \quad -i \frac{d\langle\psi|}{dt} \equiv \hat{N}^+ \langle\psi|$$

$$\hat{M}^+ = M \quad \hat{N}^+ = N$$

$$i \frac{d}{dt} \langle \psi | \hat{A} | \phi \rangle = i \left(\frac{d\langle \psi |}{dt} \right) \hat{A} | \phi \rangle + i \langle \psi | \frac{d\hat{A}}{dt} | \phi \rangle + i \langle \psi | \hat{A} \left(\frac{d|\phi\rangle}{dt} \right)$$

$$= - \langle \psi | \hat{N}^+ \hat{A} | \phi \rangle + \langle \psi | [\hat{A}, \hat{M}] | \phi \rangle + \langle \psi | \hat{A} \hat{N} | \phi \rangle =$$

$$\stackrel{\hat{N}^+ = N}{\downarrow} = \langle \psi | [\hat{A}, \hat{N}] | \phi \rangle + \langle \psi | [\hat{A}, \hat{M}] | \phi \rangle = \langle \psi | [\hat{A}, \hat{H}] | \phi \rangle$$

$$\hookrightarrow \hat{N} + \hat{M} = \hat{H} \quad (\text{eq. 80.2})$$

Um "quadro" consiste em uma escolha de \hat{M} e \hat{N} :

Quadro de Schrödinger: $\left. \begin{array}{l} \hat{M} = 0 \\ \hat{N} = \hat{H} \end{array} \right\} \begin{array}{l} i \frac{d}{dt} |\psi_S(t)\rangle = \hat{H} |\psi_S(t)\rangle \\ i \frac{d}{dt} \hat{A}_S(t) = 0 \end{array}$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d\hat{A}(t)}{dt} = \frac{d\hat{H}}{dt} \equiv 0 \\ \text{não dependem explicitamente do tempo} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \hat{A}_S(t) = \hat{A}(t_0) \\ |\psi_S(t)\rangle = e^{-i\hat{H}(t-t_0)} |\psi(t_0)\rangle \end{array} \right\} (\text{eq. 80.3})$$

Quadro de Heisenberg:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{M} = \hat{H} \\ \hat{N} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} i \frac{d}{dt} \hat{A}_H(t) = [\hat{A}_H(t), \hat{H}] \\ \frac{d}{dt} |\Psi_H(t)\rangle = 0 \end{array}$$

$$\hat{A}_H(t) = e^{i\hat{H}(t-t_0)} \hat{A}(t_0) e^{-i\hat{H}(t-t_0)} \quad (\text{eq. 81.1})$$

$$|\Psi_H(t)\rangle = |\Psi(t_0)\rangle$$

Para o tempo fixo t_0 os dois quadros coincidem:

$$|\Psi_S(t_0)\rangle = |\Psi_H(t_0)\rangle = |\Psi(t_0)\rangle \quad \hat{A}_H(t_0) = \hat{A}_S(t_0) = \hat{A}(t_0) \quad (\text{eq. 81.2})$$

Podemos mudar entre os dois quadros fazendo uma transformação unitária:

$$|\Psi_W\rangle = \hat{W} |\Psi\rangle \quad \hat{W}^\dagger = \hat{W}^{-1}$$

$$\hat{A}_W = \hat{W} \hat{A} \hat{W}^\dagger = \hat{W} \hat{A} \hat{W}^{-1}$$

Definindo W como a transformação "Q. Schrödinger" \rightarrow "Q. Heisenberg", vemos que:

$$\hat{A}_H(t) = e^{i\hat{H}(t-t_0)} \hat{A}(t_0) e^{-i\hat{H}(t-t_0)} \quad \leftrightarrow \quad \hat{W} = e^{i\hat{H}(t-t_0)}$$

O que também poderia ter sido obtido de:

$$|\Psi_H(t)\rangle = \hat{W} |\Psi_S(t)\rangle \Rightarrow |\Psi_S(t)\rangle = \hat{W}^{-1} |\Psi_H(t)\rangle = \underbrace{e^{-i\hat{H}(t-t_0)}}_{U_S(t,t_0)} |\Psi(t_0)\rangle \quad (\text{eq. 80.3})$$

$$\hat{W} = U_S^{-1}(t, t_0) = U_S(t_0, t) \quad (\text{eq. 81.3})$$

De onde vemos que esta transformação é quase o próprio operador evolução (o seu inverso).

