

Esta expressão é trivialmente generalizada para um número arbitrário de operadores:

$$\langle \Omega | T \{ \mathcal{O}_H(x_1) \dots \mathcal{O}_H(x_n) \} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \{ \mathcal{O}_I(x_1) \dots \mathcal{O}_I(x_n) \text{Exp} \left[-i \int_{-T}^T dt H_{\text{int}}(t) \right] \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \{ \text{Exp} \left[-i \int_{-T}^T dt H_{\text{int}}(t) \right] \} | 0 \rangle}$$

(eq. 88.1)

Teorema de Wick

Na prática, obter $\langle \Omega | T \{ \mathcal{O}_H(x_1) \dots \mathcal{O}_H(x_n) \} | \Omega \rangle$ envolve calcular:

$$\langle 0 | T \{ \mathcal{O}_I(x_1) \dots \mathcal{O}_I(x_n) \left(\int_{-T}^T dt H_{\text{int}}(t) \right)^m \} | 0 \rangle$$

→ pode parecer que teremos que calcular infinitos elementos deste tipo, para todos n's. Isto é verdade para o resultado exato. Mas veremos que, em teoria de perturbação, poderemos truncar a expansão da exponencial

Como tanto os operadores $\mathcal{O}_I(x)$ quanto o Hamiltoniano de interação são produtos de campos, este problema se reduz a calcular elementos de matriz do tipo:

$$\langle 0 | T \{ \phi_I(x_1) \dots \phi_I(x_n) \} | 0 \rangle$$

Para isto faremos a divisão do operador de campo:

$$\phi_I = \phi_I^+(x) + \phi_I^-(x) \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi_I^+(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} a_{\vec{p}} e^{-i p \cdot x} \\ \phi_I^-(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} a_{\vec{p}}^\dagger e^{+i p \cdot x} \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} x^0 = t - t_0 \\ p^0 = E_p \\ x^0 = t - t_0 \\ p^0 = E_p \end{array} \right.$$

(eq. 88.2)

pg 86

$$\phi_I(x) = e^{i H_0(t-t_0)} \phi(t_0, \vec{x}) e^{-i H_0(t-t_0)}$$

$$\phi_I(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_{\vec{p}} e^{i p \cdot x} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i p \cdot x})$$

$$e^{i H_0(t-t_0)} \hat{a}_{\vec{p}} e^{-i H_0(t-t_0)} = \hat{a}_{\vec{p}} e^{-i E_p(t-t_0)}$$

$$e^{i H_0(t-t_0)} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{-i H_0(t-t_0)} = \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{+i E_p(t-t_0)}$$

De forma que:

$$\phi_I^+ | 0 \rangle = 0 = \langle 0 | \phi_I^-$$

(eq. 88.3)

Definiremos também uma nova notação para o produto normal: $:\mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n: \equiv N[\mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n]$

Imagine que $x^0 > y^0$

$$T \{ \phi_I(x) \phi_I(y) \} = \phi_I^+(x) \phi_I^+(y) + \phi_I^-(x) \phi_I^-(y) + \phi_I^+(x) \phi_I^-(y) + \phi_I^-(x) \phi_I^+(y) =$$

$$= \underbrace{\phi_{\mathbb{I}}^+(x)\phi_{\mathbb{I}}^+(y) + \phi_{\mathbb{I}}^-(x)\phi_{\mathbb{I}}^-(y)}_{\text{estão normal. ordenados}} + \underbrace{[\phi_{\mathbb{I}}^+(x), \phi_{\mathbb{I}}^-(y)] + \phi_{\mathbb{I}}^-(y)\phi_{\mathbb{I}}^+(x)}_{\text{estão normal. ordenados}} + \phi_{\mathbb{I}}^-(x)\phi_{\mathbb{I}}^+(y) =$$

$$\mathcal{T}\{\phi_{\mathbb{I}}(x)\phi_{\mathbb{I}}(y)\} = \mathcal{N}[\phi_{\mathbb{I}}(x)\phi_{\mathbb{I}}(y)] + [\phi_{\mathbb{I}}^+(x), \phi_{\mathbb{I}}^-(y)] \quad x^0 > y^0 \quad (\text{eq. 89.1})$$

