$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s E_p \left(a^{+s}_{\vec{p}} a^s_{\vec{p}} - b^s_{\vec{p}} b^{+s}_{\vec{p}} \right) =$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s E_p \left(a^{+s}_{\vec{p}} a^s_{\vec{p}} + b^{+s}_{\vec{p}} b^s_{\vec{p}} - \{ b^{+s}_{\vec{p}}, b^s_{\vec{p}} \} \right) \qquad \text{(eq. 131.1)}$$

Mais uma vez temos uma energia infinita no vácuo dada pelo último termo acima. Mais uma vez definiremos o ordenamento normal. A novidade aqui é que, para passar da primeira linha acima para a segunda o sinal do termo com 2 b's foi invertido. Então se quisermos somente descartar o efeito do vácuo de forma consistente com a estatística de Fermi, devemos fazer:

$$:a^r_{\vec{p}} a^s_{\vec{q}}: = a^r_{\vec{p}} a^s_{\vec{q}}$$

$$:a^s_{\vec{q}} a^r_{\vec{p}}: = a^s_{\vec{q}} a^r_{\vec{p}} = -a^r_{\vec{p}} a^s_{\vec{q}}$$

E o mesmo deve valer para quando o produto já não começa ordenado:

$$\boxed{:a^r_{\vec{p}} a^{s+}_{\vec{q}}: = -a^{s+}_{\vec{q}} a^r_{\vec{p}}} \qquad \text{(eq. 131.2)}$$

Moral da história, o ordenamento normal para férmions carrega um sinal (para vários campos multiplicados é necessário contar quantas vezes um operador fermiônico passar por outros para sair da ordem inicial e chegar na final, e multiplicar por -1 para cada passagem). Isso obviamente vai implicar em modificações no teorema de Wick para férmions

A integral de trajetória fermiônica

Precisamos então pensar em como transportar esta anti-comutação de forma consistente para o formalismo de integral de trajetória. O problema é que neste formalismo, trocamos os operadores por funções, que comutam entre si.

Podemos pensar, que no caso bôsonico, as funções são obtidas a partir dos operadores no limite:

$$[a, a^+] = \hbar \to 0$$

Então agora, deveríamos obter

$$\{a, a^+\} = \hbar \to 0$$

que não são as funções ou números usuais, pois anticomutam (seguem a chamada Álgebra de Grassmann). Podemos dividir o conjunto destes Números de Grassmann em dois:

Parte ímpar da álgebra: $a\,,\, a^+ : \{a, a^+\} = \{a, a\} = \{a^+, a^+\} = 0$

Parte par da álgebra: $aa^+ \;:\; [aa^+, aa^+] = 0$

De forma que o produto de duas funções fermiônicas (ímpar) vai ser bosônica (par)

(e é fácil ver que [par . par = par] e [ímpar . par = ímpar])

Números de Grassmann, definições e propriedades

Precisamos de funções definindas em um espaço de números complexos que anti-comutem, o que já havia sido proposto antes por Grassmann. Os números de Grassmann satisfazem a seguinte propriedade:

$$\boxed{\{\theta,\eta\} = \theta\eta + \eta\theta = 0}$$

O que tem diversas consequências:

$$\boxed{\theta^2 = 0} \quad \text{(eq. 132.1)}$$

elemento "par" da álgebra (commutative-number)

elemento "ímpar" (anticommutative-number)

um par de números de Grassmann se comporta como um c-number

$$\eta_1\eta_2\eta_3 = -\eta_1\eta_3\eta_2 = \eta_3\eta_1\eta_2$$

$$f(\theta,\eta) = a_0 + a_1\theta + a_2\eta + a_3\theta\eta + a_4\theta^2\eta + a_5\theta\eta^2$$

se a função tiver paridade definida ela é a-number ou c-number

assim, se $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$ então $a_0 = a_3 = 0$ ou $a_1 = a_2 = 0$ (ou então os próprios a's devem ser Grassmann)

Na maior parte do segue, vamos assumir coeficientes pares, o que significa que estamos tomando a álgebra de Grassmann finita, o que quer dizer que, no exemplo abaixo, não há outros ímpares além de θ, η e ρ para aparecer nos coeficientes:

$$f(\theta,\eta,\rho) = a_0 + a_1\theta + a_2\eta + a_3\rho + a_4\theta\eta + a_5\theta\rho + a_6\eta\rho + a_7\theta\eta\rho$$

e considerando funções mais gerais (sem paridade, ou supernumbers)