Quadro de Interação (ou de Dirac):

Suponha que tenhamos um hamiltoniano do tipo:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$$

\hat{H}_0 → parte livre (quadrática nos campos)
 \hat{H}_1 → parte interagente (potências maiores)

o quadro interação equivale à escolha:

$$\hat{M} = \hat{H}_0 \quad \hat{N} = \hat{H}_1$$

$$i \frac{d\hat{A}_I(t)}{dt} = [\hat{A}_I(t), \hat{H}_0] \quad (\text{eq. 82.1})$$

$$i \frac{d|\Psi_I(t)\rangle}{dt} = \hat{H}_1 |\Psi_I(t)\rangle \quad (\text{eq. 82.2})$$

Mais uma vez, todos os quadros são iguais em t_0 :

$$\hat{A}_I(t_0) = \hat{A}_S(t_0) = \hat{A}_H(t_0) = \hat{A}(t_0) \quad |\Psi_I(t_0)\rangle = |\Psi_S(t_0)\rangle = |\Psi_H(t_0)\rangle = |\Psi(t_0)\rangle$$

A evolução dos operadores se dá como no quadro de Heisenberg da teoria livre:

$$i \frac{d\hat{H}_0}{dt} = 0 \quad \hat{H}_{0I}(t) = \hat{H}_{0S}(t) = \hat{H}_0$$

$$i \frac{d\hat{A}_I(t)}{dt} = [\hat{A}_I(t), \hat{H}_0] \quad \hat{A}_I(t) = e^{i\hat{H}_0(t-t_0)} \hat{A}(t_0) e^{-i\hat{H}_0(t-t_0)}$$

E o próprio hamiltoniano de interação depende do tempo:

$$i \frac{d\hat{H}_1}{dt} = [\hat{H}_1, \hat{H}_0] \quad \hat{H}_1 \equiv \hat{H}_{1I}(t) = e^{i\hat{H}_0(t-t_0)} \hat{H}_1(t_0) e^{-i\hat{H}_0(t-t_0)}$$

A evolução dos estados é um pouco mais complicada:

$$|\Psi_I(t)\rangle = \hat{U}_I(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle$$

quero encontrar U, que satisfaça:

$$\hat{U}(t, t) = 1$$

$$\hat{U}(t, t') \hat{U}(t', t_0) = \hat{U}(t, t_0) \quad (\text{eq. 82.3})$$

Substituindo isto em 82.2

$$i \frac{d}{dt} \hat{U}_I(t, t_0) |\Psi_I(t_0)\rangle = \hat{H}_{1I}(t) \hat{U}_I(t, t_0) |\Psi_I(t_0)\rangle$$

$$i \frac{d}{dt} \hat{U}_I(t, t_0) = \hat{H}_{1I}(t) \hat{U}_I(t, t_0) \quad (\text{eq. 83.1})$$

Uma solução simples para esta equação é:

$$\hat{U}_I(t, t_0) = e^{i \hat{H}_0(t-t_0)} e^{-i \hat{H}_S(t-t_0)}$$

\hat{H}_S : hamiltoniano completo ($\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$) no quadro de Schrödinger

(eq. 83.2)
(vou suprimir os símbolos de operador daqui para frente)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} U_I(t-t_0) &= i H_0 e^{i H_0(t-t_0)} e^{-i H_S(t-t_0)} + e^{i H_0(t-t_0)} (-i H_S) e^{-i H_S(t-t_0)} \\ &= -i e^{i H_0(t-t_0)} (H_S - H_0) e^{-i H_S(t-t_0)} = -i H_{1I} e^{i H_0(t-t_0)} e^{-i H_S(t-t_0)} \\ &= -i H_{1I} \hat{U}_I(t, t_0) \end{aligned}$$

$H_{1S} = H_1(t_0)$

$$H_{1I} = e^{i H_0(t-t_0)} H_1(t_0) e^{-i H_1(t-t_0)} \Rightarrow H_1(t_0) = e^{-i H_0(t-t_0)} H_{1I} e^{i H_0(t-t_0)}$$

