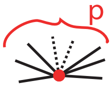
p linhas

 $= -\int d^4x_1 \dots d^4x_p \, e^{i(k_1x_1+\dots+k_px_p)} \frac{\delta}{\delta\phi_{\pi_1}(x_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta\phi_{\pi_p}(x_p)} S_{\pi_1\dots\pi_p}$

a menos de um fator $(2\pi)^4\delta^4(k_1+\dots+k_4)$

(eq. 122.1)

Um exemplo trivial seria:

$$S_I = \frac{\lambda_4}{4!}\int d^4x\, \phi^4(x)$$

 $= -\int d^4x_1 \dots d^4x_4 \; e^{i(k_1x_1+\dots+k_4x_4)} \frac{\delta}{\delta\phi(x_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta\phi(x_4)} \left[\frac{\lambda_4}{4!}\int d^4x\, \phi^4(x) \right] =$

$$● = \frac{\lambda_4}{3!}\int dx \frac{\delta}{\delta\phi(x_1)}\cdots\frac{\delta}{\delta\phi(x_3)}\phi^3(x)\,\delta(x-x_4) = \frac{\lambda_4}{2!}\int dx \frac{\delta}{\delta\phi(x_1)}\frac{\delta}{\delta\phi(x_2)}\phi^2(x)\,\delta(x-x_4)\,\delta(x-x_3) = \dots$$

$$= -\int dx_1 \dots dx_4\, dx\, e^{i(k_1x_1+\dots+k_4x_4)} \lambda_4\, \delta(x-x_1)\delta(x-x_2)\delta(x-x_3)\delta(x-x_4) =$$

$$= -\lambda_4 \int d^4x\, e^{ix(k_1+\dots+k_4)} = -(2\pi)^4\delta^4(k_1+\dots+k_4)\,\lambda_4$$

Quantização de um campo fermiônico

(Nastase 12 e 13; Peskin 3.1-3.4 [campo clássico], 3.5 [quant. canônica], 9.5 [quant. funcional]; Ryder 6.7; Ramond 5.2-5.3)

Comecemos definindo um spinor. Vimos (pg 14) que é possívivel construir uma representação do grupo de Lorentz tal que:

$$\boxed{\psi'(x') = M_D(\Lambda)\,\psi(x)} \quad \text{(eq. 122.2)}$$

$$M_D(\Lambda) = e^{-\frac{i}{2}\theta_{\mu\nu}S^{\mu\nu}}$$

$$S^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\underbrace{\gamma^\mu}, \underbrace{\gamma^\nu}]$$

matrizes de Dirac

(eq. 122.3)

As matrizes de Dirac satisfazem a álgebra de Clifford:

$$\boxed{\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\hat{1}} \quad \text{(eq. 122.4)}$$

E as matrizes $S^{\mu\nu}$ satizfazem a álgebra de Lorentz:

$$\boxed{[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i\left[g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho}\right]}$$ (eq. 123.1)

Todas as expressões acima valem para um número arbitrário de dimensões e qualquer métrica (Minkowski ou Euclideana), o que vai mudar é a forma das matrizes de Dirac. Por exemplo, em três dimensões euclideanas conseguimos satisfazer 122.4 com:

$$\gamma^j = \sigma^j$$ ← Pauli

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} + i\epsilon^{ijk}\sigma^k$$

$$\{\gamma^i, \gamma^j\} = \sigma^i\sigma^j + \sigma^j\sigma^i = 2\delta^{ij} + \cancel{i\epsilon^{ijk}\sigma^k} + \cancel{i\epsilon^{jik}\sigma^k} = 2\delta^{ij}$$

e neste caso: $$\boxed{S^{ij} = \frac{i}{4}\underbrace{[\gamma^i, \gamma^j]}_{[\sigma^i, \sigma^j]} = -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\sigma^k}$$ (eq. 123.2)

Note que isto é a rotação em 3D de um spin 1/2

a representação que vai nos interessa é dada por:

$$\boxed{\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}}$$ (eq. 123.3)

