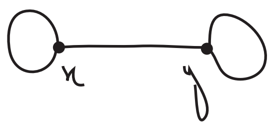
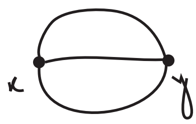
em termos de diagramas (note que os fatores de simetria também já saíram certos):





Regras de Feynman no espaço das posições

Primeiramente vamos re-escrever o teorema de Wick em um formato mais útil para obter as regras de Feynman:

$$\boxed{\begin{aligned} Z[J] &= e^{\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\phi_{cl}}\cdot\Delta\cdot\frac{\delta}{\delta\phi_{cl}}}\left\{ e^{-\int d^4x\, V(\phi_{cl}) + J\cdot\phi_{cl}} \right\}\Bigg|_{\phi_{cl}=0} = \\ &= \mathrm{EXP}\left[\frac{1}{2}\int d^4x\, d^4y\, \Delta(x-y)\frac{\delta}{\delta\phi_{cl}(x)}\frac{\delta}{\delta\phi_{cl}(y)}\right]\left\{ e^{-\int d^4x\, V(\phi_{cl}) + J\cdot\phi_{cl}} \right\}\Bigg|_{\phi_{cl}=0} \end{aligned}}$$

(eq. 115.1)

eq. 110.2 $\rightarrow$ $Z[J] = e^{-\int d^4x\, V\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)}\left\{ e^{\frac{1}{2}J\cdot\Delta\cdot J} \right\}$

não ficaremos carregando esta notação, mas perceba que este campo que fazemos ir a zero é o campo clássico, e:

$J \to 0 \Rightarrow \phi_{cl} = 0$

\\\\ Demonstração \\\\

Essencialmente queremos provar que, dadas duas funções de múltiplas variáveis (mesmo número para ambas):

$$F(x) = F(x_1, \dots, x_n) \qquad G(y) = G(y_1, \dots, y_n)$$

$$\Rightarrow \boxed{F\left(\frac{d}{dx}\right)G(x) = G\left(\frac{d}{dy}\right)\left[F(y)\, e^{x\cdot y}\right]_{y=0}}$$

(Lemma de Coleman)

(eq. 115.2)

PROVA: podemos considerar a série de Fourier de *F* e *G* e aí basta provar o Lemma acima para

$$F(x) = e^{a\cdot x} \qquad G(y) = e^{b\cdot y}$$

$$\left(a_1\frac{d}{dx_1} + a_2\frac{d}{dx_2} + \dots\right)^m e^{b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + \dots}$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{d}{dx_i}e^{b\cdot x} = b_i\, e^{b\cdot x} \\ &\left(\frac{d}{dx_i}\right)^m e^{b\cdot x} = (b_i)^m e^{b\cdot x} \end{aligned}\right.$$

$$F\left(\frac{d}{dx}\right)G(x) = e^{a\cdot\frac{d}{dx}}e^{b\cdot x} = \sum_m \frac{1}{m!}\left(a\cdot\frac{d}{dx}\right)^m e^{b\cdot x} = \underbrace{\sum_m \frac{1}{m!}(a\cdot b)^m}_{e^{a\cdot b}} e^{b\cdot x} = e^{b\cdot(a+x)}$$

✓ ok!

$$G\left(\frac{d}{dy}\right)\left[F(y)\, e^{x\cdot y}\right]_{y=0} = e^{b\cdot\frac{d}{dy}}\left[e^{a\cdot y}\, e^{x\cdot y}\right]_{y=0} = e^{b\cdot(a+x)}\left[e^{a\cdot y}\, e^{x\cdot y}\right]_{y=0} = e^{b\cdot(a+x)}$$

//

$$\underbrace{x = \{x_1, \dots, x_n\}}_{\text{vetor}} \to \underbrace{J(x)}_{\text{vetor}}$$

$$y = \{y_1, \dots, y_n\} \to \phi(x)$$

estamos generalizando de um conjunto discreto de variáveis para um contínuo

$$\boxed{F\left[\frac{\delta}{\delta J}\right] G[J] = G\left[\frac{\delta}{\delta \phi}\right] \left[F[\phi]\, e^{J \cdot \phi}\right]_{\phi=0}} \quad \text{(eq. 116.1)}$$