Poderia ter feito o mesmo para $y^0 > x^0$ e obteríamos:

$$\mathcal{T}\{\phi_{\mathbb{I}}(x)\phi_{\mathbb{I}}(y)\} = \mathcal{N}[\phi_{\mathbb{I}}(x)\phi_{\mathbb{I}}(y)] + [\phi_{\mathbb{I}}^+(y), \phi_{\mathbb{I}}^-(x)] \quad y^0 > x^0 \quad (\text{eq. 89.2})$$

SIMÉTRICO

Definimos a **contração**:

$$\overbrace{\phi_{\mathbb{I}}(x)\phi_{\mathbb{I}}(y)} \equiv \begin{cases} [\phi_{\mathbb{I}}^+(x), \phi_{\mathbb{I}}^-(y)] & x^0 > y^0 \\ [\phi_{\mathbb{I}}^+(y), \phi_{\mathbb{I}}^-(x)] & y^0 > x^0 \end{cases} \quad (\text{eq. 89.3})$$

Notem que como o comutador é um número, podemos fazer:

$$[\phi_{\mathbb{I}}^+(x), \phi_{\mathbb{I}}^-(y)] \langle 0|0 \rangle = \langle 0| \phi_{\mathbb{I}}^+ \phi_{\mathbb{I}}^- - \phi_{\mathbb{I}}^- \phi_{\mathbb{I}}^+ |0 \rangle = \langle 0| \phi_{\mathbb{I}}^+ \phi_{\mathbb{I}}^- |0 \rangle = D(x-y)$$

$$[\phi_{\mathbb{I}}^+(x), \phi_{\mathbb{I}}^-(y)] = D(y-x)$$

Isso quer dizer que (pg 68):

$$\overbrace{\phi_{\mathbb{I}}(x)\phi_{\mathbb{I}}(y)} = D_F(x-y) \quad (\text{eq. 89.4})$$

Pelo mesmo motivo posso incluí-lo no ordenamento normal:

$$\mathcal{T}\{\phi_{\mathbb{I}}(x)\phi_{\mathbb{I}}(y)\} = \mathcal{N}[\phi_{\mathbb{I}}(x)\phi_{\mathbb{I}}(y) + \overbrace{\phi_{\mathbb{I}}(x)\phi_{\mathbb{I}}(y)}] \quad (\text{eq. 89.5})$$

A generalização desta relação para um número m de campos é chamada de **Teorema de Wick** e é dada por:

$$\mathcal{T}\{\phi_{\mathbb{I}}(x_1) \dots \phi_{\mathbb{I}}(x_m)\} = \mathcal{N}[\phi_{\mathbb{I}}(x_1) \dots \phi_{\mathbb{I}}(x_m) + \text{todas as contrações possíveis}]$$

Veja que "todas contrações possíveis" inclui contrações parciais:

$$T\{\underbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4}_{\phi_{\pm}(x_i)}\} = + \dots + N[\underbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4}_{\mathcal{D}_F(x_1-x_3) N[\phi_2 \phi_4]}] + \dots + N[\underbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4}_{\mathcal{D}_F(x_1-x_3) \mathcal{D}_F(x_2-x_4)}]$$

Em que o teorema de Wick nos ajuda? Note que o que queremos calcular é:

$$\langle 0 | T\{\phi_1 \dots \phi_n\} | 0 \rangle = \langle 0 | N[\phi_1 \dots \phi_n + \text{CONTRAÇÕES}] | 0 \rangle$$

Neste caso, qualquer produto normal que sobre depois da aplicação do teorema dá zero. Ex:

$$\begin{aligned} \langle 0 | N[\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4] | 0 \rangle &= 0 \\ \langle 0 | \mathcal{D}_F(x_1-x_3) N[\phi_2 \phi_4] | 0 \rangle &= \mathcal{D}_F(x_1-x_3) \langle 0 | N[\phi_2 \phi_4] | 0 \rangle = 0 \\ \langle 0 | 0 \rangle \mathcal{D}_F(x_1-x_3) \mathcal{D}_F(x_2-x_4) &\neq 0 \end{aligned}$$

$$\langle 0 | T\{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4\} | 0 \rangle = \mathcal{D}_F(x_1-x_2) \mathcal{D}_F(x_3-x_4) + \mathcal{D}_F(x_1-x_3) \mathcal{D}_F(x_2-x_4) + \mathcal{D}_F(x_1-x_4) \mathcal{D}_F(x_2-x_3)$$

A prova do teorema de Wick é feita por indução. Nós provamos o caso com dois campos, é possível provar o para 3 campos usando o de 2 campos, e então o passo n sabendo que o n-1 vale. Isto estará na lista de exercícios.