Gostaríamos de uma solução similar a $e^{-i H_{1I} t}$, mas isso requer mais cuidado pois H_{1I} na eq. 83.1 depende do tempo. Notemos que a expressão:

$$U_I(t, t_0) = 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 H_{1I}(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_{1I}(t_1) H_{1I}(t_2) + (-i)^3 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 \dots \quad (\text{eq. 83.3})$$

NOTE

$$\frac{d}{dt} \textcircled{I} = -i H_{1I}(t) \textcircled{I}$$

$$\frac{d}{dt} \textcircled{II} = -i \int_{t_0}^t dt_2 H_{1I}(t) H_{1I}(t_2) = -i H_{1I}(t) \textcircled{I}$$

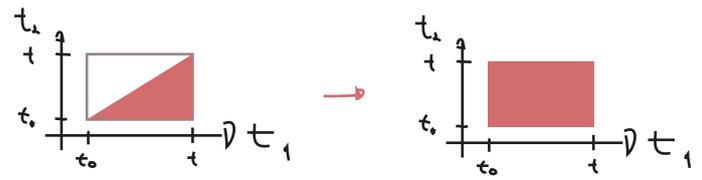
$$\left(\frac{d}{dt} \textcircled{III} = -i H_{1I}(t) \textcircled{II} \right)$$

e assim por diante

$$\therefore \frac{d}{dt} U_I(t, t_0) = -i H_{1I}(t) U_I(t, t_0)$$

// o que prova que 83.3 é solução de 83.1

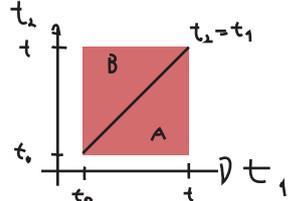
Para simplificar mais o Ansatz 83.3, podemos trocar os limites de integração



tomando o cuidado de notar que $[H_{1I}(t_1), H_{1I}(t_2)] \neq 0$

de fato:

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 T \{ H_{1I}(t_1) H_{1I}(t_2) \} = \underbrace{\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H(t_1) H(t_2)}_A + \underbrace{\int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 H(t_1) H(t_2)}_B = 2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H(t_1) H(t_2)$$



$$T \{ H_{1I}(t_1) H_{1I}(t_2) \} = \begin{cases} H_{1I}(t_1) H_{1I}(t_2) & \text{se } \{t_1, t_2\} \in A \\ H_{1I}(t_2) H_{1I}(t_1) & \text{se } \{t_1, t_2\} \in B \end{cases}$$

Analogamente:

$$\int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^t dt_n T \{ H_{1I}(t_1) \dots H_{1I}(t_n) \} = n! \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_{1I}(t_1) \dots H_{1I}(t_n)$$

De forma que:

$$\hat{U}_I(t, t_0) = 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 T \{ H_{1I}(t_1) \} + \frac{(-i)^2}{2!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 T \{ H_{1I}(t_1) H_{1I}(t_2) \} + \frac{(-i)^3}{3!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^t dt_3 T \{ \dots \}$$

$$U_I(t, t_0) = T \left\{ \text{Exp} \left[-i \int_{t_0}^t dt' H_{1I}(t') \right] \right\}$$

(eq. 84.1)

Esta separação entre a teoria livre e a parte interagente exige um cuidado adicional. Anteriormente usamos a definição para o vácuo como:

$$H_0 |0\rangle \equiv E_0^L |0\rangle = 0$$

Assumindo H_0 normalmente ordenado

Menor autovalor de H_0

Hamiltoniano do sistema

Faremos o mesmo para o Hamiltoniano com a interação: $H | \Omega \rangle = (H_0 + H_1) | \Omega \rangle \equiv E_0 | \Omega \rangle$

Menor autovalor de $H = H_0 + H_1$

e, em geral: $|0\rangle \neq |\Omega\rangle$. Gostaríamos de expressar este novo vácuo em termos de grandezas conhecidas.

