$$j^\mu \equiv \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi \Rightarrow \boxed{\partial_\mu j^\mu = \underbrace{(\partial_\mu\bar{\Psi})\gamma^\mu}_{\bar{\Psi}\overleftarrow{\not\partial} = m\bar{\Psi}}\Psi + \bar{\Psi}\underbrace{\gamma^\mu\partial_\mu\Psi}_{\not\partial\Psi = -m\Psi} = m\bar{\Psi}\Psi - m\bar{\Psi}\Psi = 0}$$

(eq. 152.1)

No entanto a corrente axial:

$$\partial_\mu j^{\mu 5} \equiv \bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_5\Psi \Rightarrow \partial_\mu j^{\mu 5} = (\partial_\mu\bar{\Psi})\gamma^\mu\gamma_5\Psi + \bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_5\partial_\mu\Psi =$$

$$= \bar{\Psi}\overleftarrow{\not\partial}\gamma_5\Psi - \bar{\Psi}\gamma_5\not\partial\Psi = 2m\bar{\Psi}\gamma_5\Psi$$

só é conservada se o férmion em questão não tiver massa: $\boxed{m = 0 \Rightarrow \partial_\mu j^{\mu 5} = 0}$ (eq. 152.2)

Simetrias C, P e T para férmions

Além da simetria de Lorentz (uma transformação contínua do espaço tempo) podemos ver se a nossa Lagrangeana é simetrica sobre transformações discretas do espaço tempo. Definimos:

Transformação de Paridade: $P: \quad (t, \vec{x}) \to (t, -\vec{x})$

Inversão temporal: $T: \quad (t, \vec{x}) \to (-t, \vec{x})$

Estas transformações podem ou não ser simetrias, não há nada que as exija a priori. Embora estas transformações não sejam contínuas, elas mantém $S^2 = t^2 - \vec{x}^2$ invariante e fazem parte do grupo de Lorentz, que pode ser dividido:

Transformações de Lorentz (parte contínua do grupo)

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{L}_+^\uparrow & \overset{P}{\longleftrightarrow} & \mathbf{L}_-^\uparrow = P\mathbf{L}_+^\uparrow & & \text{“orthochronous”} \\
T\updownarrow & & \updownarrow T & & \\
\mathbf{L}_+^\downarrow = T\mathbf{L}_+^\uparrow & \underset{P}{\longleftrightarrow} & \mathbf{L}_-^\downarrow = PT\mathbf{L}_+^\uparrow & & \text{“nonorthochronous”} \\
\text{“proper”} & & \text{“improper”} & &
\end{array}$$

Podemos ainda imaginar uma outra transformação:

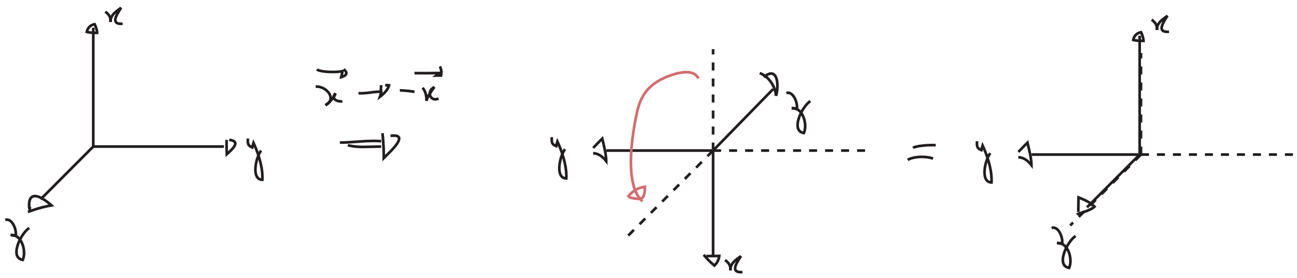
Conjugação de Carga: $C:$ PARTÍCULA $\longleftrightarrow$ ANTIPARTÍCULA