Regras de Feynman para $\lambda\phi^4$

(Nastase 6; Peskin 4.4)

Voltemos agora para a eq. 88.1:

$$\langle \Omega | T\{\phi(x_1) \dots \phi(x_n)\} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{1}{N} \langle 0 | T\{\phi_{\pm}(x_1) \dots \phi_{\pm}(x_n) \text{Exp}[-i \int_{-T}^T dt H_{\text{int}}(t)]\} | 0 \rangle$$

denominador no lado direito de 88.1

E vamos assumir que $\langle H_1 \rangle$ é (em todos os sentidos) pequeno.

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \hat{H}_1 = \lambda \hat{\mathcal{O}}(\phi) \quad \Rightarrow \quad \langle \hat{H}_1 \rangle &= \lambda \langle \hat{\mathcal{O}}(\phi) \rangle \quad \Rightarrow \quad \langle \hat{H}_1^2 \rangle \ll \langle \hat{H}_1 \rangle \ll \langle \hat{1} \rangle \\ \hookrightarrow \lambda \sim 0 \quad \langle \hat{H}_1^2 \rangle &= \lambda^2 \langle \hat{\mathcal{O}}(\phi)^2 \rangle \quad \langle \phi_1 \dots \phi_n \hat{H}_1^2 \rangle \ll \langle \phi_1 \dots \phi_n \hat{H}_1 \rangle \ll \langle \phi_1 \dots \phi_n \rangle \end{aligned}$$

Neste caso podemos calcular o produto temporalmente ordenado em uma **aproximação perturbativa**, expandindo as exponenciais em H_1 , e tomando tantos termos quantos necessários (dependendo da precisão necessária):

$$\langle \Omega | T\{\phi(x_1) \dots \phi(x_n)\} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{1}{N} \left\{ \langle 0 | T\{\phi_{\pm}(x_1) \dots \phi_{\pm}(x_n)\} | 0 \rangle + \dots \right\}$$

$$+ \langle 0 | T \{ \underbrace{\phi_I(x_1) \dots \phi_I(x_n)}_{\mathcal{O}(\lambda)} \underbrace{\left(-i \int_{-T}^T dt H_{I1}(t) \right)}_{\text{"inserções de } H_{I1}"} \} | 0 \rangle + \langle 0 | T \{ \underbrace{\phi_I(x_1) \dots \phi_I(x_n)}_{\mathcal{O}(\lambda^2)} \underbrace{\left(-i \int_{-T}^T dt H_{I1}(t) \right)^2}_{\text{"inserções de } H_{I1}"} \} | 0 \rangle + \dots$$

Analisando o produto de quatro campos: $\langle \Omega | T \{ \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \} | \Omega \rangle$

$$\phi_i = \phi_I(x_i)$$

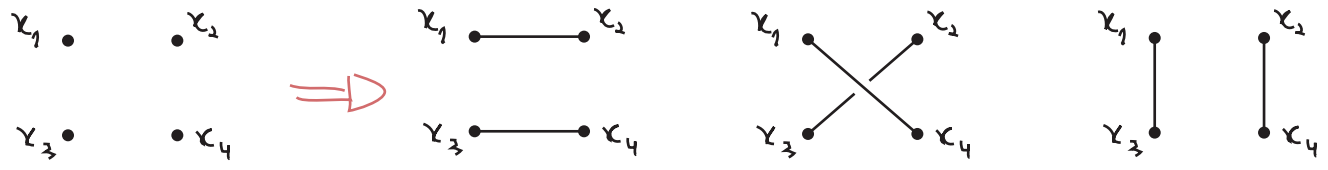
temos em ordem 0 de perturbação (que de fato é a teoria livre):

