

Em geral estamos interessados em calcular estes elementos no espaço dos momentos, não da posição, então é bem útil escrever as regras de Feynman também para os momentos. Note que:

eq. 67.1 $\Rightarrow D_F(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \underbrace{\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}}_{D_F(p)} e^{-i p(x-y)}$

note que podia ser (y-x) pois o sinal de p é arbitrário, a escolha é feita por consistência com as linhas externas. Da forma que está escrito o momento vai de y para x (veja no fim da pg 97)

e:

$$\langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \} | 0 \rangle = \theta(z_3 > z_1 > z_2) \langle 0 | \phi_3 \phi_1 \phi_2 \phi_4 | 0 \rangle + \dots$$

outros ordenamentos temp.

$$\int \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{p_3}}} a_{p_3}^\dagger e^{i p_3 z_3}$$

(eq. 88.2)

De forma que cada elemento no espaço das posições contém uma infinidade de possibilidades no espaço dos momentos

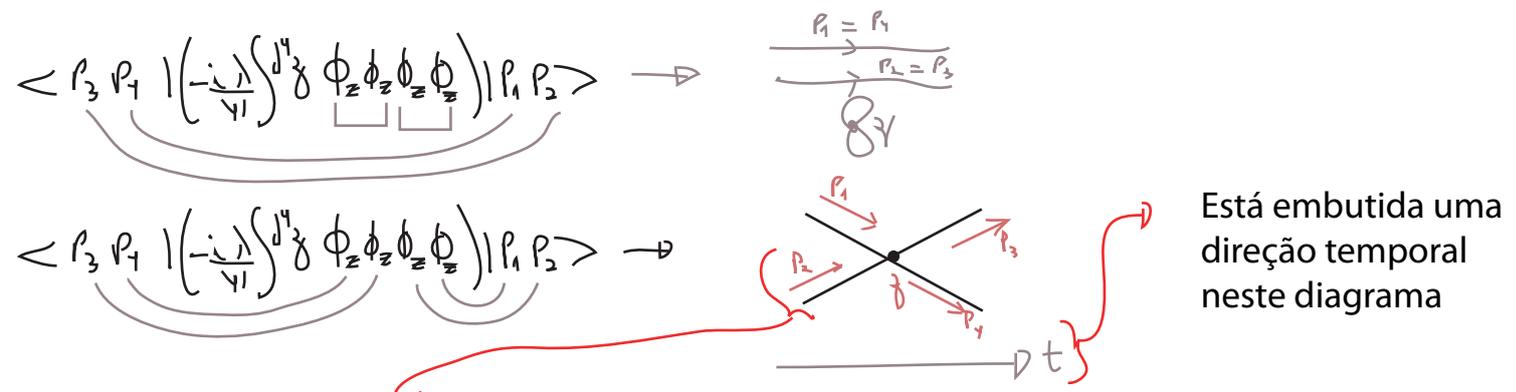
$$\langle 0 | \phi_3 \phi_1 \phi_2 \phi_4 | 0 \rangle \sim \int d^4 p_1 \int d^4 p_2 \int d^4 p_3 \int d^4 p_4 \langle p_3 p_1 | p_2 p_4 \rangle$$

queremos regras para estes (com escolha específica de $p_1 \dots p_4$)

No caso de uma inserção da interação temos:

$$\langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \left(\frac{-i\lambda}{4!} \int d^4 z \phi_z \phi_z \phi_z \phi_z \right) \} | 0 \rangle \sim \dots + \int \langle p_3 p_1 | \left(\frac{-i\lambda}{4!} \int d^4 z \phi_z \phi_z \phi_z \phi_z \right) | p_2 p_4 \rangle$$

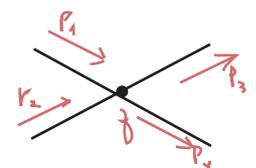
de novo há várias possibilidades do que pode ocorrer:



Note que esta linha vem até z de um ponto indeterminado, porque passamos da representação em x_2 para uma em p_2 . Chamamos isto de **linha externa**.