Construindo um conjunto completo com os autoestados do hamiltoniano total temos:

$$H | n \rangle = E_n | n \rangle$$

$$\hat{1} = |\Omega\rangle\langle\Omega| + \sum_{n \neq 0} |n\rangle\langle n|$$

Tomemos um estado que começou no vácuo "livre" da teoria e está evoluindo com o Hamiltoniano completo:

$$e^{-i\hat{H}T} |0\rangle = e^{-iE_0 T} |\Omega\rangle\langle\Omega|0\rangle + \sum_{n \neq 0} e^{-iE_n T} |n\rangle\langle n|0\rangle$$

e façamos o limite $T \rightarrow \infty(1 - i\epsilon)$

$\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-\epsilon E_n T} \gg e^{-\epsilon E_1 T} \gg e^{-\epsilon E_2 T} \gg \dots$
 "mata" os estados excitados: $\epsilon > 0$
 $T \rightarrow \infty$

e ficamos só com o zero-ésimo termo da soma do lado direito:

$$\lim_{T \rightarrow \infty(1 - i\epsilon)} \left[e^{-i\hat{H}T} |0\rangle \right] = e^{-iE_0 T} |\Omega\rangle\langle\Omega|0\rangle$$

$$|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1 - i\epsilon)} \frac{e^{-iH(T+t_0)} |0\rangle}{e^{-iE_0(T+t_0)} \langle\Omega|0\rangle} = \lim_{T \rightarrow \infty(1 - i\epsilon)} \frac{e^{-iH(T+t_0)} e^{iH_0(T+t_0)} |0\rangle}{e^{-iE_0(T+t_0)} \langle\Omega|0\rangle}$$

$H_0|0\rangle = 0$

$$|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1 - i\epsilon)} \frac{U_I(t_0, -T) |0\rangle}{e^{-iE_0(T+t_0)} \langle\Omega|0\rangle} \quad (\text{eq. 85.1})$$

(eq. 83.2) $\Rightarrow U_I(-T, t_0) = e^{iH_0(-T-t_0)} e^{-iH(-T-t_0)}$
 $U_I(t_0, -T) = e^{+i\hat{H}(-T-t_0)} e^{-i\hat{H}_0(-T-t_0)}$
 $U_I(-T, t_0) U_I(t_0, -T) = 1$

De forma semelhante:

$$\langle\Omega| = \lim_{T \rightarrow \infty(1 - i\epsilon)} \frac{\langle 0| U_I(T, t_0)}{e^{-iE_0(T-t_0)} \langle 0|\Omega\rangle} \quad (\text{eq. 85.2})$$

Esse é um bom ponto para para e fazer a pertinente pergunta: o que diabos estamos fazendo? Para que serve este quadro de interação?

Pois bem, a imagem que temos em mente é a de experiências aonde temos objetos quânticos e relativísticos: partículas se movendo e interagindo em altas energias. As situações típicas em que conseguimos estudar partículas relativísticas (Raios Cósmicos ou Aceleradores de Partículas) envolvem três "momentos":

(I) Duas ou mais partículas iniciais se aproximam da região de espalhamento a partir de distâncias que podem ser consideradas bem grandes se comparadas com a "região de interação". Estas partículas se movem em linhas retas e são livres (no sentido em que não interagem entre si - pode haver um campo externo que guia sua trajetória, mas ele é tratado classicamente e modifica a geodésica seguida pela partícula).

(II) Ocorre um choque/espalhamento praticamente instantâneo e pontual, no sentido quântico: o tamanho da região de interação e o tempo de duração da mesma estão protegidos pelo princípio da incerteza: não temos como determinar com exatidão aonde nem quando ela aconteceu.

(III) Um número n de partículas deixa a pequena região de interação. Podem ser as mesmas que entraram (no caso de um choque elástico) ou em número e tipo diferente (no caso inelástico). Estas estão novamente livres (no mesmo sentido do momento I) e se movem por uma distância grande antes de chegar aos detectores, onde são medidas (o que é uma nova interação, completamente independente da anterior).

O quadro de interação, por um lado, faz a evolução dos operadores acontecer segundo a Hamiltoniana livre, o que nos permitirá explorar o fato de o sistema é assintoticamente livre no início e no fim do espalhamento. Além disso a parte de interação do Hamiltoniano depende do tempo, o que nos permitirá restringir sua duração.