$\mathcal{O}(\lambda^0)$

$$\langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \} | 0 \rangle = D_F(x_1 - x_2) D_F(x_3 - x_4) + D_F(x_1 - x_3) D_F(x_2 - x_4) + D_F(x_1 - x_4) D_F(x_2 - x_3) + \dots$$

Wick

Este tipo de lógica combinatória imposta pelo teorema de Wick pode ser enormemente agilizada e sistematizada usando um recurso gráfico que ganhou o nome de **Diagramas de Feynman**. No caso simples acima (onde o ganho de usar grafos não é evidente, mas avançaremos rapidamente para casos mais complicados, onde o ganho é enorme), temos quatro pontos no espaço-tempo e os conectamos de todas as formas possíveis:



$$\boxed{x_1 \text{ --- } x_2} \equiv D_F(x_1 - x_2) \quad \text{Propagador} \quad (\text{eq. 91.1})$$

Lembrando também que podemos interpretar $\phi(x_1)|0\rangle$ como a criação de uma partícula em x_1 e $\langle 0|\phi(x_2)$ como a aniquilação de uma partícula em x_2 , e que o propagador de Feynman dá conta de todas as possibilidades de ordenamentos temporais, é comum "ler" o diagrama do propagador com esta imagem física em mente: a partícula foi criada em x_1 (x_2) e aniquilada em x_2 (x_1) (ela não é perfeita, no entanto, como veremos mais adiante).

Considere agora o produto de dois campos: $\langle \Omega | T \{ \phi_1 \phi_2 \} | \Omega \rangle$

o primeiro termo é trivial:

$\mathcal{O}(\lambda^0)$

$$\langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 \} | 0 \rangle = x_1 \text{ --- } x_2$$

e o segundo (primeira correção perturbativa) é dado por:

$\mathcal{O}(\lambda^1)$

$$\langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 \left(-i \int dt H_{I1}(t) \right) \} | 0 \rangle$$

$$H_{I1}(t) = \int d^3x \mathcal{H}_1(x)$$

Tomemos uma interação específica, conhecida com Teoria $\lambda\phi^4$: $\mathcal{H}_1 = \frac{\lambda}{4!} \phi^4$

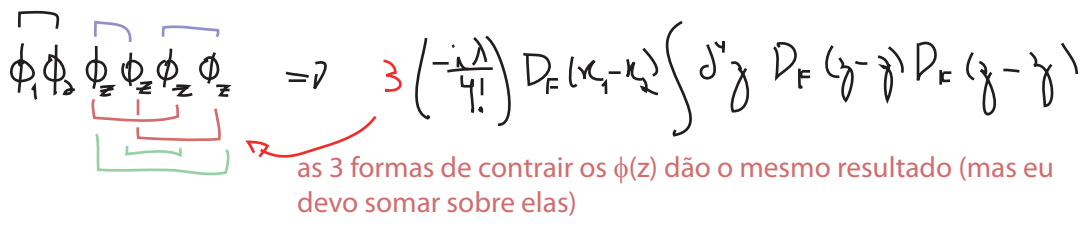
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\nu \phi \partial^\nu \phi - \frac{m^2 \phi^2}{2} - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \iff \mathcal{L} = \mathcal{L}(\chi)$$

$$\int dt H_{I, \mathbb{R}} = \int dt \int d^3 z \delta \mathcal{H}_{I, \mathbb{R}}(z) = \int d^4 z \frac{\lambda}{4!} \phi_{\mathbb{R}}(z) \phi_{\mathbb{R}}(z) \phi_{\mathbb{R}}(z) \phi_{\mathbb{R}}(z) \leftarrow \text{ todos no mesmo ponto}$$

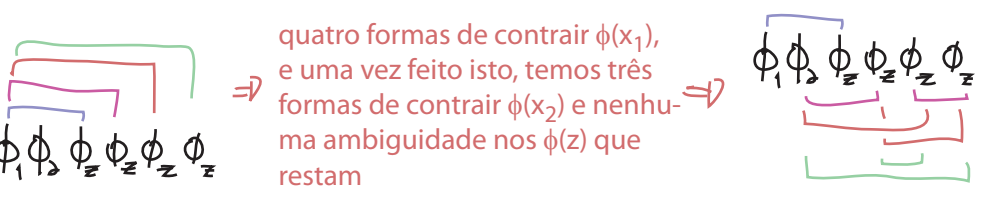
$$\langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 (-i \int dt H_{I, \mathbb{R}}(t)) \} | 0 \rangle = -\frac{i\lambda}{4!} \int d^4 z \langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 \phi_z \phi_z \phi_z \phi_z \} | 0 \rangle$$

