$$= (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \dots + p_n)\, G_n(p_1, \dots, p_n)$$

tendo em mente que a dependencia de p_1 entra por meio da soma dos outros momentos $p_1 = p_2 + \dots + p_n$

nestas funções a conservação de momento já está garantida

Um resultado importante, chamado de fórmula de Dyson, pode ser obtido começando com o VEV (valor esperado no vácuo) de operadores quaisquer no vácuo da teoria livre:

$$\langle 0 | \hat{\mathcal{O}}[\{\hat{\phi}\}] \underbrace{|0\rangle}_{\text{vácuo da teoria livre}} = \int \mathcal{D}\phi\, e^{-S_0[\phi]}\, \mathcal{O}[\{\phi\}]$$

deste lado a informação vácuo está no fato de tomarmos configurações periódicas $\phi(\vec{x}, t_E + \beta) = \phi(\vec{x}, t_E)$ com β infinito e sabemos que é o vácuo da teoria livre pois usamos S_0 na função de partição

Suponha que: $\hat{\mathcal{O}} = e^{-S_I[\phi]}$

temos então:

$$\boxed{\langle 0 | e^{-S_I[\phi]} | 0 \rangle = \int \mathcal{D}\phi\, e^{-S_0[\phi] - S_I[\phi]}}$$

(eq. 108.1)

e se: $\hat{\mathcal{O}} = \hat{\phi}(x_1) \dots \hat{\phi}(x_n)\, e^{-S_I[\phi]}$

$$\boxed{\langle 0 | \hat{\phi}(x_1) \dots \hat{\phi}(x_n)\, e^{-S_I[\phi]} | 0 \rangle = \int \mathcal{D}\phi\, e^{-S_0[\phi] - S_I[\phi]}\, \phi(x_1) \dots \phi(x_n) = G_n(x_1, \dots, x_n)}$$

(lembre que quando rodarmos de volta para o espaço de Minkowski vamos obter o ordenamento temporal)

(eq. 108.2)

finalmente, se: $\hat{\mathcal{O}} = e^{-S_I[\phi]}\, e^{\int d^4x\, J(x)\phi(x)}$

$$\boxed{\langle 0 | e^{-S_I[\phi]}\, e^{\int d^4x\, J(x)\phi(x)} | 0 \rangle = \int \mathcal{D}\phi\, e^{-S_0[\phi] - S_I[\phi] + J\cdot\phi} = Z[J]}$$

Fórmula de Dyson

(eq. 108.3)

Solução da Teoria Livre

Para $S_I[\phi] = 0$

$$Z_0[J] = \int \mathcal{D}\phi\, e^{-S_0[J] + J\cdot\phi} = \int \mathcal{D}\phi\, \exp\left\{ -\frac{1}{2} \int d^4x \left[\partial_\mu\phi\, \partial_\mu\phi + m^2\phi^2 \right] + J\cdot\phi \right\}$$

$$= \int \mathcal{D}\phi\, \exp\left\{ -\frac{1}{2} \int d^4x\, \phi \overbrace{\left[-\partial_\mu\partial_\mu + m^2 \right]}^{\Delta^{-1}} \phi + J\cdot\phi \right\}$$

Note que:

$$-\frac{1}{2}\left(\phi - J\cdot\Delta\right)\cdot\Delta^{-1}\cdot\left(\phi - \Delta\cdot J\right) = -\frac{1}{2}\phi\,\Delta^{-1}\phi \underbrace{+\frac{1}{2}\phi\cdot J + \frac{1}{2}J\cdot\phi}_{J\cdot\phi} \underbrace{-\frac{1}{2}J\cdot\Delta\cdot J}_{\text{sobrando}}$$

Logo:

$$Z_0[J] = \int \mathcal{D}\phi\, \exp\left\{-\frac{1}{2}\underbrace{\left(\phi - J\cdot\Delta\right)}_{\phi'}\cdot\Delta^{-1}\cdot\left(\phi - \overbrace{\Delta\cdot J}^{\phi_{cl}}\right) + \frac{1}{2}J\cdot\Delta\cdot J\right\} =$$

$$(\mathcal{D}\phi' = \mathcal{D}\phi)$$

$$= e^{\frac{1}{2}J\Delta J}\underbrace{\int \mathcal{D}\phi'\, e^{-\frac{1}{2}\phi'\Delta^{-1}\phi'}}_{\langle 0|0\rangle_0} \quad \text{(eq 107.1)}$$

$$\boxed{Z_0[J] = e^{\frac{1}{2}J\Delta J}\langle 0|0\rangle_0} \quad \text{(eq. 109.1)}$$

$$Z_0[0] = \langle 0|0\rangle_0 = 1 \quad \text{(normalização)}$$

O propagador é tal que: $\Delta^{-1} = -\partial_\mu\partial_\mu + m^2$

e portanto:
$$\boxed{\Delta(x,y) = \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{ip(x-y)}}{p^2+m^2}} \quad \text{(eq. 109.2)}$$

que não tem polos. A rotação de volta para Minkowski, assim como no caso do oscilador forçado (pg 47) leva a polos ($|p| = \pm im$), então a rotação feita em p^0 deve ser de $(\pi/2 - \varepsilon)$ ao invés de $(\pi/2)$:

$$p_E^0 = e^{-i\left(\frac{\pi}{2}-\epsilon\right)}p^0 = -i\left(p^0 + i\epsilon\right)$$

$$p_E^2 + m^2 = (p_E^0)^2 + (\vec{p})^2 + m^2 = -(p^0 + i\epsilon)^2 + (\vec{p})^2 + m^2 = \underbrace{-(p^0)^2 + (\vec{p})^2}_{-p_\mu p^\mu} + m^2 - i\epsilon' = -p^2 + m^2 - i\epsilon$$

e obtemos (agora tudo no espaço de Minkowski):

$$p_E\cdot x_E = p_4 x_4 + \vec{p}\cdot\vec{x} = (-ip^0)(ix^0) + \vec{p}\cdot\vec{x} \to -p_\mu x^\mu \qquad p_0 \to -p_0$$

$$\boxed{\Delta(t_E = it, \vec{x}; y=0) = D_F(t,\vec{x}) = \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{i\, e^{-ipx}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}} \quad \text{(eq. 109.3)}$$

Teorema de Wick:

Vejamos que forma toma o teorema de Wick neste formalismo. Considere a função:

$$F[\{\phi\}] = \phi^2(x_1)\,\phi(x_2)\,\phi^4(x_3)$$

$$\langle 0|F[\{\phi\}]|0\rangle = \int \mathcal{D}\phi\; e^{-S_0[\phi]}\,\phi^2(x_1)\,\phi(x_2)\,\phi^4(x_3)$$

Note que: $$\frac{\delta}{\delta J(x_1)} e^{J\cdot\phi} = e^{J\cdot\phi}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\int d^4x\; J(x)\phi(x) = e^{J\cdot\phi}\,\phi(x_1)$$

$$J\cdot\phi = \int d^4x\; J(x)\phi(x)$$

$$\frac{\delta J(x)}{\delta J(x_1)} = \delta^4(x-x_1)$$

Logo:

$$\langle 0|F[\{\phi\}]|0\rangle = \left(\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\right)^2 \frac{\delta}{\delta J(x_2)}\left(\frac{\delta}{\delta J(x_3)}\right)^4 \underbrace{\int \mathcal{D}\phi\; e^{-S_0[\phi]+J\cdot\phi}}_{Z_0[J=0]}\Bigg|_{J=0}$$

teoria livre

Podemos, de fato, fazer o mesmo para uma função arbitrária (caso ela não seja um polinômio, podemos considerar que está definida por sua série de potências):

$$\boxed{{}_J\langle 0|F[\{\phi\}]|0\rangle_J = F\left[\left\{\frac{\delta}{\delta J}\right\}\right] Z_0[J]} \qquad \text{(eq. 110.1)}$$

Voltando então na fórmula de Dyson (eq. 108.3), temos:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi\, e^{-S_0[\phi]\underbrace{-S_I[\phi]}_{-\int d^4x\, V(\phi(x))}+J\cdot\phi} = {}_J\langle 0|\underbrace{e^{-\int d^4x\, V(\phi(x))}}_{F[\phi]}|0\rangle_J$$

$$\boxed{Z[J] = e^{-\int d^4x\, V\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)} Z_0[J] \overset{107.1}{=} \underbrace{e^{-\int d^4x\, V\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)}}_{\text{interação}}\;\underbrace{e^{\frac{1}{2}J\cdot\Delta\cdot J}}_{\text{parte livre}}} \qquad \text{(eq. 110.2)}$$

(compare com 88.1 - esta expressão gera correlatores essencialmente iguais ao numerador do lado direito daquela equação)

interação

parte livre (Δ é o propagador da teoria livre)

Não é muito óbvio, mas este é o teorema de Wick no formalismo de integrais de trajetória. De novo temos uma solução exata da teoria interagente (neste caso a função de partição), mas esta só é útil se pudermos expandir a exponencial da interação e truncar a expansão, ou seja, em teoria de perturbação.

aqui termina a Lecture 9 do Nastase

Regras de Feynman

Para perceber que a equação 110.2 é de fato equivalente ao teorema de Wick, vamos calcular algumas funções de green usando-a. Definindo a notação:

$$G_n^{(p)}(x_1, \dots, x_n)$$

em ordem p da expansão perturbativa

função de n pontos

Podemos obter estas funções a partir do funcional gerador, também calculado até alguma ordem em teoria de perturbação:

$$\boxed{Z[J] = e^{-\int d^4x\, V\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)}} e^{\frac{1}{2} J\cdot\Delta\cdot J} =$$

$$= \left[1 - \int d^4x\, V\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right) + \frac{1}{2!}\int d^4x\, V\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\int d^4x\, V\left(\frac{\delta}{\delta J(y)}\right) + \dots\right] e^{\frac{1}{2} J\cdot\Delta\cdot J} =$$

$$\equiv \boxed{Z_0[J] + Z_1[J] + Z_2[J] + \dots} \qquad \text{(eq. 111.1)}$$

$$\boxed{G_n^{(p)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta J(x_n)} Z_p[J]\Big|_{J=0}} \qquad \text{(eq. 111.2)}$$

O objeto mais simples que podemos calcular é:

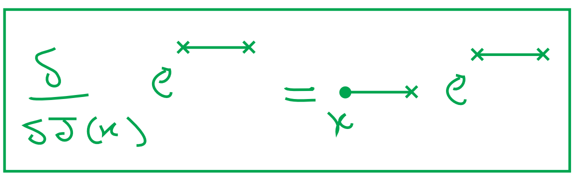
$$G_1^{(0)}(x_1)_J = \frac{\delta}{\delta J(x_1)} e^{\frac{1}{2} J\cdot\Delta\cdot J} = e^{\frac{1}{2} J\cdot\Delta\cdot J} \frac{\delta}{\delta J(x_1)}\left\{\frac{1}{2}\int d^4x\, d^4x'\; J(x)\Delta(x,x')J(x')\right\} =$$

$$= e^{\frac{1}{2} J\cdot\Delta\cdot J}\, \frac{1}{2}\int d^4x\, d^4x' \left\{\delta^4(x-x_1)\Delta(x,x')J(x') + J(x)\underbrace{\Delta(x,x')}_{\vdots}\delta^4(x'-x_1)\right\} =$$

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{ip(x-x')}}{p^2+m^2} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ip(x-x')}}{p^2+m^2}$$

$$= e^{\frac{1}{2} J\cdot\Delta\cdot J} \underbrace{\int d^4x\, \Delta(x_1,x)J(x)}_{(\Delta\cdot J)(x_1)} =$$

$$= (\Delta\cdot J)(x_1)\, e^{\frac{1}{2} J\cdot\Delta\cdot J}$$



que, para $J=0$, é nula: $\boxed{G_1^{(0)}(x_1) = 0}$ (eq. 111.3)

É fácil ver que todas as funções com um número ímpar de pontos são nulas, pois temos dois J's em Z e fazendo um número ímpar de derivadas vai sobrar sempre um J multiplicando tudo, o que anula a função quando fazemos $J=0$.

$$k=0,1,2,\dots \Rightarrow \boxed{G^{(0)}_{2k+1}(x_1,\dots,x_{2k+1})=0}$$ (eq. 112.1)

A função de 2 pontos fica:

$$G^{(0)}_2(x_1,x_2)_J=\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\underbrace{\frac{\delta}{\delta J(x_2)}e^{\frac{1}{2}J\cdot\Delta\cdot J}}_{G^{(0)}_1(x_2)_J}=\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\left[(\Delta\cdot J)(x_2)\,e^{\frac{1}{2}J\cdot\Delta\cdot J}\right]=$$

$$\frac{\delta}{\delta J(x_1)}(\Delta\cdot J)(x_2)=\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\int d^4x\;\Delta(x,x_2)J(x)=\int d^4x\,\Delta(x,x_2)\delta(x-x_1)=\Delta(x_1,x_2)$$

$$\boxed{\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\left(\underset{x_2}{\bullet}\!\!\longrightarrow\!\!\times\right)=\underset{x_2}{\bullet}\!\!-\!\!-\!\!\underset{x_1}{\bullet}}$$

$$=\Delta(x_1,x_2)\,e^{\frac{1}{2}J\cdot\Delta\cdot J}+(\Delta\cdot J)(x_2)(\Delta\cdot J)(x_1)\,e^{\frac{1}{2}J\cdot\Delta\cdot J}$$

$$\boxed{\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\frac{\delta}{\delta J(x_2)}e^{\times\!\!-\!\!\times}=\left(\underset{x_2}{\bullet}\!\!-\!\!\underset{x_1}{\bullet}+\underset{x_1}{\bullet}\!\!\to\!\!\times\;\underset{x_2}{\bullet}\!\!\to\!\!\times\right)e^{\times\!\!-\!\!\times}}$$

$$J=0\Rightarrow G^{(0)}_2(x_1,x_2)=\Delta(x_1,x_2)\Longleftrightarrow\underset{x_1}{\bullet}\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\underset{x_2}{\bullet}$$

A função de 3 pontos é zero, como já adiantamos, pois:

$$(J=0)$$

$$G^{(0)}_3(x_1,x_2,x_3)_J=\frac{\delta}{\delta J(x_3)}G^{(0)}_2(x_1,x_2)_J=\Big[\Delta(x_1,x_2)\overset{0}{\cancel{(\Delta\cdot J)(x_3)}}+\Delta(x_2,x_3)\overset{0}{\cancel{(\Delta\cdot J)(x_1)}}+$$
$$+\underset{0}{\cancel{(\Delta\cdot J)(x_2)}}\Delta(x_1,x_3)+\underbrace{(\Delta\cdot J)(x_2)(\Delta\cdot J)(x_1)(\Delta\cdot J)(x_3)}_{0}\Big]e^{\frac{1}{2}J\cdot\Delta\cdot J}$$

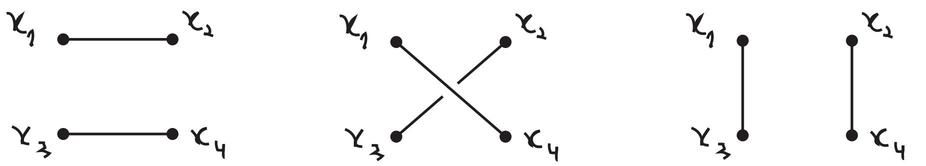
A próxima função não trivial é (exercício):

$$\frac{\delta}{\delta J(x_4)}\left[\underset{x_1}{\bullet}\!\!-\!\!\underset{x_2}{\bullet}\;\;\underset{x_3}{\bullet}\!\!\to\!\!\times\right]=\underset{x_1}{\bullet}\!\!-\!\!\underset{x_2}{\bullet}\;\;\underset{x_3}{\bullet}\!\!-\!\!\underset{x_4}{\bullet}$$

$$\boxed{\begin{aligned}G^{(0)}_4(x_1,x_2,x_3,x_4)&=\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\cdots\frac{\delta}{\delta J(x_4)}e^{\frac{1}{2}J\cdot\Delta\cdot J}\Big|_{J=0}=\\&=\Delta(x_1,x_2)\Delta(x_3,x_4)+\Delta(x_1,x_3)\Delta(x_2,x_4)+\Delta(x_1,x_4)\Delta(x_2,x_3)\end{aligned}}$$

(eq. 112.2)

Que, em diagramas, é exatamente o mesmo que obtivemos na pg 91:



de onde fica claro que a lógica por trás do Teorema de Wick (conectar os pontos externos de todas as formas possíveis) aqui é implementada pela regra do produto da derivada.

Passemos para o caso com interação, considerando agora a teoria $\lambda\phi^3$:

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{3!}\phi^3$$

(note que só queremos ver como saem as regras de Feynman, esta teoria é problemática pois o potencial não tem mínimo global, e energias infinitamente negativas são permitidas)

Em ordem λ, temos:

$$\boxed{Z_1[J] =} -\int d^4x\, V\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right) e^{\frac{1}{2}J\cdot\Delta\cdot J} = -\int d^4x\, \frac{\lambda}{3!}\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^3 e^{\frac{1}{2}J\cdot\Delta\cdot J} =$$

$$= -\frac{\lambda}{3!}\int d^4x \left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^2\left[(\Delta\cdot J)(x)\, e^{\frac{1}{2}J\cdot\Delta\cdot J}\right] = -\frac{\lambda}{3!}\int d^4x \left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\left[\Delta(x,x) + (\Delta\cdot J)^2(x)\right] e^{\frac{1}{2}J\cdot\Delta\cdot J} =$$

$$= -\frac{\lambda}{3!}\int d^4x \left[\Delta(x,x)(\Delta\cdot J)(x) + \Delta(x,x)(\Delta\cdot J)(x) + (\Delta\cdot J)(x)\,\Delta(x,x) + (\Delta\cdot J)^3(x)\right] e^{\frac{1}{2}J\cdot\Delta\cdot J} =$$

$$\boxed{= -\frac{\lambda}{3!}\int d^4x \left[3\Delta(x,x)(\Delta\cdot J)(x) + (\Delta\cdot J)^3(x)\right] e^{\frac{1}{2}J\cdot\Delta\cdot J}} \qquad \text{(eq. 113.1)}$$

Note que este funcional gerador agora tem sempre potências ímpares de *J*, de forma que as funções de *n* pontos serão nulas para *n* par:

$$\boxed{G^{(1)}_{2k}(x_1, \dots, x_{2k}) = 0} \;\; \lambda\phi^3 \qquad \text{(eq. 113.2)}$$

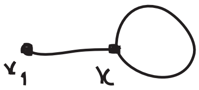
A função de 1 ponto é dada por:

$$G^{(1)}_1(x_1) = \frac{\delta}{\delta J(x_1)} Z_1[J]\bigg|_{J=0} = -\frac{\lambda}{3!}\int d^dx \left[3\Delta(x,x)\Delta(x,x_1) + 3\Delta(x,x)\cancelto{0}{(\Delta\cdot J)(x)}\,\cancelto{0}{(\Delta\cdot J)(x_1)} +\right.$$

$$\left. + 3\Delta(x,x_1)\cancelto{0}{(\Delta\cdot J)^2(x)} + (\Delta\cdot J)^3(x)\cancelto{0}{(\Delta\cdot J)(x_1)}\right] e^{\frac{1}{2}J\cdot\Delta\cdot J}\bigg|_{J=0} =$$

$$= -\frac{\lambda}{2}\int d^4x\, \Delta(x,x)\,\Delta(x,x_1)$$

Cujo diagrama é:



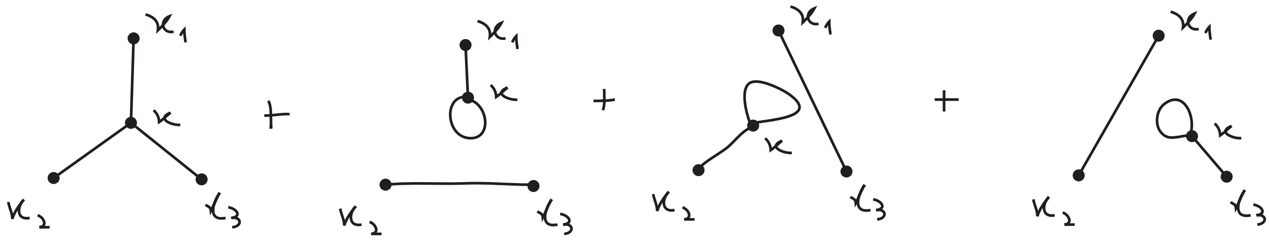
(tadpole diagram)

A função de 2 pontos dá zero (cheque!) e a função de 3 pontos é:

$$G_3^{(1)}(x_1,x_2,x_3) = \frac{\delta}{\delta J(x_1)}\frac{\delta}{\delta J(x_2)}\frac{\delta}{\delta J(x_3)} Z_1[J]\Big|_{J=0} =$$

$$= -\lambda \int d^dx \Big\{ \Delta(x,x_1)\Delta(x,x_2)\Delta(x,x_3) + \frac{1}{2}\Delta(x,x)\Big[\Delta(x,x_1)\Delta(x_2,x_3) + \Delta(x,x_2)\Delta(x_1,x_3) + \Delta(x,x_3)\Delta(x_1,x_2)\Big]\Big\}$$

que em diagramas fica:



Podemos obter as bolhas no vácuo calculando diretamente a função de 0 pontos, dada pelo próprio funcional gerador (pois fazemos zero derivadas), que em segunda ordem de perturbação é :

$$Z_2[J] = +\frac{1}{2!}\int d^dx \frac{\lambda}{3!}\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^3 \int d^dy \frac{\lambda}{3!}\left(\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)^3 \underbrace{e^{\frac{1}{2}J\cdot\Delta\cdot J}}$$

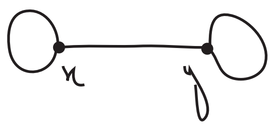
ao invés de fazer a regra da cadeia, posso pensar esta exponencial em termos de sua expansão. Como temos 6 derivadas em J e no fim faremos $J=0$, somente o termo com 6 J's vai sobreviver

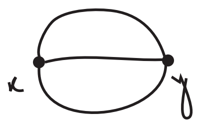
$$Z_2[J=0] = \frac{1}{2!}\int d^dx \frac{\lambda}{3!}\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^3 \int d^dy \frac{\lambda}{3!}\left(\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)^3 \Big\{ \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \overbrace{\int d^dz_1 d^dz_2 d^dz_3 d^dz'_1 d^dz'_2 d^dz'_3 \times J(z_1)\Delta(z_1,z'_1)J(z'_1)J(z_2)\Delta(z_2,z'_2)J(z'_2)J(z_3)\Delta(z_3,z'_3)J(z'_3)}^{(J\cdot\Delta\cdot J)^3} \Big\}_{J=0}$$

exercício

$$Z_2[J=0] = \frac{\lambda^2}{2^3}\int d^dx\, d^dy\, \Delta(x,x)\Delta(x,y)\Delta(y,y) + \frac{\lambda^2}{2\cdot 3!}\int d^dx\, d^dy\, \Delta^3(x,y)$$

em termos de diagramas (note que os fatores de simetria também já saíram certos):





Regras de Feynman no espaço das posições

Primeiramente vamos re-escrever o teorema de Wick em um formato mais útil para obter as regras de Feynman:

$$
\boxed{\begin{aligned}
Z[J] &= e^{\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\phi_{cl}}\cdot\Delta\cdot\frac{\delta}{\delta\phi_{cl}}}\left\{e^{-\int d^dx\, V(\phi_{cl})+J\cdot\phi_{cl}}\right\}\Big|_{\phi_{cl}=0} = \\
&= \mathrm{EXP}\left[\frac{1}{2}\int d^dx\, d^dy\, \Delta(x-y)\frac{\delta}{\delta\phi_{cl}(x)}\frac{\delta}{\delta\phi_{cl}(y)}\right]\left\{e^{-\int d^dx\, V(\phi_{cl})+J\cdot\phi_{cl}}\right\}\Big|_{\phi_{cl}=0}
\end{aligned}}
$$

(eq. 115.1)

eq. 110.2 $\rightarrow$ $Z[J] = e^{-\int d^dx\, V\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)}\left\{e^{\frac{1}{2}J\cdot\Delta\cdot J}\right\}$

não ficaremos carregando esta notação, mas perceba que este campo que fazemos ir a zero é o campo clássico, e:

$J\rightarrow 0 \Rightarrow \phi_{cl}=0$

Demonstração

Essencialmente queremos provar que, dadas duas funções de múltiplas variáveis (mesmo número para ambas):

$$
F(x) = F(x_1,\dots,x_n) \qquad G(y) = G(y_1,\dots,y_n)
$$

$$
\Rightarrow \boxed{F\left(\frac{d}{dx}\right)G(x) = G\left(\frac{d}{dy}\right)\left[F(y)\,e^{x\cdot y}\right]_{y=0}}
$$

(Lemma de Coleman)

(eq. 115.2)

PROVA: podemos considerar a série de Fourier de *F* e *G* e aí basta provar o Lemma acima para

$$
F(x) = e^{a\cdot x} \qquad G(y) = e^{b\cdot y}
$$

$$
\left(a_1\frac{d}{dx_1}+a_2\frac{d}{dx_2}+\dots\right)^m e^{b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+\dots}
$$

$$
\left\{\begin{aligned}
&\frac{d}{dx_i}e^{b\cdot x} = b_i\, e^{b\cdot x}\\
&\left(\frac{d}{dx_i}\right)^m e^{b\cdot x} = (b_i)^m e^{b\cdot x}
\end{aligned}\right.
$$

$$
F\left(\frac{d}{dx}\right)G(x) = e^{a\cdot\frac{d}{dx}}e^{b\cdot x} = \sum_m \frac{1}{m!}\left(a\cdot\frac{d}{dx}\right)^m e^{b\cdot x} = \underbrace{\sum_m\frac{1}{m!}(a\cdot b)^m}_{e^{a\cdot b}} e^{b\cdot x} = e^{b\cdot(a+x)}
$$

✓ ok!

$$
G\left(\frac{d}{dy}\right)\left[F(y)\,e^{x\cdot y}\right]_{y=0} = e^{b\cdot\frac{d}{dy}}\left[e^{a\cdot y}e^{x\cdot y}\right]_{y=0} = e^{b\cdot(a+x)}\left[e^{a\cdot y}e^{x\cdot y}\right]_{y=0} = e^{b\cdot(a+x)}
$$

//