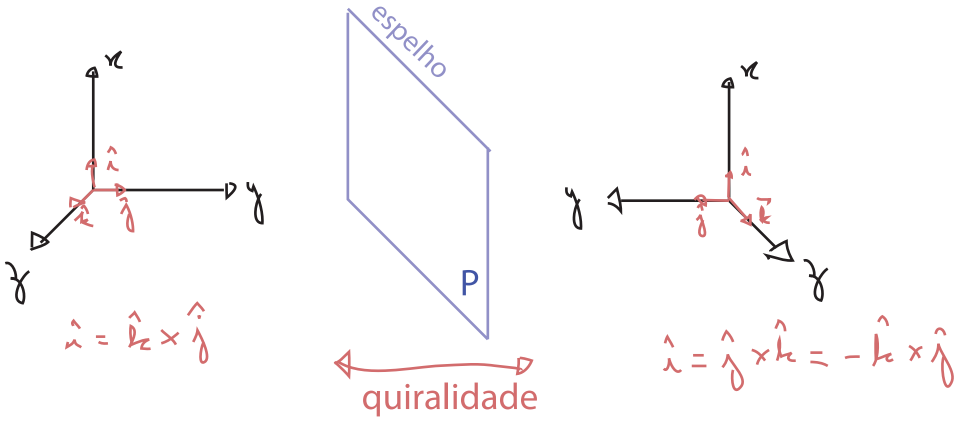
(veremos mais a frente como definir isso)

Por muito tempo acreditou-se que as simetrias C, P e T eram, SEPARADAMENTE, simetrias da física, pois tanto a gravitação quanto o eletromagnetismo (e depois as interações fortes) respeitavam estas simetrias, mas aí as interações fracas vieram para estragar a alegria: as primeiras medidas indicavam que a teoria era invariante sobre transformações CP, mas não C e P separadamente (a quebra da simetria de paridade foi bastante surpreendente). Sabemos hoje que há também uma pequena violação de CP gerada pelas interações fracas e esperamos uma violação ainda maior proveniente de alguma teoria além do modelo padrão, pois esta é necessária para explicar a assimetria entre matéria e antimatéria. A simetria sobre transformações CPT no entanto deve ser respeitada (segundo o Teorema CPT, que assume uma série de coisas "sensatas": invariancia de Lorentz da teoria e do vácuo, energia tem um mínimo global, comutatividade das coordenadas espaciais, localidade, unitariedade - uma prova do teorema e mais referências podem ser encontradas na seção 5.8 do Weinberg) o que implica uma violação de T. Vamos encontrar representações destas transformações:

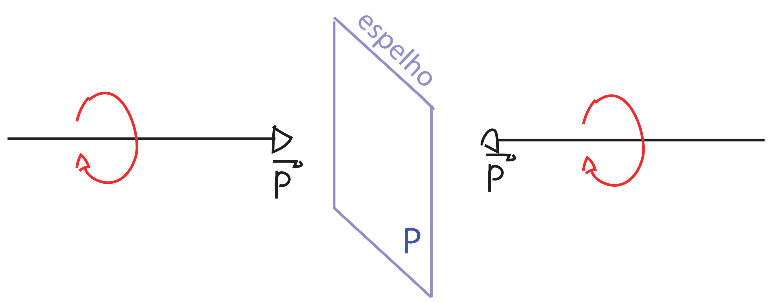
Paridade:

Primeiramente note que P é o mesmo que ocorre em uma reflexão no espelho:





Isso quer dizer, dado uma partícula com spin (ou helicidade ou qualquer momento angular), cuja projeção da direção do momento é representada por uma rotação em torno do eixo definido por este, sofrerá a seguinte transformação:



Note que o momento é invertido mas não o spin.

Se codificarmos toda a ação de P como um operador unitário agindo sobre os outros operadores da teoria (os de criação e aniquilação), isto implica que:

$$P a^s_{\vec{p}} P = \underbrace{\eta_a}_{} a^s_{-\vec{p}} \qquad P b^s_{\vec{p}} P = \underbrace{\eta_b}_{} b^s_{-\vec{p}} \qquad \text{(eq. 153.1)}$$

possíveis fases (paridade intrínseca)