Temos que fazer todas as contrações possíveis destes 6 campos, e dividimos isto em dois casos:

- (1) contraímos $\phi(x_1)$ com $\phi(x_2)$ e os $\phi(z)$ só entre si.
- (2) contraímos $\phi(x_1)$ com um dos $\phi(z)$ e $\phi(x_2)$ com outro (os dois $\phi(z)$ que restam são contraídos entre si).

(1) \Rightarrow 

$$\Rightarrow 3 \left(-\frac{i\lambda}{4!} \right) D_F(x_1 - x_2) \int d^4 z D_F(z - z) D_F(z - z)$$

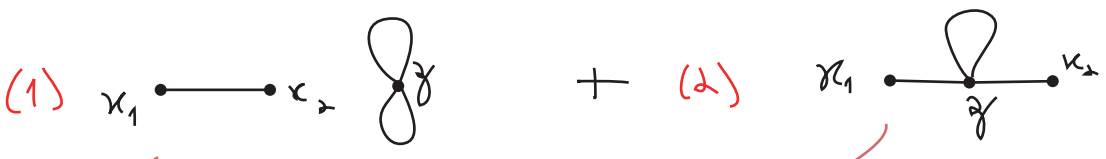
(2) \Rightarrow 

$$\therefore 4 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{i\lambda}{4!} \right) \int d^4 z D_F(x_1 - z) D_F(x_2 - z) D_F(z - z)$$

$$\langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 (-i \int dt H_{I, \mathbb{R}}(t)) \} | 0 \rangle = 3 \left(-\frac{i\lambda}{4!} \right) D_F(x_1 - x_2) \int d^4 z D_F(z - z) D_F(z - z) + 12 \left(-\frac{i\lambda}{4!} \right) \int d^4 z D_F(x_1 - z) D_F(x_2 - z) D_F(z - z) \quad (\text{eq. 92.1})$$

A versão diagramática seria:

$x_1 \cdot x_2 \cdot z \cdot z \Rightarrow$ lembrando que temos 4 campos em z logo 4 linhas devem sair/entrar ali



$\leftarrow 3 \left(-\frac{i\lambda}{4!} \right) D_F(x_1 - x_2) \int d^4 z D_F(z - z) D_F(z - z)$ $\leftarrow 12 \left(-\frac{i\lambda}{4!} \right) \int d^4 z D_F(x_1 - z) D_F(x_2 - z) D_F(z - z)$

\leftarrow a resposta não é função de z \leftarrow como advinho estes fatores?!?

Vejam os um caso mais complicado:

$\mathcal{O}(x)$

$$\langle 0 | T \left\{ \phi_x \phi_y \left[\frac{1}{3!} (-i \frac{\Delta}{4!})^3 \int d^4z \phi_z \phi_z \phi_z \phi_z \int d^4w \phi_w \phi_w \phi_w \phi_w \int d^4u \phi_u \phi_u \phi_u \phi_u \right] \right\} | 0 \rangle \quad (\text{eq. 93.1})$$

expansão da exponencial

para esta contração

$$= \frac{1}{3!} (-i \frac{\Delta}{4!})^3 \int d^4z \int d^4w \int d^4u D_F(x-z) D_F(y-w) D_F(z-w) D_F(z-w) D_F^2(w-u) D_F(u-u)$$

(eq. 93.2)

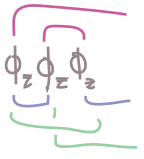
Vamos tentar identificar quantas contrações diferentes poderiam ter levado à mesma expressão 93.2.

Nome dos vértices: 3!