Há uma ambiguidade na definição de derivada (temos que decidir se ela age pela direita ou esquerda):

$$\frac{\partial^L}{\partial\theta}f(\theta,\eta) = a_1 + a_3\eta \qquad \frac{\partial^R}{\partial\theta}f(\theta,\eta) = a_1 - a_3\eta$$

$$\frac{\partial^L}{\partial\eta}f(\theta,\eta) = a_2 - a_3\theta \qquad \frac{\partial^R}{\partial\eta}f(\theta,\eta) = a_2 + a_3\theta$$

Definiremos: $\boxed{\dfrac{\partial}{\partial\eta} = \dfrac{\partial^L}{\partial\eta}}$ (quando for necessário usar a derivada pela direita indicaremos isto explicitamente)

$$\eta\frac{\partial f}{\partial\eta} = a_2\eta - a_3\eta\theta = \underbrace{a_2\eta + a_3\theta\eta}_{f}$$

$$\eta f = a_0\eta + a_1\eta\theta \Rightarrow \frac{\partial}{\partial\eta}(\eta f) = \underbrace{a_0 + a_1\theta}_{f}$$

$$\left(\eta\frac{\partial}{\partial\eta} + \frac{\partial}{\partial\eta}\eta\right)f = f$$

A consequência é que a regra do produto também fica modificada:

$$\frac{\partial}{\partial\eta}(\eta f) = f - \eta\frac{\partial f}{\partial\eta}$$

$$\boxed{\left\{\eta_i , \frac{\partial}{\partial \eta_j}\right\} = \delta_{ij}} \quad \text{(eq. 133.1)}$$

$$\boxed{\left\{\frac{\partial}{\partial \eta} , \frac{\partial}{\partial \theta}\right\} = 0} \quad \text{(eq. 133.2)}$$

E num caso mais geral:

$$\frac{\partial}{\partial \eta_j}\left(\eta_1 \eta_2 \eta_3 \cdots \eta_n\right) = \delta_{1j}\, \eta_2 \eta_3 \cdots \eta_n - \delta_{2j}\, \eta_1 \eta_3 \cdots \eta_n + \delta_{3j}\, \eta_1 \eta_2 \eta_4 \cdots \eta_n - \cdots$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_k} e^{\sum \theta_i \eta_i} = \eta_k\, e^{\underbrace{\sum \theta_i \eta_i}_{\text{PAR}}} \qquad \frac{\partial}{\partial \eta_k} e^{\sum \theta_i \eta_i} = -\theta_k\, e^{\sum \theta_i \eta_i}$$

$$a = \sum \theta_i \eta_i$$

$$e^a = 1 + \sum \theta_i \eta_i + \frac{1}{2!}\left(\sum \theta_i \eta_i\right)\left(\sum \theta_j \eta_j\right) + \ldots = 1 + \sum \theta_i \eta_i + \frac{1}{2!}\left(\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \theta_i \eta_i \theta_j \eta_j\right) + \frac{1}{3!}\left(\sum_{\substack{i,j,k \\ i\neq j,\ j \neq k \\ i \neq k}} \theta_i \eta_i \theta_j \eta_j \theta_k \eta_k\right) =$$

$$\frac{d}{d\eta_\ell} e^a = 0 - \theta_\ell + \frac{1}{2!}\left[\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}}\left(-\theta_i \delta_{i\ell} \theta_j \eta_j - \theta_i \eta_i \theta_j \delta_{\ell j}\right)\right] + \ldots = -\theta_\ell - \theta_\ell \sum_i \theta_i \eta_i - \theta_\ell \frac{1}{2!} \sum_{\substack{i,j \\ j > i}} \theta_i \eta_i \theta_j \eta_j$$

$$= -\theta_\ell \left(1 + \sum_i \theta_i \eta_i + \frac{1}{2!} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \theta_i \eta_i \theta_j \eta_j + \ldots\right) = -\theta_\ell\, e^a \ //$$

Para definir integrais é natural assumir que os infinitesimais de Grassmann também anti-comutam:

$$\{\theta, d\eta\} = 0$$

$$\{d\theta, d\eta\} = 0$$

que resolve outra ambiguidade de sinal (se fizemos primeiro a integral de fora o sinal fica invertido)

$$\int d\theta\, d\eta\, f(\theta,\eta) \equiv \int d\theta \left[\int d\eta\, f(\theta,\eta)\right]$$