Logo, partindo do teorema de Wick na forma anterior:

$$Z[J] = \underbrace{e^{-\int d^d x\, V\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)}}_{F\left[\frac{\delta}{\delta J}\right]} \underbrace{\left\{ e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \right\}}_{G[J]} = \underbrace{e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \phi} \cdot \Delta \cdot \frac{\delta}{\delta \phi}}}_{G\left[\frac{\delta}{\delta \phi}\right]} \underbrace{\left\{ e^{-\int d^d x\, V(\phi)}\, e^{J \cdot \phi} \right\}_{\phi=0}}_{\left[F[\phi]\, e^{J \cdot \phi}\right]_{\phi=0}}$$

que é a eq. 115.1

aqui termina a Lecture 10 do Nastase

(nas pg. 89 e 90 ele mostra um outro jeito de obter (graficamente) o fator de simetria dos diagramas, que é equivalente ao que mostramos no contexto do formalismo canônico - recomendável para quem ainda não entendeu o fator de simetria)

Podemos então obter as regras de Feynman para um potencial mais geral:

$$V(\phi) = \lambda \phi^p$$

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = \left. \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \right|_{J=0} =$$

$$= \frac{\delta^n}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \left\{ e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \phi} \cdot \Delta \cdot \frac{\delta}{\delta \phi}} \left[e^{-\int d^d x\, V(\phi) + J \cdot \phi} \right]_{\phi=0} \right\}_{J=0} =$$

$$= e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \phi} \cdot \Delta \cdot \frac{\delta}{\delta \phi}} \left\{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n)\, e^{-\int d^d x\, V(\phi) + \cancel{J \cdot \phi}} \right\}_{\phi=0;\, J=0}$$

este termo já se tornou obsoleto, pois depois das derivadas em ϕ, qualquer termo que sobrar com *J* multiplicado vai ser nulo (quando *J=0*)

$$\boxed{G_n(x_1,\dots,x_n) = e^{\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\phi}\cdot\Delta\cdot\frac{\delta}{\delta\phi}} \left\{ \phi(x_1)\dots\phi(x_n)\, e^{-\int d^4x\, V(\phi)} \right\}_{\phi=0}} \quad \text{(eq. 117.1)}$$

Em ordem *N* de perturbação:

$$G_n^{(N)}(x_1,\dots,x_n) = e^{\underbrace{\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\phi}\cdot\Delta\cdot\frac{\delta}{\delta\phi}}} \left\{ \phi(x_1)\dots\phi(x_n)\frac{(-\lambda)^N}{N!}\int d^4y_1\dots d^4y_N\, \phi^p(y_1)\dots\phi^p(y_N) \right\}_{\phi=0}$$

estas derivadas vão agir sobre um produto de *Q* campos ϕ, onde:

$$Q = n + pN$$

Se aplicarmos mais do que *Q* derivadas a função se anula e se aplicamos menos do que *Q* derivadas também (pois nesse caso sobram ϕ's que serão levados a zero). Assim, da expansão da exponencial contendo Q derivadas temos (e note Q deve ser obrigatóriamente par pois temos duas derivadas na exponencial):

$(Q = 2q = n + pN)$

$$\boxed{\begin{aligned} G_n^{(N)}(x_1,\dots,x_n) = {} & \frac{1}{q!\,2^q}\int d^4z_1 d^4w_1\dots d^4z_q\, d^4w_q\, \frac{\delta}{\delta\phi(z_1)}\Delta(z_1-w_1)\frac{\delta}{\delta\phi(w_1)}\cdots\frac{\delta}{\delta\phi(z_q)}\Delta(z_q-w_q)\frac{\delta}{\delta\phi(w_q)}\times \\ & \times\left\{ \phi(x_1)\dots\phi(x_n)\frac{(-\lambda)^N}{N!}\int d^4y_1\dots d^4y_N\, \phi^p(y_1)\dots\phi^p(y_N) \right\}_{\phi=0} \end{aligned}}$$