Representação Quiral ou de Weyl

$1 \to 1_{2\times 2}$

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$$

$$\boxed{\begin{aligned}(\gamma^0)^\dagger &= \gamma^0 \\ (\gamma^i)^\dagger &= -\gamma^i\end{aligned}}$$ (eq. 123.4)

E podemos definir 4-vetores, para as matrizes 2x2: $$\boxed{\begin{aligned}\sigma^\mu &= (1, \sigma^i) \\ \bar{\sigma}^\mu &= (1, -\sigma^i)\end{aligned}}$$ (eq. 123.5)

De forma a re-escrever 123.3 na forma compacta: $$\boxed{\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}}$$ (eq. 123.6)

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \begin{pmatrix} \sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l}\{\mu=0,\nu=i\}\\ \text{ou}\\ \{\nu=0,\mu=i\}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix}-\sigma^i & 0\\ 0 & \sigma^i\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\sigma^i & 0\\ 0 & -\sigma^i\end{pmatrix}=0$$

$$\mu=0,\ \nu=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}1_{2\times2} & 0\\ 0 & 1_{2\times2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1_{2\times2} & 0\\ 0 & 1_{2\times2}\end{pmatrix}=2\,\hat{1}_{4\times4}$$

$$\mu=i,\ \nu=j \Rightarrow \begin{pmatrix}-\sigma^i\sigma^j & 0\\ 0 & -\sigma^i\sigma^j\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\sigma^j\sigma^i & 0\\ 0 & -\sigma^j\sigma^i\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}\{\sigma^i,\sigma^j\} & 0\\ 0 & \{\sigma^i,\sigma^j\}\end{pmatrix}=-2\delta^{ij}\,\hat{1}_{4\times4}$$

$$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}=2g^{\mu\nu}\,\hat{1}_{4\times4} \qquad g^{\mu\nu}=\mathrm{Diag}\{1,-1,-1,-1\}\ \text{(Minkowski 4D)}$$

Também nos interessa definir

$$\boxed{\gamma^5=i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3} \quad (\text{eq. } 124.1)$$

que, nesta representação (usando eq. 123.6), é: $\gamma^5=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ (que de fato é o objetivo desta rep. Outra rep. popular é a em que γ^0 é diagonal ao invés de γ^5 - cuidado ao comparar livros)

O gerador $S^{\mu\nu}$ agora é um objeto mais complicado (que deve conter rotações e boosts), note que a parte puramente espacial contém as rotações 3D e:

$$\boxed{S^{ij}=\frac{i}{4}[\gamma^i,\gamma^j]=\frac{i}{4}\begin{pmatrix}-[\sigma^i,\sigma^j] & 0\\ 0 & -[\sigma^i,\sigma^j]\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\begin{pmatrix}\sigma^k & 0\\ 0 & \sigma^k\end{pmatrix}} \quad (\text{eq. } 124.2)$$

Note que isto é o mesmo que temos em 123.2, repetido 2 vezes (se eu aplicar isto num objeto de quatro componentes, as duas "de cima" rodam como um spin 1/2 e as duas "de baixo" também, independentemente)

O próximo passo consiste em construir invariantes de Lorentz com o campo ψ. Infelizmente a primeira opção que vem a mente:

$$\psi^\dagger\psi \to \psi^\dagger \underbrace{M_D^\dagger(\Lambda)M_D(\Lambda)}_{\text{M não é unitária pois alguns elementos de S não são hermiteanos (os boosts)}}\psi \neq \psi^\dagger\psi$$

no entanto não é difícil obter um invariante, definindo:

$$\boxed{\bar{\psi}=\psi^\dagger\gamma^0} \quad (\text{eq. } 124.3)$$

de forma que:

$$=\psi^\dagger\gamma^0\psi \to \psi^\dagger \overbrace{M_D^\dagger(\Lambda)\gamma^0}^{=\gamma^0 M_D^{-1}(\Lambda)\ \text{(veja Peskin, pg 43)}} M_D(\psi)=\bar{\psi}\psi$$

Também podemos provar que: $\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi \longrightarrow \Lambda^{\nu}{}_{\mu}\,\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$

E que, portanto, a contração dele com um vetor qualquer é invariante: $V_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi \rightarrow V_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$

Outros invariantes podem ser obtidos como potências destes no entanto, se quisermos uma teoria renormalizável, somente aceitamos os termos com dois ψ (esta afirmação terá que aguardar o curso de TQCII para ser provada, assim como a explicação do que é "renormalização")

Com isto podemos construir uma ação:

$$\boxed{S_{\psi} = \int d^4x\, \bar{\psi}(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi} \quad (\text{eq. } 125.1) \qquad \boxed{\not{\partial} = \gamma^{\mu}\partial_{\mu}}$$

Cuja solução clássica é dada pela equação de Dirac:

$$\boxed{(i\not{\partial} - m)\psi = 0} \quad (\text{eq. } 125.2)$$

basta fazer a variação em relação a $\bar{\psi}$, também podemos obter a equação conjugada, para $\bar{\psi}$, variando ψ.

Espinores de Weyl e Majorana

Já vimos que, nesta representação (124.2) :

$$S^{ij} = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}$$

Também vale que: $\boxed{S^{0i} = -S^{i0} = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix}}$ Boosts de Lorentz (eq. 125.3)

o que deixa óbvio (note a estrutura bloco diagonal) que a representação de Dirac é redutível (este é o grande trunfo desta representação. Podemos definir:

$$\boxed{\psi_D^{4\times1} \equiv \begin{pmatrix} \psi_L^{2\times1} \\ \psi_R^{2\times1} \end{pmatrix}} \qquad \psi_L^{4\times1} \equiv \begin{pmatrix} \psi_L^{2\times1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \psi_R^{4\times1} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_R^{2\times1} \end{pmatrix}$$

(eq. 125.4)

$$\psi_D^{4\times1} = \psi_L^{4\times1} + \psi_R^{4\times1}$$

cuidado com o abuso de notação, em geral fica claro na equação se estamos falando do objeto de dois componentes ou o objeto de quatro componentes, então é comum suprimir este índice.

Observe as expressões para as rotações e boosts: as duas representações obtidas tem exatamente a mesma rotação, mas os boosts tem o sinal invertido. Note também que:

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} P_L &\equiv \frac{1-\gamma_5}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ P_R &\equiv \frac{1+\gamma_5}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}} \quad (\text{eq. } 125.5)$$

$$\therefore \quad \boxed{\psi_L = P_L\,\psi_D \qquad \psi_R = P_R\,\psi_D}$$ (eq. 126.1)

$$\boxed{\begin{array}{l} P_L^2 = P_L \qquad P_R^2 = P_R \\ P_L P_R = P_R P_L = 0 \\ P_L + P_R = 1 \end{array}}$$

$$\psi_L + \psi_R = P_L\psi_D + P_R\psi_D = (P_L + P_R)\psi_D = \psi_D$$

(operadores de projeção)
(eq. 126.2)

Além destas duas representações irredutíveis (chamada de Espinores de Weyl), ainda temos uma terceira, definida pela propriedade:

$$(i\partial\!\!\!/ - m)\psi = 0 \xrightarrow[\text{transponho}]{\text{hermiteano conjugado}} (i\gamma^{\mu T}\partial_\mu + m)\bar{\psi}^T = 0$$

$$\underbrace{\exists\, C \,/\, C\gamma^\mu C^{-1} = (-\gamma^\mu)^T} \Rightarrow (i\partial\!\!\!/ - m)\,C\bar{\psi}^T = 0 \qquad \psi^c \equiv C\bar{\psi}^T \qquad \boxed{\psi^c = C\gamma^0\psi^*}$$

condição de realidade
(eq. 126.3)

A matriz C é chamada de matriz de conjugação de carga e satisfaz as seguintes propriedades (válidas em Minkowski 4D):

(Bjorken and Drell, 5.2)

$$\boxed{C\gamma^\mu C^{-1} = (-\gamma^\mu)^T}$$ (eq. 126.4)

$$\xrightarrow{D=4} \boxed{C^T = -C}$$

(P. West, Strings and Branes, pgs 104-105)

Na representação de Weyl, satisfazemos estas equações escolhendo:

$$C = \begin{pmatrix} -\sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} = \gamma^0\gamma^2$$

$$\sigma^{2T} = -\sigma^2$$

nesta representação

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -\sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} = C = C^\dagger \qquad C^2 = 1 \qquad C^{-1} = C = -C^T$$

Os espinores que satisfizerem esta condição são chamados Espinores de Majorana, e no caso deles não podemos tratar $\bar{\psi}$ como independente de ψ (os dois estão ligados pela eq 126.3) e temos que modificar a ação para obter um termo cinético canonicamente normalizado:

$$S_\psi = \frac{1}{2}\int d^4x\, \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi$$

Esse fator global na ação não parece ter importância, e de fato não afeta a solução clássica, mas quando quantizarmos faz toda diferença ter um fator 2 no operador que estamos invertendo (obtemos um propagador que é o dobro).

Representações e Fenomenologia

Qual destas representações descreve os férmions na natureza? A resposta depende de qual partícula você quer descrever. Para começar note que:

$$\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = \frac{1}{2}\bar{\psi}_L i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L + \frac{1}{2}\bar{\psi}_R i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R - \frac{m}{2}\bar{\psi}_L\psi_R - \frac{m}{2}\bar{\psi}_R\psi_L$$

$$\{\gamma^\mu,\gamma^5\}=0 \Rightarrow P_L\gamma^\mu = \gamma^\mu P_R$$

$$\bar{\psi}_L\psi_R = (P_L\psi)^\dagger\gamma^0(P_R\psi) = \psi^\dagger \underbrace{P_L^\dagger}_{P_L}\gamma^0 P_R\psi = \bar{\psi}P_R^2\psi = \bar{\psi}\psi$$

$$\bar{\psi}_R\gamma^\mu\psi_R = (P_R\psi)^\dagger\gamma^0\gamma^\mu(P_R\psi) = \psi^\dagger P_R\gamma^0\gamma^\mu P_R\psi = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

$$\bar{\psi}_{\substack{L\\R}}\psi_{\substack{L\\R}} = 0 \qquad \bar{\psi}_{\substack{R\\L}}\gamma^\mu\psi_{\substack{L\\R}} = 0$$

Note que o termo de massa mistura os campos R e L (isso quer dizer que as equações de movimento para ambos vão ser acopladas). O que quer dizer que é "incomodo" descrever partículas com massa em termos de spinores de Weyl, que é bem mais útil para partículas sem massa.

Os espinores de Majorana podem ser usados para descrever partículas completamente neutras (nenhuma simetria local interna) e que são a própria antipartícula.

Soluções (Clássicas) da Equação de Dirac

Comecemos notando que o operador de Dirac: $\hat{O}_D = i\not{\partial} - m$

e seu adjunto: $\hat{\bar{O}}_D = -i\not{\partial} - m$

tem a propriedade: $\hat{O}_D\hat{\bar{O}}_D = -(i\not{\partial}-m)(i\not{\partial}+m) = (\partial^2 + m^2) = \hat{O}_{KG} = \hat{\bar{O}}_D\hat{O}_D$

$$\not{\partial}\not{\partial} = \gamma^\mu\gamma^\nu\partial_\mu\partial_\nu = \frac{1}{2}\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}\partial_\mu\partial_\nu = g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu = \partial^2$$

simetria

o que quer dizer que qualquer campo que satisfaça $\hat{O}_D\psi = 0$ ou $\hat{\bar{O}}_D\bar{\psi} = 0$ vai satisfazer também:

$$\hat{O}_{KG}\psi = 0$$

Ou seja, as soluções da equação de Dirac têm que ser também soluções da equação de Klein-Gordon. Isso nos diz que estas são do tipo:

$$K e^{\pm ip\cdot x} \longleftrightarrow p^2 - m^2 = 0$$

Onde claramente o coeficiente K deve ser uma matriz, pois estes campos se transformam sob aplicação das matrizes de Dirac. Parametrizemos primeiro as soluções de frequência positiva:

$$\psi(x) = u(p)e^{-ipx} \qquad \begin{array}{c} p^2 - m^2 = 0 \\ p^0 > 0 \end{array}$$

$$(i\not{\partial} - m)\psi(x) = 0 \Rightarrow (\not{p} - m)u(p) = 0$$

$\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$

As duas soluções desta equação podem ser compactadas em:

$$s = 1,2 \Rightarrow \boxed{u^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi^s \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\xi^s \end{pmatrix}} \qquad \Leftrightarrow \xi^\dagger\xi = 1$$

(eq. 128.1)

$\sqrt{A} = B \qquad B^2 = A$

(matrizes)

Determina o spin (depois que quantizarmos e pudermos falar em partícula), e.g. spin up e down ao longo do eixo z:

$$\begin{cases} \xi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \xi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Que no referencial de repouso vira:

$$u^s(p_0) = \sqrt{m}\begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix}$$

$(p\cdot\sigma)(p\cdot\bar{\sigma}) = p^2 = m^2$

$\vec{p} = 0 \quad p^0 = m$

$\left(\sqrt{p\cdot\sigma} = \sqrt{m\cdot\hat{1}}\right)$

$$u^1(p) = \sqrt{m}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u^2(p) = \sqrt{m}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

As duas soluções de frequência negativa são

$$\psi(x) = v(p)\, e^{+ipx} \qquad p^2 - m^2 = 0 \quad p^0 > 0$$

$$\Downarrow$$

$$(\not{p} + m)\, v(p) = 0$$

$$\boxed{v^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\,\eta^s \\ -\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\eta^s \end{pmatrix}}$$

(eq. 128.2)

$$\eta^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \eta^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que no referencial de repouso:

$$v^s(p_0) = \sqrt{m}\begin{pmatrix} \eta^s \\ -\eta^s \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow \eta^\dagger \eta = 1$

$$v^1(p) = \sqrt{m}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad v^2(p) = \sqrt{m}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

As condições de normalização (usadas para obter os ξ acima) são:

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{u}^r(p)\, u^s(p) &= 2m\,\delta^{rs} \\ \bar{v}^r(p)\, v^s(p) &= -2m\,\delta^{rs} \end{aligned}}$$

(eq. 128.3)

Ou, em termos de $u^\dagger$ e $v^\dagger$ (mais gerais, valem para partículas sem massa):

$$\boxed{\begin{aligned} u^{r\dagger}(p)\, u^s(p) &= 2E_p\,\delta^{rs} \\ v^{r\dagger}(p)\, v^s(p) &= 2E_p\,\delta^{rs} \end{aligned}}$$

(eq. 128.4)

E valem:

$$\boxed{\begin{aligned} &\bar{u}^r(p)\, v^s(p) = \bar{v}^r(p)\, u^s(p) = 0 \\ &u^{r\dagger}(p)\, v^s(p) \neq 0 \qquad v^{r\dagger}(p)\, u^s(p) \neq 0 \\ &u^{r\dagger}(p^0,\vec{p})\, v^s(p^0,-\vec{p}) = v^{r\dagger}(p^0,-\vec{p})\, u^s(p^0,\vec{p}) = 0 \end{aligned}}$$

(eq. 128.5)

Quantização do campo de Dirac

Sabemos (olhando as transformações sobre rotação em 3D) que este campo descreve partículas de spin 1/2, e que portanto devem obedecer estatística de Fermi. Em termos da quantização canônica isso significa que devemos usar anticomutadores ao invés de comutadores para fazer a quantização

é bastante rápido mostrar que, usando: $[\psi_\alpha(\vec{x}), \psi_\beta^\dagger(\vec{y})] = \delta^3(\vec{x}-\vec{y})\,\delta_{\alpha\beta}$

(Peskin 3.5, até eq. 3.90)

$x^0 = y^0$

chegamos a $H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s \left(E_p\, a_p^{s\dagger} a_p^s - E_p\, b_p^{s\dagger} b_p^s \right)$

operadores de criação e aniq.

energia abitrariamente negativa!

e que isso é resolvido com a quantização correta: $\{\psi_\alpha(\vec{x}), \psi_\beta^\dagger(\vec{y})\} = \delta^3(\vec{x}-\vec{y})\,\delta_{\alpha\beta}$

que, consistentemente, também garante que não consigamos criar duas partículas no mesmo estado, implementando o princípio de exclusão de Pauli

A lagrangeana é:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi = i\psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi^\dagger\gamma^0\psi =$$

$$= \underbrace{i\psi^\dagger \underbrace{\gamma^0\gamma^0}_{1} \partial_0\psi}_{i\psi^\dagger\dot{\psi}} + i\psi^\dagger\gamma^0\gamma^i\partial_i\psi - m\psi^\dagger\gamma^0\psi$$

$$\therefore \quad \pi_\psi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} = i\psi^\dagger \qquad\qquad \mathcal{H} = \pi_\psi\dot{\psi} - \mathcal{L}$$

$$= \cancel{\pi_\psi\dot{\psi}} - \cancel{\underbrace{i\psi^\dagger}_{\pi_\psi}\dot{\psi}} - i\psi^\dagger\gamma^0\gamma^i\partial_i\psi + m\psi^\dagger\gamma^0\psi$$

$$\boxed{H = \int d^3x\, \psi^\dagger\left[-i\gamma^0\gamma^i\partial_i + m\gamma^0\right]\psi} \qquad \text{(eq. 129.1)}$$

Quantizando:

$$\{\psi_\alpha(\vec{x},t), \psi_\beta^\dagger(\vec{y},t)\} = \delta^3(\vec{x}-\vec{y})\,\delta_{\alpha\beta}$$

$$\{\psi_\alpha(\vec{x},t), \psi_\beta(\vec{y},t)\} = \{\psi_\alpha^\dagger(\vec{x},t), \psi_\beta^\dagger(\vec{y},t)\} = 0$$

O procedimento então é o mesmo que usamos para o campo escalar, só que agora sabemos que os coeficentes da solução geral são matrizes 4x1:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(A_i(p)\, e^{-ipx} + B_i(p)\, e^{ipx} \right)$$

$i = 1, \dots, 4$

(índices espinoriais): $(\gamma^\mu)_{ij} \psi_j$

Conhecendo a solução clássica, vou parametrizar estes coeficientes na forma:

$$A_i(p) = \sum_s \underbrace{a^s_{\vec{p}}}_{\text{operador}}\, \underbrace{u^s_i(p)}_{\text{função}} \qquad\qquad B_i(p) = \sum_s b^{s\dagger}_{\vec{p}}\, v^s_i(p)$$

função (ou conjunto de 4 funções), carrega o índice espinorial

operador que vai dar conta das relações de comutação

Assim, expandimos o campo na forma:

$$\boxed{\begin{aligned} \psi(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s \left(a^s_{\vec{p}}\, u^s(p)\, e^{-ipx} + b^{s\dagger}_{\vec{p}}\, v^s(p)\, e^{ipx} \right) \\ \bar{\psi}(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s \left(b^s_{\vec{p}}\, \bar{v}^s(p)\, e^{-ipx} + a^{s\dagger}_{\vec{p}}\, \bar{u}^s(p)\, e^{ipx} \right) \end{aligned}}$$

(eq. 130.1)

As relações de anticomutação para os campos implicam que:

$$\left\{ a^r_{\vec{p}}, a^{\dagger s}_{\vec{q}} \right\} = \left\{ b^r_{\vec{p}}, b^{\dagger s}_{\vec{q}} \right\} = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q})\, \delta^{rs}$$

(qualquer outra combinação = 0)

Temos, assim como no caso bosônico, um vácuo no espaço de Fock:

$$a^s_{\vec{p}} |0\rangle = b^s_{\vec{p}} |0\rangle = 0$$

E criamos estados de uma partícula agindo com os operadores de criação neste vácuo:

$$|\vec{p}, s\rangle_a = \sqrt{2E_p}\, a^{s\dagger}_p |0\rangle$$

$$|\vec{p}, s\rangle_b = \sqrt{2E_p}\, b^{s\dagger}_p |0\rangle$$

Só que os anticomutadores implicam que: $(a^{s\dagger}_p)^2 = (b^{s\dagger}_p)^2 = 0$, o que torna impossível adicionar outra partícula com mesmo momento e spin a este estado. E também:

$$|\vec{p}, s; \vec{k}, s\rangle = N\, a^{s\dagger}_p a^{s\dagger}_k |0\rangle = -N\, a^{s\dagger}_k a^{s\dagger}_p |0\rangle = -|\vec{k}, s; \vec{p}, s\rangle$$

O operador hamiltoniano será dado por:

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s E_p \left(a^{+s}_{\vec{p}} a^s_{\vec{p}} - b^s_{\vec{p}} b^{+s}_{\vec{p}} \right) =$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s E_p \left(a^{+s}_{\vec{p}} a^s_{\vec{p}} + b^{+s}_{\vec{p}} b^s_{\vec{p}} - \{ b^{+s}_{\vec{p}}, b^s_{\vec{p}} \} \right) \quad \text{(eq. 131.1)}$$

Mais uma vez temos uma energia infinita no vácuo dada pelo último termo acima. Mais uma vez definiremos o ordenamento normal. A novidade aqui é que, para passar da primeira linha acima para a segunda o sinal do termo com 2 b's foi invertido. Então se quisermos somente descartar o efeito do vácuo de forma consistente com a estatística de Fermi, devemos fazer:

$$:a^r_{\vec{p}} a^s_{\vec{q}}: = a^r_{\vec{p}} a^s_{\vec{q}}$$

$$:a^s_{\vec{q}} a^r_{\vec{p}}: = a^s_{\vec{q}} a^r_{\vec{p}} = -a^r_{\vec{p}} a^s_{\vec{q}}$$

E o mesmo deve valer para quando o produto já não começa ordenado:

$$\boxed{:a^r_{\vec{p}} a^{s+}_{\vec{q}}: = -a^{s+}_{\vec{q}} a^r_{\vec{p}}} \quad \text{(eq. 131.2)}$$

Moral da história, o ordenamento normal para férmions carrega um sinal (para vários campos multiplicados é necessário contar quantas vezes um operador fermiônico passar por outros para sair da ordem inicial e chegar na final, e multiplicar por -1 para cada passagem). Isso obviamente vai implicar em modificações no teorema de Wick para férmions

A integral de trajetória fermiônica

Precisamos então pensar em como transportar esta anti-comutação de forma consistente para o formalismo de integral de trajetória. O problema é que neste formalismo, trocamos os operadores por funções, que comutam entre si.

Podemos pensar, que no caso bôsonico, as funções são obtidas a partir dos operadores no limite:

$$[a, a^+] = \hbar \to 0$$

Então agora, deveríamos obter

$$\{a, a^+\} = \hbar \to 0$$

que não são as funções ou números usuais, pois anticomutam (seguem a chamada Álgebra de Grassmann). Podemos dividir o conjunto destes Números de Grassmann em dois:

Parte ímpar da álgebra: $a \,,\, a^+ : \{a, a^+\} = \{a, a\} = \{a^+, a^+\} = 0$

Parte par da álgebra: $aa^+ \;:\; [aa^+, aa^+] = 0$

De forma que o produto de duas funções fermiônicas (ímpar) vai ser bosônica (par)

(e é fácil ver que [par . par = par] e [ímpar . par = ímpar])