Considere a integral de uma função de apenas um número de Grassman, queremos que esta integral tenha a propriedade de ser invariante por translações nesta variável:

$$\theta \to \theta + \eta \Rightarrow \underbrace{\int d\theta\, f(\theta)}_{F(\theta)} = \underbrace{\int d\theta\, f(\theta+\eta)}_{F(\theta+\eta)}$$

série   série

$$A + B\theta = A + B(\theta + \eta)$$

$$\forall \eta \Rightarrow B = 0$$

A deve ser par, então $\int d\theta\, f(\theta)$ também deve ser par

$$\int d\theta\, f(\theta) = \int d\theta\, (a_1 + a_2 \theta) = \int a_1\, d\theta + \int d\theta\, a_2 \theta$$

$$\left(\int d\theta\, a_1\right)^2 = \int d\theta \int d\eta\, a_1^2 = \int d\theta\, d\eta\, a_1^2 = -\int d\eta\, d\theta\, a_1^2 = -\left(\int d\theta\, a_1\right)^2 = 0$$

$\int d\theta\, a_1$ é ímpar ou zero, como não pode ser ímpar : $\int d\theta\, a_1 = a_1 \int d\theta \to \boxed{\int d\theta = 0}$ (eq. 134.1)

$\int d\theta\, a_2\theta$ deve ser par, e tomaremos: $\int d\theta\, a_2\theta = a_2 \int d\theta\, \theta$

& $\boxed{\int d\theta\, \theta = 1}$ (eq. 134.2)

$$\int d\theta\, f(\theta,\eta) = \int d\theta\left(a_0 + a_1\theta + a_2\eta + a_3\theta\eta\right) = a_1 + a_3\eta = \frac{\partial}{\partial\theta} f(\theta,\eta)$$

o que pode ser mostrado em geral, ou seja a integração e a diferenciação tem o mesmo efeito.

A função delta também pode ser definida, usando uma função η: $g(\eta)$

$$g(\eta) = a + b\eta$$

queremos:

$$\underbrace{\int d\eta\, \delta(\eta-\rho)\, g(\eta)} = g(\rho) = a + b\rho$$

$$\int d\eta\, \delta(\eta-\rho)\left[a + b\eta\right] = a\underbrace{\int d\eta\, \delta(\eta-\rho)}_{1} + b\underbrace{\int d\eta\, \delta(\eta-\rho)\,\eta}_{\rho}$$

O que é obtido com: $\boxed{\delta(\eta-\rho) = \eta - \rho}$ (eq. 134.3)

$$\int d\eta\,(\eta-\rho) = \underbrace{\int d\eta\, \eta}_{1} - \underbrace{\int d\eta\, \rho}_{0} \qquad \int d\eta\,(\eta-\rho)\,\eta = \underbrace{\int d\eta\, \eta\eta}_{0} - \underbrace{\int d\eta\, \rho\eta}_{\rho}$$

(−)

A mudança de variáveis multiplicativa (por um número complexo) na integração também parece mais com uma mudança em derivadas:

$$\int dx\, x = 1 \qquad y = ax \qquad \int dy\, y = 1 = a\int dy\, x \qquad \boxed{dy = \frac{1}{a}dx}$$ (eq. 134.4)

aqui termina a lec 12 do Nastase

Para números de Grassmann complexos:

$$(\theta\eta)^* = \eta^*\theta^* = -\theta^*\eta^* \quad \left\{ \int d\eta = \int d\eta^* = 0 \quad \& \quad \int d\eta\,\eta = \int d\eta^*\eta^* = 1 \right\}$$

$$e^{-\eta^*\eta} = 1 - \eta^*\eta$$

$$\int d\eta^* d\eta\, e^{-\eta^* b\eta} = \int d\eta^* d\eta\,(1-\eta^* b\eta) = \int d\eta^* d\eta\,(1+\eta\eta^* b) = b$$

$$\boxed{\int d\eta^* d\eta\, e^{-\eta^* b\eta} = b}$$
(eq. 135.1)

$$\int d\eta^* d\eta\, \eta\eta^*\, e^{-\eta^* b\eta} = \int d\eta^* d\eta\, \eta\eta^*(1-\eta^* b\eta) = 1$$

$$\boxed{\int d\eta^* d\eta\, \eta\eta^*\, e^{-\eta^* b\eta} = \frac{1}{b}\cdot b}$$
(eq. 135.2)

$$\int d\eta^* d\eta\, \eta\eta^*\, e^{-\eta^* b\eta} = \frac{d}{db}\int d\eta^* d\eta\, e^{-\eta^* b\eta}$$