(eq. 117.2)

Temos que agir com estas derivadas sobre todos os campos. Note que, quando aplicamos o par

$$\int d^4z_i\, d^4w_i\, \frac{\delta}{\delta\phi(z_i)}\Delta(z_i-w_i)\frac{\delta}{\delta\phi(w_i)}$$

sobre um par qualquer: $\phi(x)\phi(y)$

obtemos: $$\int d^4z_i\, d^4w_i\left[\delta^4(x-z_i)\,\delta^4(y-w_i)\,\Delta(z_i-w_i)+\delta^4(y-z_i)\,\delta^4(x-w_i)\,\Delta(z_i-w_i)\right]=$$

$$= \underbrace{2}\,\Delta(x-y)$$

como temos *q* fatores de *2* deste tipo, o 2^q em 117.2 é cancelado

O *q!* é cancelado pelo fato de termos *q!* formas de agir as *2q* derivadas nos *2q* campos (e pelo fato das coordenadas nas derivadas serem variáveis mudas de integração). Notem que novemente o que está acontecendo é que estamos conectando pontos externos e vértices de todas as formas possíveis.

Mesmo depois de levar em conta as repetições que cancelam $q!\,2^q$ ainda sobram muitos termos iguais: o fato de ainda termos N variáveis de integração mudas cancela o $N!$ advindo da expansão da exponencial com a interação e o fato de cada termo de interação conter p campos calculados no mesmo ponto introduz um $(p!)^N$ que cancelamos redefinindo:

$$\lambda = \frac{\lambda_p}{p!}$$

Sabemos (do formalismo canônico), que o cancelamento deste $N!(p!)^N$ não é exato, dependendo de detalhes das contrações escolhidas. Assim como antes definimos um fator de simetria:

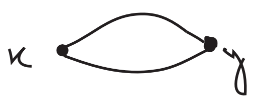
$$S = \frac{N!\,(p!)^N}{(\#\text{ de diagramas equivalentes})}$$

E este fator pode ser maior que 1 se tivermos menos diagramas equivalentes do que inocentemente se esperaria. Para ver como isto aparece aqui, considere o caso $n = 0$, $p = 2$, $N = 2$ $(Q = 4, q = 2)$:

$$A = \frac{1}{\underbrace{2!\,2^2}_{q}}\int dz_i\, dw_i\, dz_j\, dw_j\, dx\, dy\, \frac{\delta}{\delta\phi(z_i)}\Delta(z_i-w_i)\frac{\delta}{\delta\phi(w_i)}\frac{\delta}{\delta\phi(z_j)}\Delta(z_j-w_j)\frac{\delta}{\delta\phi(w_j)}\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)$$

(não confundir o cancelamento destes com o de $N!$ e $p!^N$)

de onde podemos extrair todos os termos que contribuem para:

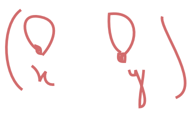


Inocentemente teríamos $2!$ advindo das integrais em x e y e $(2!)^2$ advindo do fato de termos dois campos em x e dois em y, para um total de 8 termos iguais. Mas veja:

$$A = \frac{1}{\cancel{8}\,4}\int dz_i\, dw_i\, dz_j\, dw_j\, dx\, dy\, \Delta(z_i-w_i)\Delta(z_j-w_j)\frac{\delta}{\delta\phi(z_i)}\frac{\delta}{\delta\phi(w_i)}\frac{\delta}{\delta\phi(z_j)}\times$$

$$\left\{\cancel{2}\,\delta(x-w_j)\phi(x)\phi(y)\phi(y) + \cancel{2}\,\delta(y-w_j)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\right\} =$$