Uma expressão que deixa bem clara a utilidade do quadro é a 85.1:

$$|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty (1 - i\epsilon)} \frac{U_I(t_0, -T) |0\rangle}{e^{-iE_0(T+t_0)} \langle \Omega | 0 \rangle}$$

Vemos que (a menos de um fator de normalização) o vácuo interagente da teoria é criado a partir do vácuo livre pelo operador de evolução no quadro de interação. Este operador é entre um ponto infinito no passado e t_0 , o que só quer dizer um tempo grande se comparado com o tempo de interação.

Vejamos como ficam as funções de green da teoria interagente neste quadro, primeiro notemos que:

$$\phi(x) = \phi(t, \vec{x}) = \phi_H(t, \vec{x}) \quad (\text{definimos nossos operadores de campo no quadro de Heisenberg})$$

$$\phi_H(t, \vec{x}) = e^{iH(t-t_0)} \phi(t_0, \vec{x}) e^{-iH(t-t_0)}$$

$$\phi_I(t, \vec{x}) = e^{iH_0(t-t_0)} \phi(t_0, \vec{x}) e^{-iH_0(t-t_0)} =$$

$$= \underbrace{e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)}}_{U_I(t, t_0)} \phi_H(x) \underbrace{e^{+iH(t-t_0)} e^{-iH_0(t-t_0)}}_{U_I^+(t, t_0)} \quad 83.2$$

$$\phi_H(x) = U_I^+(t, t_0) \phi_I(x) U_I(t, t_0) \quad (\text{eq. 86.1})$$

Podemos então escrever a função de dois pontos:

$$\langle \Omega | \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-\lambda\epsilon)} \frac{\langle 0 | U_I(T, t_0) U_I^\dagger(x^0, t_0) \phi_I(x) U_I(x^0, t_0) \times U_I^\dagger(y^0, t_0) \phi_I(y) U_I(y^0, t_0) \frac{U_I(t_0, -T) | 0 \rangle}{e^{-iE_0(T+t_0)} \langle \Omega | 0 \rangle}}{e^{-i\lambda E_0 T} \langle \Omega | 0 \rangle^2} = \lim_{T \rightarrow \infty(1-\lambda\epsilon)} \frac{1}{e^{-i\lambda E_0 T} \langle \Omega | 0 \rangle^2} \langle 0 | U_I(T, x^0) \phi_I(x) U_I(x^0, y^0) \phi_I(y) U_I(y^0, -T) | 0 \rangle$$

$$U_I^\dagger(t_1, t_2) = e^{-iH_0(t_1-t_2)} e^{iH(t_1, -t_2)} = U_I(t_2, t_1)$$

$$U_I(t_1, t') U_I(t', t_2) = U_I(t_1, t_2)$$

(eq. 87.1)

Por outro lado, sabemos que:

$$1 = \langle \Omega | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-\lambda\epsilon)} \frac{\langle 0 | U_I(T, t_0) \overbrace{U_I(t_0, -T)}^{U_I(T, -T)} | 0 \rangle}{e^{-i\lambda E_0 T} \langle \Omega | 0 \rangle^2}$$

Podemos dividir 87.1 por esta unidade, obtendo:

$$\langle \Omega | \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-\lambda\epsilon)} \frac{\langle 0 | U_I(T, x^0) \phi_I(x) U_I(x^0, y^0) \phi_I(y) U_I(y^0, -T) | 0 \rangle}{\langle 0 | U_I(T, -T) | 0 \rangle}$$

(eq. 87.2)

Note que, para $x^0 > y^0$, ambos os lados da equação estão temporalmente ordenados. Poderíamos ter também calculado:

$$\langle \Omega | \phi(y) \phi(x) | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-\lambda\epsilon)} \frac{\langle 0 | U_I(T, y^0) \phi_I(y) U_I(y^0, x^0) \phi_I(x) U_I(x^0, -T) | 0 \rangle}{\langle 0 | U_I(T, -T) | 0 \rangle}$$