Isto é análogo ao que teríamos obtido para integral gaussiana de váriáveis complexas:

$$\boxed{\int \frac{dz^*}{(2\pi i)^{1/2}}\frac{dz}{(2\pi i)^{1/2}}\, e^{-z^*\cdot b z} = \frac{1}{b}}$$
(eq. 135.3)

$$\boxed{\int \frac{dz^*}{(2\pi i)^{1/2}}\frac{dz}{(2\pi i)^{1/2}}\, z^* z\, e^{-z^*\cdot b z} = \frac{1}{b}\cdot\frac{1}{b}}$$
(eq. 135.4)

$$-\frac{d}{db}\int dz\,dz\, e^{-z^* b z} = \dots$$

Suponha um caso bidimensional:

$$\eta = \begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix} \qquad \bar\eta = (\eta_1^* \ \ \eta_2^*)$$

$$(\bar\eta\eta)^2 = (\eta_1^*\eta_1 + \eta_2^*\eta_2)^2 = \eta_1^*\eta_1\eta_2^*\eta_2 + \eta_2^*\eta_2\eta_1^*\eta_1 = 2\eta_1^*\eta_1\eta_2^*\eta_2$$

$$e^{-\bar\eta\eta} = 1 - \eta_1^*\eta_1 + \eta_2^*\eta_2 + \eta_1^*\eta_1\eta_2^*\eta_2$$

$$d\bar\eta\, d\eta \equiv d\eta_1^* d\eta_1 d\eta_2^* d\eta_2$$

$$\int d\bar{\eta}\, d\eta\, e^{-\bar{\eta}\eta} = \int d\eta_1^* \, d\eta_1 \, d\eta_2^* \, d\eta_2 \; \eta_1^* \eta_1 \eta_2^* \eta_2 = 1$$

$$\boxed{\int d\bar{\eta}\, d\eta\, e^{-\bar{\eta}\eta} = 1}$$ (eq. 136.1)

Fazendo uma mudança de variáveis,obtemos:

$$\eta = M\alpha \qquad M, N \in \mathbb{C}^{2\times 2}$$

$$\bar{\eta} = \bar{\alpha} N$$

$$\eta_1 \eta_2 = (M_{11}\alpha_1 + M_{12}\alpha_2)(M_{21}\alpha_1 + M_{22}\alpha_2) =$$

$$= (M_{11} M_{22} + M_{12} M_{21})\alpha_1\alpha_2 = \mathrm{DET}[M]\,\alpha_1\alpha_2$$

Então, se queremos que: $\int d\eta_1\, d\eta_2\, \eta_1 \eta_2 = \int d\alpha_1\, d\alpha_2\, \alpha_1\alpha_2$

temos que exigir: $d\eta_1\, d\eta_2 = (\mathrm{DET}[M])^{-1}\, d\alpha_1\, d\alpha_2$

(como já tínhamos visto na mudança de uma variável)

da mesma forma: $d\eta_1^*\, d\eta_2^* = (\mathrm{DET}[N])^{-1}\, d\alpha_1^*\, d\alpha_2^*$

então:

$$1 = \int d\eta_1^*\, d\eta_1\, d\eta_2^*\, d\eta_2\, e^{-\bar{\eta}\eta} = -\int \frac{d\alpha_1^*\, d\alpha_2^*}{\mathrm{DET}[N]} \frac{d\alpha_1\, d\alpha_2}{\mathrm{DET}[M]} e^{-\bar{\alpha} N M \alpha} =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{DET}[\underbrace{NM}_{A}]} \int d\alpha_1^*\, d\alpha_1\, d\alpha_2^*\, d\alpha_2\, e^{-\bar{\alpha}\overbrace{NM}^{A}\alpha}$$

$$\boxed{\int d^n\bar{\alpha}\, d^n\alpha\; e^{-\bar{\alpha}\cdot A\alpha} = \mathrm{DET}[A]}$$ (eq. 136.2)