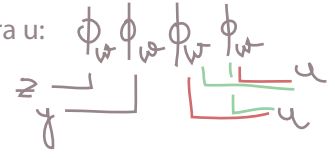
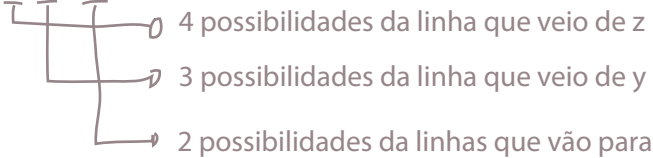
(z, w e u são variáveis mudas. Pense na expressão 93.1: eu poderia ter trocado a ordem de z, w e u sem mudar a posição dos "contratores" e há 3! ordenamentos para w, z e u - zwu, zuw, uzw, uwz, wzu)

Contrações no vértice z: 4.3

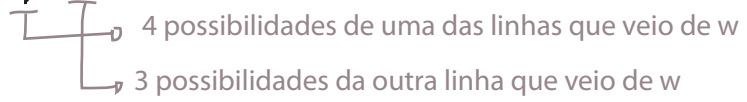
(temos 4 formas de conectar a linha que vem de x. Uma vez feito isto temos três forma de conectar os z's entre si. A linha que sobra vai para w)



Contrações no vértice w: 4.3.2

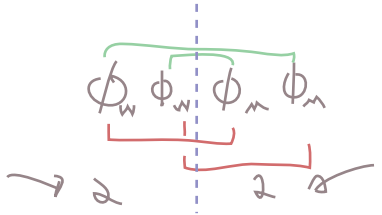


Contrações no vértice u: 4.3



(os dois campos que sobram só tem uma possibilidade)

Dupla contagem w vs. u: 1/2



dupla contagem (acontece sempre que ligo pontos internos com mais de uma linha)

$$3! (4 \cdot 3) (4 \cdot 3 \cdot 2) (4 \cdot 3) \frac{1}{2} = \frac{3! (4!)^3}{8} =$$

De forma que temos 10368 contrações diferentes que levam à mesma expressão 93.2. Note no entanto que este número quase exatamente cancela os fatoriais presentes em 93.2:

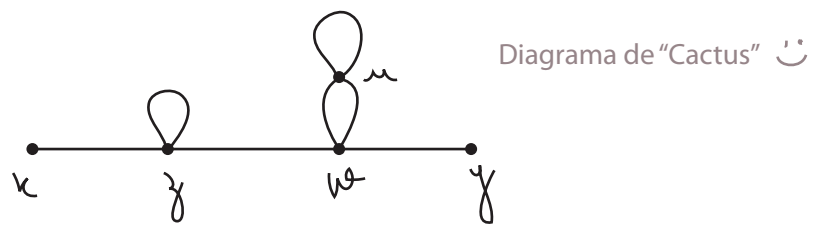
$$\left(\text{Soma sobre todas as contrações} \right) = -\frac{i\lambda}{8} \int d^4z \int d^4w \int d^4\mu D_F(x-z) D_F(y-w) D_F(z-z) D_F(z-w) D_F^2(w-\mu) D_F(\mu-\mu)$$

Este cancelamento não é tão impressionante se pensarmos a respeito:

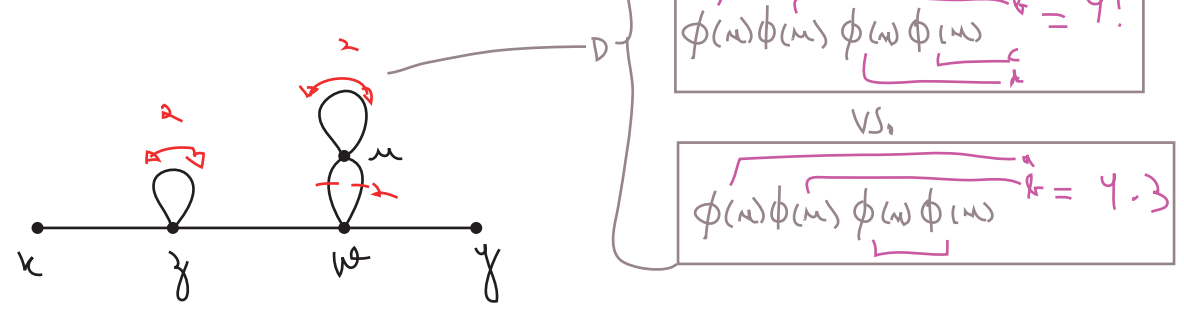
- (1) o fator 3! que vem da troca dos nomes dos pontos internos vai em geral cancelar com o 3! da série de Taylor da exponencial
- (2) cada um destes pontos internos tem 4 linhas saindo, e isso (inocentemente) nos dá um 4! para cada ponto interno, que cancela o 1/4! que está no Hamiltoniano de interação (de fato é por isso que definimos o Hamiltoniano com este 4!).