ignoro os termos em que $\frac{\delta}{\delta\phi(z_j)}$ age em no mesmo campo em que agiu $\frac{\delta}{\delta\phi(w_j)}$ pois este contribuem para



$$= \frac{1}{\cancel{4}\,2}\int\cdots\int\Delta\Delta\frac{\delta}{\delta\phi(z_i)}\frac{\delta}{\delta\phi(w_i)}\left\{\cancel{2}\,\delta(x-w_j)\delta(z_j-y)\phi(x)\phi(y) + \cancel{2}\,\delta(y-w_j)\delta(z_j-x)\phi(x)\phi(y)\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\cdots\int\Delta\Delta\frac{\delta}{\delta\phi(z_i)}\times$$

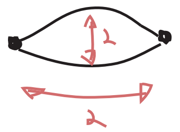
$$\times\left\{\delta(x-w_j)\delta(z_j-y)\left[\delta(x-w_i)\phi(y)+\delta(y-w_i)\phi(x)\right] + \delta(y-w_j)\delta(z_j-x)\left[\delta(w_i-x)\phi(y)+\delta(w_i-y)\phi(x)\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\cdots\int \Delta\Delta\Big\{\delta(x-w_j)\delta(z_j-y)\delta(x-w_i)\delta(y-z_i)+\delta(x-w_j)\delta(z_j-y)\delta(y-w_i)\delta(x-z_i)\,+$$

$$+\,\delta(y-w_j)\delta(z_j-x)\delta(w_i-x)\delta(y-z_i)+\delta(y-w_j)\delta(z_j-x)\delta(w_i-y)\delta(z_i-x)\Big\} =$$

$$= \frac{1}{2}\int d^4x\, d^4y\; 4\,\Delta^2(x-y) = 2\int d^4x\, d^4y\;\Delta^2(x-y)$$

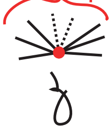
O que é 4 vezes menos termos iguais do que esperávamos. O fator de simetria aqui é 4. De fato:



(mais uma vez há uma outra forma de olhar diagramas para obter o fator de simetria na pg 94 do Nastase)

Vemos que estamos obtendo as mesmas regras do formalismo canônico (só que no espaço Euclideano):

(1) para cada propagador: $x_1 \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, x_2 = \Delta(x_1-x_2) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{ip(x_1-x_2)}}{p^2+m^2}$

(2) para cada vértice: p linhas  $= (-\lambda_p)\int d^4y$

(3) para cada ponto externo: $x_1 \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\!- \;= 1$

(4) divida tudo pelo fator de simetria

(eq. 119.1)

Regras de Feynman no espaço dos momentos

Conforme visto na pg 107:

$$\tilde{G}(p_1,\ldots,p_n) = (2\pi)^4\,\delta^4(p_1+\ldots+p_n)\,\underbrace{G(p_1,\ldots,p_n)}_{\text{satisfazem conserv. de momento}}$$

O propagador Euclideano é (eq. 94.2):

$$\Delta(y-x) = \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{ip(y-x)}}{p^2+m^2} \quad\therefore\quad \boxed{\Delta(p) = \frac{1}{p^2+m^2}} \qquad (\text{eq. } 119.2)$$

E adotamos novamente a convenção para direção de momento (lembrando que estamos no Euclideano e $p_\mu \cdot x^\mu = -p_E\cdot x_E$):

$$\underset{x}{\bullet}\!\!\longrightarrow\; = e^{-ipx} \qquad\qquad \longrightarrow\!\!\underset{y}{\bullet}\; e^{ipy}$$

Como derivamos as regras no espaço dos momentos a partir das regras no espaço das posições, e já mostramos que estas são as mesmas obtidas na quantização canônica, não há novidade alguma aqui.