Provamos isso para 2D, mas a mesma coisa poderia ter sido feita para mais dimensões.

compare com: $\int \frac{d^n z^*}{(2\pi i)^{n/2}} \frac{d^n z}{(2\pi i)^{n/2}} e^{-\vec{z}^*\cdot A\vec{z}} = (\mathrm{DET}\; A)^{-1}$

Usando derivadas em a, podemos também mostrar que:

$$\boxed{\int d^n\bar{\alpha}\, d^n\alpha\; \alpha_i \bar{\alpha}_j \; e^{-\bar{\alpha}\cdot A\alpha} = (A^{-1})_{ij}\, \mathrm{Det}[A]}$$

(eq. 137.1)

Podemos definir uma “função de Grassmann” (que é ímpar, para cada valor x, fornece um a-number) como:

$$\psi(x) = \sum_i \underbrace{\psi_i}_{\text{coeficientes são números de Grassmann}} \underbrace{\phi_i(x)}_{\{\phi_i\}\text{ base de funções usuais } (\phi_i \in \mathbb{C})}$$

E generalizar as integrais funcionais Gaussianas para funções deste tipo:

$$\boxed{\int D\bar{\psi}\, D\psi \; e^{-\bar{\psi}\cdot A\psi} = \mathrm{Det}[A]}$$

(eq. 137.2)

O Oscilador Harmônico Fermiônico

O operador hamiltoniano de um oscilador harmônico quantizado como um férmion, antes de dispensarmos a energia do vácuo, é:

$$\hat{H}_F = \omega\left(\hat{b}^+\hat{b} - \frac{1}{2}\right) \qquad \{\hat{b}, \hat{b}^+\} = 1$$

Consideremos, assim como no caso bosônico, o estado coerente:

$$|\beta\rangle = e^{\hat{b}^+\beta}|0\rangle = (1 + \hat{b}^+\beta)|0\rangle = (1 - \beta\hat{b}^+)|0\rangle$$

$$\hat{b}|\beta\rangle = (\cancel{\hat{b}} + \beta\underbrace{\hat{b}\hat{b}^+}_{1-\hat{b}^+\hat{b}})|0\rangle = \beta|0\rangle = \overbrace{\beta}^{\beta^2=0}\underbrace{(1 - \beta\hat{b}^+)|0\rangle}_{|\beta\rangle} = \beta|\beta\rangle$$

Temos a relação de completeza:

$$\hat{1} = \int d\beta^* d\beta\, |\beta\rangle\langle\beta^*|\, e^{-\beta^*\beta}$$

E o hamiltoniano na presença de fontes (oscilador forçado) será escrito como:

$$H(b^+, b; t) = \omega\, b^+ b - b^+\eta(t) - \bar{\eta}(t)\, b$$

Queremos calcular a amplitude de transição:

$$F(\beta^*, t'; \beta, t) = \langle \beta^*, t' | \beta, t \rangle$$

para a qual seguimos os mesmos passos de sempre para encontrar a integral funcional:

$$F(\beta^*, t'; \beta, t) = \int \mathcal{D}\beta^* \mathcal{D}\beta \, \exp\left\{ i \int_t^{t'} d\tau \left[-i\dot{\beta}^*(\tau)\beta(\tau) - H(\beta, \beta^*, t) \right] + \beta^*(t)\beta(t) \right\}$$

As equações de Hamilton na presença de fontes são:

$$\boxed{\begin{aligned} &\dot{\beta}^*(\tau) - i\omega\beta^*(\tau) + i\bar{\eta}(\tau) = 0 \\ &\dot{\beta}(\tau) + i\omega\beta(\tau) - i\eta(\tau) = 0 \end{aligned}} \quad \text{(eq. 138.1)} \qquad \begin{aligned} \beta(t) &= \beta \\ \beta^*(t') &= \beta^* \end{aligned}$$

Com soluções:

$$\boxed{\begin{aligned} \beta_{cl}(\tau) &= \beta \, e^{i\omega(t-\tau)} + i\int_t^{\tau} e^{i\omega(s-\tau)} \eta(s)\, ds \\ \beta^*_{cl}(\tau) &= \beta^* \, e^{i\omega(\tau - t')} + i\int_{\tau}^{t'} e^{i\omega(\tau - s)} \bar{\eta}(s)\, ds \end{aligned}} \quad \text{(eq. 138.2)}$$