$\phi^+ \phi^+ \phi^+ \phi^- = 0$
 assim todos com número diferentes de criações e aniquilações

Suponha que estejamos interessados em:



Então: $\langle p_3 p_1 | (\phi_z^+ + \phi_z^-) (\phi_z^+ + \phi_z^-) (\phi_z^+ + \phi_z^-) (\phi_z^+ + \phi_z^-) | p_2 p_4 \rangle$

4! formas de fazer isto

eq. 88.2 aniq. cria

$$\begin{aligned} \phi_z^+ |P_1\rangle &= \int \frac{d^3 P_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{P_2}}} \underbrace{a_{P_2} e^{-iP_2 z}}_{\text{comut.}} \sqrt{2E_{P_1}} a_{P_1}^+ |0\rangle = \\ &= \int \frac{d^3 P_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{P_2}}} e^{-iP_2 z} \sqrt{2E_{P_1}} (2\pi)^3 \delta(P_2 - P_1) |0\rangle = e^{-iP_1 z} |0\rangle \end{aligned} \quad (\text{eq. 97.1})$$

Da mesma forma:

$$\langle P_3 | \phi_z = \langle 0 | e^{iP_3 z} \quad (\text{eq. 97.2})$$

O que nos mostra que cada linha externa contribuirá com:



Ainda resta a integral em z:

$$= \frac{(-i\lambda)}{4!} \int d^4 z e^{-iP_1 z} e^{-iP_2 z} e^{iP_3 z} e^{iP_4 z} =$$

4! formas de fazer isto

$$= (-i\lambda) (2\pi)^4 \delta^4(P_1 + P_2 - P_3 - P_4)$$

contribuição do vértice (a integração na posição do vértice garantiu conservação de momento no mesmo)

No caso de um diagrama mais complicado:

$$= \langle P_3 P_4 | \underbrace{\left(\frac{-i\lambda}{4!} \int d^4 z_1 \phi_{z_1} \phi_{z_2} \phi_{z_3} \phi_{z_4} \right)}_{4.3} \underbrace{\left(\frac{-i\lambda}{4!} \int d^4 z_1 \phi_{z_1} \phi_{z_2} \phi_{z_3} \phi_{z_4} \right)}_2 | P_1 P_2 \rangle =$$

escolho o sinal de k para manter a direção de momento igual a das linhas externas: $Exp[-ik_1 z_2]$ para momento entrando em z_2 e $Exp[ik_1 z_1]$ para momento saindo de z_1 .

$$= \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int d^4 z_1 d^4 z_2 \int \frac{d^4 k_1 d^4 k_2}{(2\pi)^8} D_F(k_1) D_F(k_2) e^{-i k_1 (\delta_1 - \delta_2)} e^{-i k_2 (\delta_2 - \delta_1)} e^{-i P_1 z_1} e^{-i P_2 z_1} e^{i P_3 z_2} e^{i P_4 z_2}$$

fator de simetria propagadores linhas externas

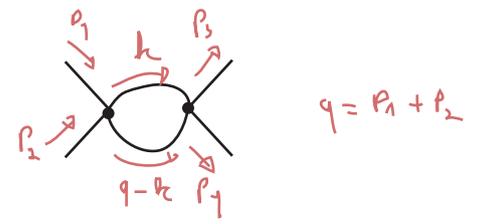
$$= \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \underbrace{d^4 k_1}_{k_1 = k} d^4 k_2 \underbrace{\delta^4(-P_1 - P_2 + k_1 + k_2)}_{P_1 + P_2 = q} \delta^4(-k_1 - k_2 + P_3 + P_4) D_F(k_1) D_F(k_2)$$

$\delta^4(+k_2 - (q - k))$

$$= \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int d^4k \delta^4(-k - (q-k) + p_3 + p_4) D_F(k) D_F(q-k) =$$

$$= \frac{(-i\lambda)^2 (2\pi)^4}{2} \delta^4(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D_F(k) D_F(p_1 + p_2 - k)$$

estou escrevendo assim pois logo vamos querer identificar \mathcal{M}



Podemos então escrever as regras para obter diretamente a expressão no espaço dos momentos (que não é da função de Green $G_n(x_1, \dots, x_n)$, nem de sua transformada de Fourier $\tilde{G}_n(p_1, \dots, p_n)$ mas sim para elementos do tipo $\langle p_1, p_2, \dots | p_3, p_4, \dots \rangle$)