O ponto (2) acima não é totalmente verdade, **por conta das duplas contagens** e é isso que faz o cancelamento não ser exato e produz aquele "8" que sobrou no final. Isso quer dizer que simplesmente ignorando o 3! da série e os 4! do Hamiltoniano faremos uma sobrecontagem - que devemos dividir por um fator que dê conta das duplas contagens. Este fator que sobra é chamado de **Fator de Simetria** do diagrama e é nele que estamos interessados.

Como vemos este fator direto do diagrama? Baseado nos propagadores podemos desenhar:



E o fator de simetria vem de:



(pode ainda haver uma simetria por equivalência de dois pontos, mas esta não aparece neste diagrama)

$S = 2 \times 2 \times 2 = 8$

Fator de Simetria

Voltando aos fatores da expressão 92.1:

$S = 8 \Rightarrow$

$$-\frac{i\lambda}{8} D_F(x-y) \int d^4z D_F(z-z) D_F(z-z)$$

$S = 2 \Rightarrow$

$$-\frac{i\lambda}{2} D_F(x-y) \int d^4z D_F(z-z) D_F(z-z)$$

e isto aqui? $\rightarrow e^{-i\int \mathcal{H}} = \frac{-i\lambda}{4!} \phi^4$

para cada ponto interno terei um fator deste

O fator que resta vem de estabelecer uma regra para o **vértice** da teoria:

$$\boxed{\text{Diagrama de vértice}} \equiv -i\lambda \quad \text{Vértice} \quad (\text{eq. 95.1})$$

(note que o vértice é este ponto de onde saem 4 linhas, as linhas em si tem regras próprias dadas por 91.1)

E como este vértice é um ponto "interno" do diagrama, ele também contribui com uma integral em z. Para cada vértice no diagrama vai entrar um fator (-iλ) e farei uma integral. Com isso, temos um conjunto de regras **para esta teoria** (campo escalar real com interação φ⁴) que nos permite transformar um diagrama em uma expressão analítica:

- (1) para cada propagador: $x_1 \text{---} x_2 = D_F(x_1 - x_2)$
- (2) para cada vértice: $\text{Diagrama de vértice} = (-i\lambda) \int d^4z$
- (3) para cada ponto externo: $x_1 \text{---} = 1$ (isto é trivial aqui, mas não será assim na versão final das regras)
- (4) divida tudo pelo fator de simetria

Regras de Feynman (para func. de Green) de λφ⁴ no espaço das posições (eq. 95.2)

Mais alguns exemplos:

$$\text{Diagrama de loop} = \frac{(-i\lambda)^2}{3!} \int d^4z_1 \int d^4z_2 D_F(x_1 - z_1) D_F(x_2 - z_2) D_F^3(z_1 - z_2)$$

↳ 3! trocas de linhas

$$\text{Diagrama de loop com vértice} = \frac{(-i\lambda)^3}{3! \cdot 2} \int d^4z_1 d^4z_2 d^4z_3 D_F(x_1 - z_1) D_F(x_2 - z_1) D_F(z_1 - z_2) D_F(z_2 - z_3) D_F^3(z_3 - z_3)$$

S = 3! · 2

Notando finalmente que para calcular uma dada função de n pontos, temos que somar sobre todos os diagramas possíveis até um certa ordem perturbativa:

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 - i\epsilon)} \frac{1}{N} \left\{ \underbrace{\text{Diagrama 1}}_{\mathcal{O}(\lambda^0)} + \underbrace{\text{Diagrama 2} + \text{Diagrama 3}}_{\mathcal{O}(\lambda)} + \underbrace{\text{Diagrama 4} + \text{Diagrama 5} + \text{Diagrama 6} + \dots}_{\mathcal{O}(\lambda^2)} \right\}$$