E esta estaria ordenada para $y^0 > x^0$. De forma que podemos escrever:

$$\langle \Omega | T \{ \phi(y) \phi(x) \} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-\lambda\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \{ U_I(T, y^0) \phi_I(y) U_I(y^0, x^0) \phi_I(x) U_I(x^0, -T) \} | 0 \rangle}{\langle 0 | U_I(T, -T) | 0 \rangle}$$

dentro do produto T podemos comutar a vontade

$$= \lim_{T \rightarrow \infty(1-\lambda\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \{ \phi_I(y) \phi_I(x) U_I(T, -T) \} | 0 \rangle}{\langle 0 | U_I(T, -T) | 0 \rangle}$$

$$\langle \Omega | T \{ \phi(y) \phi(x) \} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-\lambda\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \{ \phi_I(y) \phi_I(x) \text{Exp}[-i \int_{-T}^T dt H_I(t)] \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \{ \text{Exp}[-i \int_{-T}^T dt H_I(t)] \} | 0 \rangle}$$

Esta expressão é trivialmente generalizada para um número arbitrário de operadores:

$$\langle \Omega | T \{ \mathcal{O}_H(x_1) \dots \mathcal{O}_H(x_n) \} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \{ \mathcal{O}_I(x_1) \dots \mathcal{O}_I(x_n) \text{Exp} \left[-i \int_{-T}^T dt H_{\text{int}}(t) \right] \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \{ \text{Exp} \left[-i \int_{-T}^T dt H_{\text{int}}(t) \right] \} | 0 \rangle}$$

(eq. 88.1)

Teorema de Wick

Na prática, obter $\langle \Omega | T \{ \mathcal{O}_H(x_1) \dots \mathcal{O}_H(x_n) \} | \Omega \rangle$ envolve calcular:

$$\langle 0 | T \{ \mathcal{O}_I(x_1) \dots \mathcal{O}_I(x_n) \left(\int_{-T}^T dt H_{\text{int}}(t) \right)^m \} | 0 \rangle$$

→ pode parecer que teremos que calcular infinitos elementos deste tipo, para todos n's. Isto é verdade para o resultado exato. Mas veremos que, em teoria de perturbação, poderemos truncar a expansão da exponencial

Como tanto os operadores $\mathcal{O}_I(x)$ quanto o Hamiltoniano de interação são produtos de campos, este problema se reduz a calcular elementos de matriz do tipo:

$$\langle 0 | T \{ \phi_I(x_1) \dots \phi_I(x_n) \} | 0 \rangle$$

Para isto faremos a divisão do operador de campo:

$$\phi_I = \phi_I^+(x) + \phi_I^-(x) \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi_I^+(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} a_{\vec{p}} e^{-i p \cdot x} \\ \phi_I^-(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} a_{\vec{p}}^\dagger e^{+i p \cdot x} \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} x^0 = t - t_0 \\ p^0 = E_p \\ x^0 = t - t_0 \\ p^0 = E_p \end{array} \right.$$

(eq. 88.2)

pg 86

$$\phi_I(x) = e^{i H_0(t-t_0)} \phi(t_0, \vec{x}) e^{-i H_0(t-t_0)}$$

$$\phi_I(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_{\vec{p}} e^{i p \cdot x} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i p \cdot x})$$

$$e^{i H_0(t-t_0)} \hat{a}_{\vec{p}} e^{-i H_0(t-t_0)} = \hat{a}_{\vec{p}} e^{-i E_p(t-t_0)}$$

$$e^{i H_0(t-t_0)} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{-i H_0(t-t_0)} = \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{+i E_p(t-t_0)}$$

De forma que:

$$\phi_I^+ | 0 \rangle = 0 = \langle 0 | \phi_I^-$$

(eq. 88.3)

Definiremos também uma nova notação para o produto normal: $:\mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n: \equiv N[\mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n]$

Imagine que $x^0 > y^0$

$$T \{ \phi_I(x) \phi_I(y) \} = \phi_I^+(x) \phi_I^+(y) + \phi_I^-(x) \phi_I^-(y) + \phi_I^+(x) \phi_I^-(y) + \phi_I^-(x) \phi_I^+(y) =$$