- (1) para cada propagador de momento p: = $D_F(p) = \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$
- (2) para cada vértice: = $-i\lambda$
- (3) para linha externa: = 1
- (4) imponha conservação de momento em cada vértice (re-escrevendo os momentos internos)
- (5) integre sobre cada momento não determinado: $\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$
- (6) divida pelo fator de simetria
- (7) multiplique por: $(2\pi)^4 \delta^4(\sum p_\alpha)$ momentos externos

Regras de Feynman para $\langle p_1, p_2, \dots | p_3, p_4, \dots \rangle$ de $\lambda\phi^4$ no espaço dos momentos (eq. 98.1)

Mais alguns exemplos:

$$\text{Self-energy diagram} = (2\pi)^4 \delta(p_1 - p_2) \frac{(-i\lambda)}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D_F(k)$$

$$\text{Vertex correction diagram} \Rightarrow \text{renormalized vertex} = (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D_F(k) D_F(q-k)$$

$q = p_1 - p_3$

Conservação nos vértices: $\left. \begin{aligned} p_1 &= p_3 + k_2 + k \\ p_2 + k_2 + k_1 &= p_4 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} p_1 - p_3 &= q = p_1 - p_3 = k_2 + k \\ k_2 &= q - k \end{aligned}$

Vamos deixar um pouco mais clara a diferença entre as regras do quadro 98.1 e as regras para

$$\tilde{G}_n(p_i, k_j) = \left(\prod_{i=1}^n \int d^4x_i e^{i p_i x_i} \right) \left(\prod_{j=1}^m \int d^4y_j e^{-i k_j y_j} \right) G(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_m)$$

↙ ↘ partículas iniciais
↙ ↘ partículas finais

Considere o exemplo:

$$G(x_1, x_2) = \text{diagram} = \frac{\lambda^2}{3!} \int d^4z_1 d^4z_2 D_F(z_1 - x_1) D_F(x_2 - z_2) D_F^3(z_2 - z_1)$$

Tomemos a sua transformada de Fourier:

$$\begin{aligned} \tilde{G}(p_1, p_2) &= \int d^4x_1 d^4x_2 e^{-i p_1 x_1} e^{i p_2 x_2} \frac{\lambda^2}{3!} \int d^4z_1 d^4z_2 D_F(z_1 - x_1) D_F(x_2 - z_2) D_F^3(z_2 - z_1) = \\ &= \int d^4x_1 d^4x_2 e^{-i p_1 x_1} e^{i p_2 x_2} \frac{\lambda^2}{3!} \int d^4z_1 d^4z_2 \int \frac{d^4p_3}{(2\pi)^4} e^{-i p_3(z_1 - x_1)} D_F(p_3) \int \frac{d^4p_4}{(2\pi)^4} e^{-i p_4(x_2 - z_2)} D_F(p_4) \times \\ &\quad \times \int \frac{d^4p_5}{(2\pi)^4} e^{-i p_5(z_2 - z_1)} D_F(p_5) \int \frac{d^4p_6}{(2\pi)^4} e^{-i p_6(z_2 - z_1)} D_F(p_6) \int \frac{d^4p_7}{(2\pi)^4} e^{-i p_7(z_2 - z_1)} D_F(p_7) = \end{aligned}$$

$$\int d^4x_1 \rightarrow \delta^4(-p_1 + p_3) \quad \int d^4x_2 \rightarrow \delta^4(p_2 - p_4)$$