Aplicar P duas vezes deveria nos trazer observáveis de volta ao valor original, logo:

$$\boxed{P^2 = \mathbb{1}} \quad \text{(eq. 154.1)} \longrightarrow \quad P^{\dagger} = \boxed{P^{-1} = P} \quad \text{(eq. 154.2)}$$

unitária

$$\therefore |\eta_a|^2 = |\eta_b|^2 = 1$$

definindo: $\tilde{p} = (p^0, -\vec{p})$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\tilde{p}\cdot\bar{\sigma}}\,\xi \\ \sqrt{\tilde{p}\cdot\sigma}\,\xi \end{pmatrix} = \gamma^0 u(\tilde{p})$$

$$\bar{\sigma} = (1, -\vec{\sigma}) \Rightarrow \begin{cases} p\cdot\sigma = p^0\sigma^0 - \vec{p}\cdot\vec{\sigma} = \tilde{p}\cdot\bar{\sigma} \\ p\cdot\bar{\sigma} = p^0\sigma^0 + \vec{p}\cdot\vec{\sigma} = \tilde{p}\cdot\sigma \end{cases}$$
$$\sigma = (1, \vec{\sigma})$$

$$v(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\,\eta \\ -\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\tilde{p}\cdot\bar{\sigma}}\,\eta \\ -\sqrt{\tilde{p}\cdot\sigma}\,\eta \end{pmatrix} = -\gamma^0 v(\tilde{p})$$

$$p\cdot x = p^0 t - \vec{p}\cdot\vec{x} = p^0 t - (-\vec{p})\cdot(-\vec{x}) = \tilde{p}\cdot(t, -\vec{x})$$

Note que P só agiu sobre a e b (não age no espaço com índices spinoriais ou nas matrizes de Dirac)

então:

$$P\psi(x)P = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}}\sum_s \left(\eta_a a^s_{-\vec{p}} u^s(p) e^{-ipx} + \eta_b^* b^{s\dagger}_{-\vec{p}} v^s(p) e^{ipx}\right) =$$

$$\vec{p} \to -\vec{p}$$

$$\boxed{= \int \frac{d^3\tilde{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{\tilde{p}}}}}\sum_s \left(\eta_a a^s_{\vec{\tilde{p}}}\, \gamma^0 u^s(\tilde{p})\, e^{-i\tilde{p}(t,-\vec{x})} - \eta_b^* b^{s\dagger}_{\vec{\tilde{p}}}\, \gamma^0 v^s(\tilde{p})\, e^{+i\tilde{p}(t,-\vec{x})}\right)}$$

(note que a transformação de x saiu como esperado) (eq. 154.3)

Para que a integral acima seja proporcional a $\psi(t,-\vec{x})$, ou seja, para que $\psi(x)|0\rangle$ tenha paridade bem definida, exigimos:

$$\eta_b^* = -\eta_a$$

(estamos escolhendo uma representação ao fazer isso)

neste caso: $\boxed{P\psi(x)P = \eta_a \gamma^0 \psi(t, -\vec{x})}$ (eq. 154.4)

$$(P\psi(x)P)^{\dagger} = \eta_a^* \psi^{\dagger}(t,-\vec{x})\,\overset{\gamma^0}{\gamma^{0\dagger}} = \underbrace{\eta_a^* \psi^{\dagger}(t,-\vec{x})\gamma^0}$$

$$\therefore \boxed{P\bar{\psi}(x)P = P\psi^{\dagger}\gamma^0 P^{\dagger}} = (P\psi(x)P)^{\dagger}\gamma^0 = \boxed{\eta_a^* \bar{\psi}(t,-\vec{x})\gamma^0} \quad \text{(eq. 154.5)}$$

$P = P^{\dagger}$

Vejamos agora as propriedades dos bilineares. O escalar de fato se comporta como tal:

$$\boxed{\bar\Psi\Psi} \xrightarrow{P} P\bar\Psi\Psi P = P\bar\Psi P P\Psi P = \underbrace{|\eta_a|^2}_{1}\,\bar\Psi(t,-\vec{x})\underbrace{(\gamma^0)^2}_{1}\Psi(t,-\vec{x}) = \boxed{(\bar\Psi\Psi)(t,-\vec{x})}$$

(eq. 155.1)

note que η_a não importa para os bilineares

já o pseudo-escalar (daí o "pseudo"):

$$\boxed{\bar\Psi\gamma_5\Psi} \xrightarrow{P} P\bar\Psi\underbrace{PP}_{1}\gamma_5\Psi P = \bar\Psi(t,-\vec{x})\gamma^0\underbrace{\gamma_5\gamma^0}_{-1}\Psi(t,-\vec{x}) = \boxed{-(\bar\Psi\gamma_5\Psi)(t,-\vec{x})}$$

(eq. 155.2)

obs: $(\bar\Psi\gamma_5\Psi)^\dagger = -\bar\Psi\gamma_5\Psi$ não é Hermiteano, portanto é comum definir a corrente pseudo escalar como $i\bar\Psi\gamma_5\Psi$

e:

$$\boxed{\bar\Psi\gamma^\mu\Psi} \xrightarrow{P} \bar\Psi(t,-\vec{x})\underbrace{\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0}\Psi(t,-\vec{x}) = \boxed{(-1)^\mu(\bar\Psi\gamma^\mu\Psi)(t,-\vec{x})}$$

(eq. 155.3)

PP

$\mu=0 \Rightarrow \gamma^0$

$\mu=i \Rightarrow (\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$

$$(-1)^\mu = \begin{cases} 1 & \mu = 0 \\ -1 & \mu = i = 1,2,3 \end{cases}$$

(a parte espacial inverte de sinal e a temporal não, exatamente o que esperávamos de um vetor sob uma transformação de paridade)

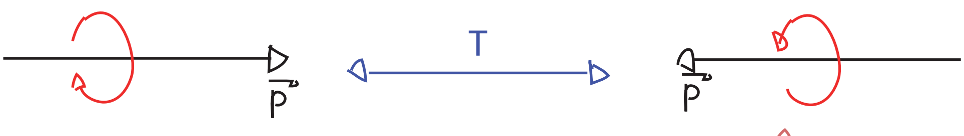
$$\boxed{\bar\Psi\gamma^\mu\gamma_5\Psi} \xrightarrow{P} \bar\Psi(t,-\vec{x})\gamma^0\gamma^\mu\underbrace{\gamma_5}_{\text{sinal extra}}\gamma^0\Psi(t,-\vec{x}) = \boxed{-(-1)^\mu(\bar\Psi\gamma^\mu\Psi)(t,-\vec{x})}$$

(eq. 155.4)

(como um vetor, mas com sinal errado, daí o pseudo-vetor)

Inversão Temporal:

A inversão temporal reverte na direção do tempo, isso significa que vamos inverter o momento e o sentido das rotações (e do spin):



queremos então: $\begin{cases} \vec{p} \to -\vec{p} \\ s \to -s \\ (t,\vec{x}) \to (-t,\vec{x}) \end{cases}$

momentos angulares (e spins) são invertidos

Mas já vimos acima que a inversão do momento na expansão de Ψ, inverte o sinal da posição e não do tempo. Este aparente beco sem saída aparece porque T não pode ser implementada como um operador linear (tem uma prova disso na pg 67 do Peskin) mas sim por um operador antilinear:

$$T\underbrace{z}_{\text{C-NUMBER}} = z^* T \qquad T^\dagger = T^{-1}$$

(T age nos números complexos também)

mais uma vez: $T^2 = 1 \Rightarrow T^\dagger = T = T^{-1}$

e então:

$$\boxed{T a^s_{\vec{p}} T = a^{-s}_{-\vec{p}}} \quad \boxed{T b^s_{\vec{p}} T = b^{-s}_{-\vec{p}}}$$

(eq. 155.5)

(Estou ignorando a fase por simplicidade. Weinberg, pg 78, prova que podemos eliminá-la trivialmente)

A antilinearidade implica em:

$$T a^s_{\vec p}\, u^s(p)\, e^{ipx}\, T = T a^s_{\vec p} T\, [u^s(p)]^* e^{-ipx} = a^s_{\vec p}\, [u^s(p)]^* e^{-ipx}$$

$$T b^{s+}_{\vec p}\, v^s(p)\, e^{-ipx}\, T = T b^{s+}_{\vec p} T\, [v^s(p)]^* e^{ipx} = b^{-s+}_{-\vec p}\, [v^s(p)]^* e^{ipx}$$

Considere uma base de spin mais geral do que $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, com a orientação do spin dada em relação a um eixo com ângulos θ e ϕ em relação ao eixo z:

$$\xi(\uparrow) = R(\theta,\phi)\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{\hat z} = \begin{pmatrix}\cos(\theta/2)\\ e^{i\phi}\,\mathrm{sen}(\theta/2)\end{pmatrix}$$

$$\xi(\downarrow) = R(\theta,\phi)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-e^{i\phi}\,\mathrm{sen}(\theta/2)\\ \cos(\theta/2)\end{pmatrix}$$

$$\xi^s \begin{cases}\xi^1 = \xi(\uparrow)\\ \xi^2 = \xi(\downarrow)\end{cases} \qquad \xi^s = \big(\xi(\uparrow), \xi(\downarrow)\big)$$

preciso achar ξ^{-s}

$$\vec\sigma\,\sigma_2 = \sigma_2(-\vec\sigma^*)$$

Se escolhermos um eixo $\vec n$ tal que: $\vec n\cdot\vec\sigma\,\xi^+ = +\xi^+$ então $(\vec n\cdot\vec\sigma)\big(\underbrace{-i\sigma_2\xi^{+*}}_{\xi^-}\big) =$

operador proj. de spin

$\vec n = (0,0,1)$

$\vec n\cdot\vec\sigma = \sigma^3 = \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

$$= \cancel{-}i\sigma_2\,\underbrace{(\cancel{-}\vec n\cdot\vec\sigma)^*\xi^{+*}}_{\underbrace{(\vec n\cdot\vec\sigma\,\xi^+)^*}_{+\xi^+}} = i\sigma_2\,\xi^{+*} =$$

$$= -\big(\underbrace{-i\sigma_2\,\xi^{+*}}_{\xi^-}\big)$$

$$\boxed{\xi^{-s} \equiv -i\sigma_2(\xi^s)^*}$$ (eq. 156.1)

$$-i\sigma_2 = \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases}-i\sigma_2\,\xi(\uparrow) = \xi(\downarrow)\\ -i\sigma_2\,\xi(\downarrow) = -\xi(\uparrow)\\ -i\sigma_2(-\xi(\uparrow)) = -\xi(\downarrow)\\ -i\sigma_2(-\xi(\downarrow)) = \xi(\uparrow)\end{cases}$$

quatro inversões para chegar no orginal

duas inversões resultam em um sinal (-)

$$\xi^{-s} = \big(\xi(\downarrow), -\xi(\uparrow)\big)$$

Note que η (pg 128), deve ser $\eta^s = \xi^{-s}$ uma vez que b^+ cria uma partícula com todos os números quânticos opostos ao de $a^\dagger$, inclusive a projeção de spin.

$a^{-s}_{\vec p}$ deve fazer o mesmo, trocando ξ^s por ξ^{-s} na função de onda do estado que ele cria, definimos:

$$\boxed{a^{-s}_{\vec p} = \big(a^2_{\vec p}, -a^1_{\vec p}\big) \quad \text{E} \quad b^{-s}_{\vec p} = \big(b^2_{\vec p}, -b^1_{\vec p}\big)}$$ (eq. 156.2)

Para os espinores temos:

$$u^{-s}(\tilde{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{\tilde{p}\cdot\sigma}\,(-i\sigma^2\xi^{s*}) \\ \sqrt{\tilde{p}\cdot\bar{\sigma}}\,(-i\sigma^2\xi^{s*}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\sigma^2\sqrt{p\cdot\sigma^*}\,\xi^{s*} \\ -i\sigma^2\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}^*}\,\xi^{s*} \end{pmatrix} =$$

(basta expandir a raiz em p e notar que:)

$$(\tilde{p}\cdot\sigma)\sigma^2 = [\tilde{p}^0\cdot\hat{1} - \tilde{p}^i\sigma^i]\sigma^2 = \sigma^2[\underbrace{\tilde{p}^0}_{p^0}\cdot\hat{1} + \underbrace{\tilde{p}^i}_{-p^i}(\sigma^i)^*] = \sigma^2[p^0\cdot\hat{1} - p^i\sigma^{i*}] = \sigma^2(p\cdot\sigma^*)$$

$$= -i\begin{pmatrix}\sigma^2 & 0\\ 0 & \sigma^2\end{pmatrix}[u^s(p)]^* = -\gamma^1\gamma^3[u^s(p)]^*$$

basta multiplicar os dois lados por $\gamma^1\gamma^3$ e: $\begin{cases}(\gamma^i)^2 = -1\\ \gamma^1\gamma^3 = -\gamma^3\gamma^1\end{cases}$

Invertendo a relação obtemos: $\boxed{[u^s(p)]^* = \gamma^1\gamma^3 u^{-s}(\tilde{p})}$ (eq. 157.1)

da mesma forma: $\boxed{[v^s(p)]^* = \gamma^1\gamma^3 v^{-s}(\tilde{p})}$ (eq. 157.2)

Juntando tudo em ψ temos:

$$\boxed{T\psi T} = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}}\sum_s T\left(a^s_{\vec{p}}\,u^s(p)\,e^{-ipx} + b^{s+}_{\vec{p}}\,v^s(p)\,e^{+ipx}\right)T =$$

$$= \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}}\sum_s\left(a^{-s}_{-\vec{p}}\,\underbrace{u^s(p)^*}_{\gamma^1\gamma^3 u^{-s}(\tilde{p})}\,e^{ipx} + b^{-s+}_{-\vec{p}}\,\underbrace{v^s(p)^*}_{\gamma^1\gamma^3 v^{-s}(\tilde{p})}\,e^{-ipx}\right) = \quad \{p\cdot x = \tilde{p}(t,-\vec{x})\}$$

$$= \gamma^1\gamma^3\int\frac{d^3\tilde{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}}\sum_s\left(a^{-s}_{\vec{\tilde{p}}}\,u^{-s}(\tilde{p})\,e^{-i\tilde{p}(-t,\vec{x})} + b^{-s+}_{-\vec{p}}\,v^{-s}(\tilde{p})\,e^{+i\tilde{p}(-t,\vec{x})}\right) =$$

$$= \boxed{\gamma^1\gamma^3\,\psi(-t,\vec{x})}$$ (eq. 157.3)

$$\psi^+(-t,\vec{x})\gamma^{3+}\gamma^{1+} = \psi^+(-t,\vec{x})(-\gamma^3)(-\gamma^1)$$

Para os bilineares precisamos de: $T\bar{\psi}T = T\psi^+\gamma^0 T = T\psi^+ T\underbrace{(\gamma^0)^*}_{\gamma^0} = \bar{\psi}(-t,\vec{x})\gamma^3\gamma^1$

E obtemos: $T\bar{\psi}\overset{TT}{\psi}T = \bar{\psi}_{-t}\gamma^3\gamma^1\;\gamma^1\gamma^3\;\psi_{-t} = (\bar{\psi}\psi)(-t,\vec{x})$

$$T\bar{\psi}\overset{TT}{\gamma_5}\psi T = T\bar{\psi}T\overset{\in\mathbb{R}}{\gamma_5^*}T\psi T = \bar{\psi}_{-t}\gamma^3\gamma^1\gamma_5\gamma^1\gamma^3\psi_{-t} = +(\bar{\psi}\gamma_5\psi)(-t,\vec{x})$$

$$T\,\underline{\underline{i}}\,\bar{\psi}\overset{TT}{\gamma_5}\psi T = -(i\bar{\psi}\gamma_5\psi)(-t,\vec{x})$$

$$T\bar{\psi}\overset{TT}{\gamma^\mu}\psi T = \bar{\psi}_{-t}\gamma^3\gamma^1\gamma^{\mu*}\gamma^1\gamma^3\psi_{-t} = (-1)^\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)(-t,\vec{x})$$

$$\left.\begin{aligned}
&\to \gamma^{0*} = \gamma^0 \Rightarrow \gamma^3\gamma^1(+\gamma^0)\gamma^1\gamma^3 = \gamma^0\\
&\to \gamma^{1*} = \gamma^1 \Rightarrow \gamma^3\underbrace{\gamma^1(+\gamma^1)}_{-1}\gamma^1\gamma^3 = -\gamma^1\\
&\to \gamma^{2*} = -\gamma^2 \Rightarrow \gamma^3\gamma^1(-\gamma^2)\gamma^1\gamma^3 = -\gamma^2\\
&\to \gamma^{3*} = \gamma^3 \Rightarrow \gamma^3\gamma^1(+\gamma^3)\gamma^1\gamma^3 = -\gamma^3
\end{aligned}\right\}\quad \underbrace{(-1)^\mu}\gamma^\mu \quad \begin{aligned}&\to +1\ /\ \mu=0\\ &\ \ \ -1\ /\ \mu=1,2,3\end{aligned}$$

Conjugação de Carga:

Esta é diferente das anteriores, pois não é uma transformação do espaço tempo mas age diretamente sobre os operadores de campo de forma a levar partículas em anti-partículas (e vice versa). Vamos ver como podemos definí-la:

Começamos notando que, dado que: $\psi \sim a^{s}_{\vec p}\, u^{s}(p)\, e^{-ipx} + b^{s}_{\vec p}\, v^{s}(p)\, e^{+ipx}$

e: $H \sim \omega(\underbrace{a^{\dagger} a}_{\text{criam e aniquilam partículas}} + \underbrace{b^{\dagger} b}_{\text{criam e aniquilam antipartículas}})$

Logo, o operador que queremos deve ligar:

$$a^{\dagger}|0\rangle \xleftrightarrow{\;C\;} b^{\dagger}|0\rangle$$

$$\langle 0|a \longleftrightarrow \langle 0|b$$

Definimos portanto:

$$\boxed{C\, a^{s}_{\vec p}\, C = b^{s}_{\vec p}}$$

$$\boxed{C\, b^{s}_{\vec p}\, C = a^{s}_{\vec p}} \qquad \text{(eq. 158.1)}$$

(poderiam haver fases, que tomamos como 1 - uma discussão mais completa sobre fases em conjugação de carga está feita na seção 3.3 do Weinberg, especialmente na pg 131 - a leitura vale ainda que você não se preocupe em entender a notação)

$$C^{\dagger} = C^{-1} = C$$

Então, usando o fato de que (queremos relacionar *u* e *v*):

$$v^{s}(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\; \eta^{s} \\ -\sqrt{p\cdot\bar\sigma}\; \eta^{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\; (-i\sigma_2 \xi^{s*}) \\ -\sqrt{p\cdot\bar\sigma}\; (-i\sigma_2 \xi^{s*}) \end{pmatrix}$$

$$\eta^{s} = \xi^{-s}$$

$$(v^{s}(p))^{*} = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\; (-i\sigma_2 \xi^{s*}) \\ -\sqrt{p\cdot\bar\sigma}\; (-i\sigma_2 \xi^{s*}) \end{pmatrix}^{*} = \begin{pmatrix} -i\sigma_2 \sqrt{p\cdot\bar\sigma^{*}}\; \xi^{s*} \\ +i\sigma_2 \sqrt{p\cdot\sigma^{*}}\; \xi^{s*} \end{pmatrix}^{*} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}}_{-i\gamma^{2}} \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\; \xi^{s} \\ \sqrt{p\cdot\bar\sigma}\; \xi^{s} \end{pmatrix}}_{u^{s}(p)}$$

$$\bar\sigma\,\sigma^{2} = \sigma^{2}(-\vec\sigma^{*}) \qquad \sigma\,\sigma^{2} = \sigma^{2}\,\bar\sigma^{*}$$

$$(i\sigma_2)^{*} = i\sigma_2$$

$$(v^{s}(p))^{*} = -i\gamma^{2} u^{s}(p) \;\Rightarrow \qquad (\gamma^{2})^{2} = -1$$

$$\boxed{\begin{aligned} u^{s}(p) &= -i\gamma^{2}(v^{s}(p))^{*} \\ v^{s}(p) &= -i\gamma^{2}(u^{s}(p))^{*} \end{aligned}} \qquad \text{(eq. 158.2)}$$

Como o operador C é linear, fica fácil obter o efeito sobre o campo

$$\psi^{\dagger} \sim \int(\ldots)(b\, v^{\dagger} e^{-ipx} + a^{\dagger} u^{\dagger} e^{ipx})$$

$$C\,\psi(x)\,C = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{s} \Big(b^{s}_{\vec p}\, \underbrace{u^{s}(p)}_{-i\gamma^{2}(v^{s}(p))^{*}}\, e^{-ipx} + a^{s\dagger}_{p}\, \underbrace{v^{s}(p)}_{-i\gamma^{2}(u^{s}(p))^{*}}\, e^{+ipx} \Big) =$$

$$= -i\gamma^{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{s} \Big(b^{s}_{p}\, (v^{s}(p))^{*}\, e^{-ipx} + a^{s\dagger}_{p}\, (u^{s}(p))^{*}\, e^{+ipx} \Big) = -i\gamma^{2} (\psi^{\dagger}(x))^{T}$$

transp. nos índices de spinor

$$\therefore \boxed{C\psi(x)C = -i\gamma^2(\psi^\dagger)^T}$$ (eq. 159.1)

$$(\gamma^2)^T = \gamma^2$$

$$\hookrightarrow C\psi(x)C = -i\gamma^2(\underbrace{\psi^\dagger\gamma^0}_{\bar\psi}\gamma^0)^T = -i(\bar\psi\gamma^0\gamma^2)^T$$

$$\gamma^{2\dagger} = -\gamma^2$$

$$(C\psi C)^\dagger = (-i\gamma^2(\psi^\dagger)^T)^\dagger = i\psi^T\gamma^{2\dagger} = -i\psi^T\gamma^2$$

$$C\bar\psi C = C\psi^\dagger C\gamma^0 = -i\psi^T\gamma^2\gamma^0 = -i(\gamma^0\gamma^2\psi)^T$$

$$(\gamma^0)^T = \gamma^0$$

Assim:

$$\boxed{C\bar\psi\psi C} = (-i\gamma^0\gamma^2\psi)^T(-i\bar\psi\gamma^0\gamma^2)^T = +(\bar\psi\gamma^0\gamma^2\gamma^0\gamma^2\psi)^T = (\bar\psi\psi)^T = \boxed{\bar\psi\psi}$$ (eq. 159.2)

$$(\gamma^0)^2 = 1 \qquad (\gamma^2)^2 = -1$$

sinal extra quando $\bar\psi$ passa por ψ

Analogamente:

$$\boxed{\begin{aligned} C\bar\psi\gamma_5\psi C &= \bar\psi\gamma_5\psi \\ C\bar\psi\gamma^\mu\psi C &= -\bar\psi\gamma^\mu\psi \\ C\bar\psi\gamma^\mu\gamma_5\psi C &= \bar\psi\gamma^\mu\gamma_5\psi \end{aligned}}$$ (eq. 159.3)

basta multiplicar por i para obter a mesma regra para o operador hermitiano

Podemos resumir tudo na seguinte tabela:

	P	T	C	CPT
$\bar\psi\psi$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$
$\bar\psi\gamma_5\psi$	-1	$+1$	$+1$	-1
$i\bar\psi\gamma_5\psi$	-1	-1	$+1$	$+1$
$\bar\psi\gamma^\mu\psi$	$(-1)^\mu$	$(-1)^\mu$	-1	-1
$\bar\psi\gamma^\mu\gamma_5\psi$	$-(-1)^\mu$	$(-1)^\mu$	$+1$	-1
$\bar\psi\gamma^{\mu\nu}\psi$	$(-1)^\mu(-1)^\nu$	$-(-1)^\mu(-1)^\nu$	-1	$+1$
∂_μ	$(-1)^\mu$	$-(-1)^\mu$	$+1$	-1

coeficientes na tabela

$$P: \hat O(\vec x,t) \to \eta\, \hat O(-\vec x,t)$$
$$T: \hat O(\vec x,t) \to \eta\, \hat O(\vec x,-t)$$

ñ hermitiana

$$(-1)^\mu = (1,-1,-1,-1)$$

ñ são invariantes de Lorentz

o que está ligado à unitariedade da teoria.

Podemos notar que todas as combinações hermitianas e invariantes de Lorentz preservam CPT, incluindo: $\bar\psi\not\partial\psi$, $\bar\psi\gamma^\mu\gamma_5\partial_\mu\psi$, ETC...