Regras de Feynman para uma teoria Bosônica em geral

Suponha agora uma teoria mais geral composta de um número arbitrário de campos bosônicos (veremos adiante que a quantização de campos fermiônicos é mais complicada), que agruparemos usando um índice *r*:

$$\phi_r$$

Ex: $\phi = \{ \phi_1, \phi_2, \phi_3 = A_0, \phi_4 = A_1, \phi_5 = A_2, \phi_6 = A_3 \} =$

$= \{ \phi_1, \phi_2, A_\mu \}$

Com a ação livre dada por:

$$S_0 = \frac{1}{2} \int d^4x \sum_{r,s} \phi_r(x) \Delta^{-1}_{r,s} \phi_s(x)$$

Ex: $$\Delta^{-1} = \begin{pmatrix} -\partial_\mu \partial^\mu + m_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\partial_\mu \partial^\mu + m_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(g_{\mu\nu} \Box - \partial_\mu \partial_\nu \right)_{4\times 4} \end{pmatrix}$$

Este operador deve ser invertido para podermos encontrar os propagadores. Quando ele não é inversível, em geral existem problemas na definição dos campos. Vamos assumir que conseguimos resolver estes problema e encontrar uma base apropriada, aonde ele pode ser invertido (mais tarde veremos um exemplo específico, o campo do fóton). A interação também pode ser escrita em um forma genérica:

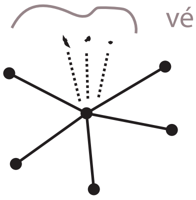
$$\underbrace{S_{r_1,\dots,r_p}}_{\text{Interação envolvendo } p \text{ campos}} = \int d^dz \underbrace{A_{r_1,\dots,r_p}}_{\text{pode conter constantes ou operadores diferenciais}} \phi_{r_1}(z) \cdots \phi_{r_p}(z)$$

não há soma subentendida!

pode conter constantes (acoplamentos) ou operadores diferenciais agindo em um ou mais campos (o que torna isso bem mais geral que ϕ^n)

Interação envolvendo *p* campos (r_i e r_j são genéricos, não necessariamente iguais nem diferentes)

Independentemente da forma de $A_{\{r_i\}}$, esta interação colocará *p* campos agindo no mesmo ponto, o que leva a um vértice com *p* linhas saindo. A forma mais simples de ver a regra para o vértice é considerar a função com *p* pontos externos, especificamente o diagrama abaixo:



Podemos então seguir o raciocínio usado para passar de 117.1 para 117.2. A generalização de 117.1, agora que temos vários campos, é:

$$G_n\left(\{r_1,x_1\}\dots\{r_n,x_n\}\right) = e^{\frac{1}{2}\sum_{r,s}\frac{\delta}{\delta\phi_r}\Delta_{rs}\frac{\delta}{\delta\phi_s}}\left\{\phi_{r_1}(x_1)\dots\phi_{r_n}(x_n)\, e^{-\int d^4z\, A_{r_1\dots r_p}\phi_{r_1}\dots\phi_{r_p}}\right\}_{\phi=0}$$

a função depende das coordenadas dos pontos externos mas também de qual campo age ali

Especializando para o caso com apenas um vértice (N = 1) e número (e tipo) de pontos externos iguais aos da interação temos (n = p):

$$G_p^{(1)}\left(\{r_1,x_1\}\dots\{r_p,x_p\}\right) = e^{\frac{1}{2}\sum_{r,s}\frac{\delta}{\delta\phi_r}\Delta_{rs}\frac{\delta}{\delta\phi_s}}\left\{\phi_{r_1}(x_1)\dots\phi_{r_p}(x_p)\,(-)\overbrace{\int d^4z\, A_{r_1\dots r_p}\phi_{r_1}\dots\phi_{r_p}}^{S_{r_1\dots r_p}}\right\}_{\phi=0}$$

o produto escalar tem integrais: $\int dy_1\, dy_2 \frac{\delta}{\delta\phi(y_1)}\frac{\delta}{\delta\phi(y_2)}$