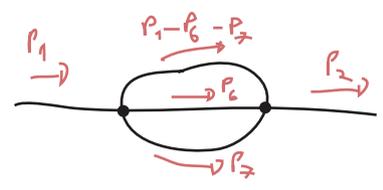
$$= \frac{\lambda^2}{3!} \int d^4z_1 d^4z_2 e^{-i p_3 z_1} D_F(p_3) e^{i p_2 z_2} D_F(p_2) \int \int \int (\dots) =$$

$$\int d^4z_1 \rightarrow \delta^4(-p_1 + p_5 + p_6 + p_7)$$

$$= \frac{\lambda^2}{3!} \int d^4z_2 D_F(p_1) D_F(p_2) e^{i p_2 z_2} e^{-i(p_1 - p_6 - p_7) z_2} \int \int D_F(p_1 - p_6 - p_7) (\dots) =$$

$$\int d^4z_2 \rightarrow \delta^4(p_2 - p_1 + p_6 + p_7 - p_6 - p_7) = \delta^4(p_2 - p_1)$$

$$= \frac{\lambda^2}{3!} D_F(p_1) D_F(p_2) (2\pi)^4 \delta^4(p_2 - p_1) \int \frac{d^4p_6}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_7}{(2\pi)^4} D_F(p_1 - p_6 - p_7) D_F(p_6) D_F(p_7)$$



Estes dois "propagadores externos" não pareceram nas regras de Feynman deduzidas anterior-

mente pois tratamos os estados iniciais e finais com mais detalhe (ainda que de forma heurística), como ondas planas. O jeito formal de obtê-las seria usando a fórmula de LSZ (eq. 74.3), que para este caso seria:

$$\begin{aligned} \langle \sum_{\text{out}} p_2 | p_1 \rangle_{\text{in}} &= \lim_{\substack{p_1 \rightarrow m^2 \\ p_2 \rightarrow m^2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{Z})^2} \frac{1}{(p_1^2 - m^2 + i\epsilon)(p_2^2 - m^2 + i\epsilon)} \times \right. \\ &\times \left. \frac{\lambda^2}{3!} \underbrace{\Delta(p_1)}_{\frac{iZ}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon}} \underbrace{\Delta(p_2)}_{\frac{iZ}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon}} (2\pi)^4 \delta^4(p_2 - p_1) \int \frac{d^d p_6}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d p_7}{(2\pi)^d} \Delta(p_1 - p_6 - p_7) \Delta(p_6) \Delta(p_7) \right\} \\ \langle \sum_{\text{out}} p_2 | p_1 \rangle_{\text{in}} &= Z \frac{\lambda^2}{3!} (2\pi)^4 \delta^4(p_2 - p_1) \int \frac{d^d p_6}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d p_7}{(2\pi)^d} \Delta(p_1 - p_6 - p_7) \Delta(p_6) \Delta(p_7) \end{aligned}$$

Que é o mesmo que obteríamos com as regras em 98.1, a menos de um fator $(\sqrt{Z})^n$, onde n é o número de linhas externas.

Note que isto não acontece somente neste exemplo de 2 pontos. Essencialmente o que a fórmula de LSZ faz é remover as singularidades que a função tinha por conta das linhas externas (as singularidades nas linhas internas são contornáveis pois os momentos destas estão integrados). Lembrando que $Z = 1$ em primeira ordem de perturbação, podemos usar as regras de 98.1 diretamente para elementos da matriz S nesta ordem. Lembrando ainda que (pg 76):

$$\langle \sum_{\text{out}} p_i | \{k_i\} \rangle_{\text{in}} = i \mathcal{M} (2\pi)^4 \delta^4(\sum k_i - \sum p_i)$$

Podemos esquecer a regra 7 de 98.1 para obter **regras de Feynman diretamente para $i\mathcal{M}$**

No exemplo acima:

$$i\mathcal{M} = Z \frac{\lambda^2}{3!} \int \frac{d^d p_6}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d p_7}{(2\pi)^d} \Delta(p_1 - p_6 - p_7) \Delta(p_6) \Delta(p_7)$$

Com isso temos um conjunto de regras completo, mas cabem alguns comentários para amarrar as pontas soltas. Primeiramente note que, na eq. 88.1, estamos dizendo que todos estes correlatores serão calculados para:

$$T \rightarrow \infty (1 - i\epsilon)$$