Que podemos projetar no vácuo fazendo: $\begin{cases} \beta = \beta^* = 0 \\ t \to -\infty \\ t' \to +\infty \end{cases}$

E neste caso (exercício, mas a dedução prossegue de maneira análoga ao caso bosônico - pgs 36-37):

$$\boxed{Z[\eta, \bar{\eta}] = F(0, \infty; 0, -\infty) = \langle 0 | 0 \rangle \exp\left\{ -\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{\tau}^{+\infty} ds \, e^{i\omega(t-s)} \bar{\eta}(s)\eta(s) \right\}} \quad \text{(eq. 138.3)}$$

Isto é praticamente o mesmo que um campo em 0+1 dim., temos:

$\beta \to \psi \qquad \beta^* \to \bar{\psi}$

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \, \exp\left\{ i \int dt \left[\underbrace{-i\, \partial_t \bar{\psi}\, \psi}_{i\bar{\psi}\,\partial_t\psi} - \omega\bar{\psi}\psi + \bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi \right] \right\} =$$

$$= \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \, \exp\left\{ i \int dt \left[\bar{\psi}(i\partial_t - \omega)\psi + \bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi \right] \right\} =$$

$$D_F^{-1} = -i(i\partial_t - \omega)$$

$$= \int D\bar{\psi}\, D\psi \exp\left\{ \int dt \left[-\bar{\psi}\, D_F^{-1}\, \psi \right] + i \int dt \left[\bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi \right] \right\}$$

$$\therefore \boxed{Z[\eta,\bar{\eta}] = Z[0,0] \exp\left\{ - \int ds\, d\tau\, \bar{\eta}(s)\, D_F(s,\tau)\, \eta(\tau) \right\}}$$ (eq. 139.1)

$$\boxed{D_F(s,\tau) = \left[-i\left(i\partial_t - \omega \right) \right]^{-1} = i \int \frac{dE}{2\pi} \frac{e^{-iE(s-\tau)}}{E - \omega + i\epsilon} = \Theta(s-\tau)\, e^{-i\omega(s-\tau)}}$$ (eq. 139.2)

Note que: (1) Temos apenas um polo, em $E = \omega - i\epsilon$

(2) Isso significa que se fizemos a integral no hemisfério superior (*Im E > 0*) ela dá zero, e somos forçados a fazer isso se ($s < \tau$), portanto a integral é zero para ($s < \tau$). No outro hemisfério (obrigatório se $s > \tau$) pegamos o polo e obtemos o resultado não nulo acima.

$$-iE(s-\tau) \sim \mathrm{Im}(E)(s-\tau)$$

(3) Basta substituir a última expressão em 139.1 para obter 138.3 (incluindo o limite de integração, que impõe $s > \tau$)

Passando para o espaço Euclideano: $t = -it_E$

$$Z_E[\eta,\bar{\eta}] = \int D\bar{\psi}\, D\psi\, \mathrm{Exp}\left\{ \int dt_E\, \bar{\psi}_E \left(-\partial_{t_E} - \omega \right) \psi_E + \int dt_E\, \bar{\psi}_E \eta_E + \bar{\eta}_E \psi_E \right\}$$

suprimindo o "E"

$$= Z[0,0]\, \mathrm{Exp}\left\{ \int d\tau\, ds\, \bar{\eta}(s)\, D(s,\tau)\, \eta(\tau) \right\}$$

$$\boxed{-S_E = -\bar{\psi}\cdot D^{-1}\psi + \bar{\psi}\cdot\eta + \bar{\eta}\cdot\psi}$$ (eq. 139.3)

$$\boxed{D[s,\tau] = \left(\partial_t + \omega \right)^{-1} = i \int \frac{dE}{2\pi} \frac{e^{-iE(s-\tau)}}{E + i\omega}}$$ (eq. 139.4)

E rodando de volta para Minkowski com $E_E = (-i + \epsilon)E$ (para evitar o polo), voltamos ao propagador em 139.2

Agora basta aumentar o número de coordenadas espaciais para obter uma teoria de campo. A lagrangeana (em Mink.) é:

$$\mathcal{L}_F^{(M)} = \bar{\psi}\left(i\partial\!\!\!/ - m \right)\psi$$