Agora basta lembrar que a exponencial com as derivadas deve ser expandida e o único termo que sobrevive é aquele que tem o número (e tipo) de derivadas que coincide com o que está dentro das chaves. O efeito destas chaves vai ser conectar pontos externos e internos de todas as formas possíveis, mas só estamos interessados no diagrama acima, onde cada ponto externo é conectado ao vértice. Neste caso cada par de derivadas vai produzir um propagador, assim como vimos na página 117, mas pode haver uma outra contribuição, dependendo de A. O resultado será da forma:

$$G_p^{(1)}\left(\{r_1,x_1\}\dots\{r_p,x_p\}\right) = \int d^4y_1\dots d^4y_p\, \Delta_{rs}(x_1-y_1)\dots\Delta_{rs}(x_p-y_p)\,\times$$

$$\times\ \underbrace{(-)\frac{\delta}{\delta\phi_{r_1}(y_1)}\dots\frac{\delta}{\delta\phi_{r_p}(y_p)}S_{r_1\dots r_p}}$$

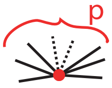
estou ignorando estes índices que seriam fixados por deltas de Kronecker, assim como as deltas de Dirac fixam as coordenadas

Isso é o que chamamos de "regra do vértice" e no caso de teorias $\lambda\phi^p$, obtemos (veja pag 117)

$$\int d^4z\ \lambda\ \delta(y_1-z)\dots\delta(y_p-z)$$

Mas para uma teoria mais geral pode ser mais complicado. Passando para o espaço dos momentos temos:

p linhas



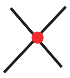
$$= -\int d^4x_1 \dots d^4x_p \, e^{i(k_1x_1+\dots+k_px_p)} \frac{\delta}{\delta\phi_{\pi_1}(x_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta\phi_{\pi_p}(x_p)} S_{\pi_1\dots\pi_p}$$

a menos de um fator $(2\pi)^4\delta^4(k_1+\dots+k_4)$

(eq. 122.1)

Um exemplo trivial seria:

$$S_I = \frac{\lambda_4}{4!}\int d^4x\, \phi^4(x)$$



$$= -\int d^4x_1 \dots d^4x_4 \; e^{i(k_1x_1+\dots+k_4x_4)} \frac{\delta}{\delta\phi(x_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta\phi(x_4)} \left[\frac{\lambda_4}{4!}\int d^4x\, \phi^4(x)\right] =$$

$$\bullet = \frac{\lambda_4}{3!}\int dx \frac{\delta}{\delta\phi(x_1)}\cdots\frac{\delta}{\delta\phi(x_3)}\phi^3(x)\,\delta(x-x_4) = \frac{\lambda_4}{2!}\int dx \frac{\delta}{\delta\phi(x_1)}\frac{\delta}{\delta\phi(x_2)}\phi^2(x)\,\delta(x-x_4)\,\delta(x-x_3) = \dots$$

$$= -\int dx_1 \dots dx_4 \, dx \, e^{i(k_1x_1+\dots+k_4x_4)} \lambda_4\, \delta(x-x_1)\delta(x-x_2)\delta(x-x_3)\delta(x-x_4) =$$

$$= -\lambda_4 \int d^4x\, e^{ix(k_1+\dots+k_4)} = -(2\pi)^4\delta^4(k_1+\dots+k_4)\,\lambda_4$$

Quantização de um campo fermiônico

(Nastase 12 e 13; Peskin 3.1-3.4 [campo clássico], 3.5 [quant. canônica], 9.5 [quant. funcional]; Ryder 6.7; Ramond 5.2-5.3)

Comecemos definindo um spinor. Vimos (pg 14) que é possívivel construir uma representação do grupo de Lorentz tal que:

$$\boxed{\psi'(x') = M_D(\Lambda)\,\psi(x)}$$

(eq. 122.2)

$$M_D(\Lambda) = e^{-\frac{i}{2}\theta_{\mu\nu}S^{\mu\nu}}$$

$$S^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]$$

matrizes de Dirac

(eq. 122.3)

As matrizes de Dirac satisfazem a álgebra de Clifford:

$$\boxed{\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\hat{1}}$$

(eq. 122.4)

E as matrizes $S^{\mu\nu}$ satizfazem a álgebra de Lorentz: