Quantização de Campos de Gauge

(Nastase 16, Peskin 9.4, Ryder 7.1)

Voltaremos agora ao "mundo bosônico" para lidar com um tipo bastante especial de bóson, os Bósons de Gauge. Estes campos vetoriais são introduzidos em teorias toda vez que assumimos a existência de alguma simetria contínua e local (simetria de Gauge), em geral postulando que o conteúdo de matéria da teoria (escalares e férmions) se transformem sobre alguma representação de um grupo de Lie (embora seja também comum pensar em teorias de puro Gauge, onde temos apenas os campos vetoriais, comumente chamadas de teorias de Yang-Mills).

Neste caso, o campo vetorial deve, para manter a invariância da ação sobre as transformações do grupo em questão, se transformar da seguinte forma:

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu \lambda(x)$$

(no caso de uma simetria U(1), abeliana)

constantes de acoplamento

$$A^a_\mu(x) \to A^a_\mu(x) + \frac{1}{g}\partial_\mu \lambda^a(x) + f^{abc} A^b_\mu \lambda^c(x)$$

$a, b, c \to$ indices da representação adjunta do grupo (vão de 1 até #Geradores do Grupo)

constantes de estrutura do grupo

(no caso de uma simetria não-abeliana)

Vamos nos restringir ao caso abeliano, por enquanto, e comecemos tentando o caminho ingênuo, análogo ao que fizemos no campo escalar:

$$Z[J] = N\int D\phi \; e^{i\int(\mathcal{L} + J\phi)dx} = \frac{1}{N}\int D\phi \; e^{-i\int d^4x\left[\frac{1}{2}\phi(\Box+m^2)\phi - \phi J\right]} =$$

$$= \exp\left[-\frac{1}{2}\int d^4x\, d^4y\; J(x)\, D_F(x-y)\, J(y)\right]$$

No caso do campo eletromagnético (sem interação com a matéria):

$$Z[J] = N\int DA_\mu \; e^{i\int(\mathcal{L} + J^\mu A_\mu)d^4x}$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$$

$$\int d^4x\,(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) = \cancelto{0}{\int d^4x\,\partial_\mu(A_\nu\partial^\mu A^\nu)} - \int d^4x\, A_\nu \partial_\mu\partial^\mu A^\nu = -\int d^4x\; g_{\mu\nu}A^\mu \Box A^\nu$$

$$\int d^4x\,(\partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu) = \cancelto{0}{\int d^4x\,\partial_\nu(A_\mu\partial^\mu A^\nu)} - \int d^4x\, A_\mu \partial_\nu\partial^\mu A^\nu = -\int d^4x\; A^\mu\partial_\nu\partial_\mu A^\nu$$

$$\boxed{\mathcal{L}} = -\frac{1}{4}\left(\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu + \partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu\right) =$$

$$= \boxed{\frac{1}{2} A^\mu \left(g_{\mu\nu}\Box - \partial_\nu \partial_\mu\right) A^\nu}$$ (eq. 146.1)

$$\left(g_{\mu\nu}\Box - \partial_\mu \partial_\nu\right) A^\nu = 0$$ (eq. de Maxwell)

Em princípio só precisaríamos inverter este operador, mas aí esbarramos em um problema: imagine uma configuração de campo específica (estamos somando sobre TODAS ELAS):

$$A^\mu(x) = \partial^\mu \alpha(x)$$

$$\left(g_{\mu\nu}\Box - \partial_\nu \partial_\mu\right)\partial^\mu \alpha = \left(\Box \partial_\nu - \partial_\nu \Box\right)\alpha = 0$$

O operador tem autovalores zero, e portanto é singular. De fato, a integral:

$$\int DA_\mu \exp\left\{\frac{i}{2}\int d^4x\, A_\mu(x)\left(g^{\mu\nu}\partial^2 - \partial^\mu \partial^\nu\right)A_\nu(x)\right\}$$

vai receber uma contribuição igual a "1" cada vez que considerarmos uma contribuição deste tipo. É divergente. Podemos ver que esta divergência é transmitida para o que seria a função de Green:

$$\left(g_{\mu\nu}\Box - \partial_\mu \partial_\nu\right) D^{\nu\lambda}(x-y) = \delta^\lambda_\mu\, \delta^4(x-y)$$

$$\Big\downarrow \partial^\mu \qquad\qquad\qquad \Big\downarrow \partial^\mu$$

(tem que ser realmente grande para satizfazer isto)

$$\left(0\cdot\partial_\nu\right) D^{\nu\lambda}(x-y) = \partial^\lambda \delta^4(x-y)$$

A raiz do problema está na invariância de gauge. Quando somamos sobre diversas configurações de A_μ, somamos inclusive aquelas equivalentes (ligadas por uma transformação de gauge) o que é uma forma de "multipla contagem".

$$A_\mu \longleftrightarrow \cancel{A_\mu + \partial_\mu \alpha_1}$$

$$A_\mu \longleftrightarrow \cancel{A_\mu + \partial_\mu \alpha_2}$$

$$A_\mu \longleftrightarrow \cancel{A_\mu + \partial_\mu \alpha_3} \ldots$$

já incluimos esta configuração

não devemos incluir estas

Temos que forçar a nossa integral de trajetória a considerar somente estados inequivalentes por uma transformação de gauge. Uma forma óbvia de fazê-lo é fixar o gauge, mas como fazemos isto em uma integral de trajetória?

Comecemos a discussão escolhendo qual fixação de Gauge será mais conveniente para a quantização da teoria. A equação de movimento clássica:

$$\Box A^\nu - \partial^\nu\left(\partial^\mu A_\mu\right) = 0$$

é bastante difícil de resolver, no Gauge de Lorenz (proposta por Ludvig Lorenz que não é o Hendrik Lorentz) ou Gauge Covariante a solução é bem mais simples:

Gauge Covariante

$$\boxed{\partial^\mu A_\mu = 0} \Rightarrow \Box A_\mu = 0 \longleftrightarrow \begin{cases} A_\mu \sim \underbrace{\epsilon_\mu(k)}_{} e^{\pm i k\cdot x} \\ k^2 = 0 \end{cases}$$

(eq. 162.1)

(Klein-Gordon, para m = 0)

o coeficiente carrega o índice vetorial e a informação sobre o momento angular (spin / polarização)

(pois a massa é zero na eq. KG)

$$\partial^\mu A_\mu(x) = 0 \Rightarrow \int d^4x\, e^{ipx}\, \partial^\mu A_\mu(x) = 0$$

$$\int d^4x\, e^{ipx}\, \partial^\mu \int \frac{d^4k}{N_k} \epsilon_\mu(k) e^{\pm ikx} = 0$$

$$\int \frac{d^4k}{N_k} k^\mu \cdot \epsilon_\mu(k)\, \delta^4(p \pm k) = 0 \Rightarrow \boxed{\pm p^\mu \epsilon_\mu(\pm p) = 0}$$

(eq. 162.2)

esta fixação, no entanto, não fixa completamente o Gauge. Note que, dadas duas configurações de campo fisicamente equivalentes, ligadas pela transformação de Gauge a seguir:

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \lambda \quad \text{com} \quad \lambda \,/\, \Box\lambda = 0$$

ambas podem satisfazer a condição de fixação (sem exigir $A = A'$): $\partial^\mu A'_\mu = \partial^\mu A_\mu = 0$

Poderíamos aprimorar a nossa fixação exigindo também $\boxed{A_0 = 0}$ (eq. 162.3)

(ainda mantendo a condição 162.1)

o que equivale a: $\partial_0 \lambda = -A_0$

E não causa nenhum problema com a condição 162.1, uma vez que:

$$\Box A_0 = 0 \Rightarrow \Box \partial_0 \lambda = 0 \Rightarrow \partial_0 \underbrace{\Box\lambda}_{\Box\lambda = 0} = 0$$

já era permitido

A combinação de 162.1 e 162.3 nos leva a: $\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0}$ (eq. 162.4)

Note que esta condição não é condizente com a presença de correntes (fontes) externas, que produziriam um $A_0 \neq 0$, portanto este formalismo só é útil para radiação no vácuo. Em suma, usaremos:

$$\boxed{A_0 = 0 \quad \& \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0}$$

(eq. 162.5)

$\epsilon_0(p) = 0$

162.2 $\rightarrow$ $\vec{p}\cdot\vec{\epsilon}^{(\lambda)}(p) = 0$

Gauge de Radiação ou de Coulomb

Sabemos do eletromagnetismo que, neste Gauge, só temos dois modos que se propagam no campo, correspondendo a duas polarizações transversais. Por isso ele é um Gauge Físico.

A solução clássica é:

$$\boxed{\vec{A}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\sqrt{2E_k}} \sum_{\lambda=1,2} \vec{\epsilon}^{(\lambda)}(k)\left[a^{(\lambda)}(k)\, e^{-ik\cdot x} + a^{(\lambda)\dagger}(k)\, e^{+ik\cdot x}\right]}$$ (eq. 163.1)

$$k^2 = 0 \qquad \vec{k}\cdot\vec{\epsilon}^{(\lambda)}(k) = 0$$

É também conveniente escolher os dois vetores de polarização $\vec{\epsilon}^{(\lambda)}$ de forma que sejam ortogonais:

$$\boxed{\vec{\epsilon}^{(\lambda)}(\vec{k})\cdot\vec{\epsilon}^{(\lambda')}(\vec{k}) = \delta^{\lambda\lambda'}}$$ (eq. 163.2)

Quantização no Gauge Físico:

(não explicitaremos todos os detalhes, ver: Bjorken & Drell, "Relativistic Quantum Fields", cap 14)

Queremos agora impor as condições 162.5 uma vez que o campo tenha se tornado um operador. A condição para o componente zero é trivial, estamos de fato removendo um grau de liberdade do sistema, já a condição $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$ deve ser vista como uma condição para operadores. Ou seja:

$$\vec{\nabla}\cdot\langle\vec{A}\rangle = 0 \qquad \& \qquad \vec{\nabla}\cdot[\vec{A}, \hat{\mathcal{O}}] = 0$$

Note então que, definindo o momento conjugado:

$$\pi^i = F^{0i} = E^i$$

Poderíamos, inocentemente, impor:

$$[A^i(\vec{x},t), E^j(\vec{x}',t)] = i\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\delta^{ij}\, e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')} = i\,\delta^{ij}\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')$$

Mas veja que, se aplicamos $\vec{\nabla}_{x,i}$ neste comutador NÃO temos: $\vec{\nabla}\cdot[\vec{A}(\vec{x},t), E^i(\vec{x}',t)] = 0$

$$\vec{\nabla}_{x,i}[A^i(\vec{x},t), E^j(\vec{x}',t)] = i\frac{\partial}{\partial x^i}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\delta^{ij}\, e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')} = -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, k_j\, e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')}$$

A lição aqui é que vínculos (e a fixação de Gauge é um vínculo sobre as variáveis dinâmicas do sistema) tornam a prescrição de quantizar simplesmente trocando os brackets de Poison por comutadores (ou anticomutadores) inválida. Dirac achou uma forma de generalizar a prescrição para sistemas com vínculo mas não exploraremos isto aqui (veja as notas do prof. Nastase lec 15 e a referência lá dada para o original de Dirac), para nossos fins basta notar que a generalização:

$$\boxed{\delta^{ij} \longrightarrow \Delta^{ij} = \left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{k^2}\right)}$$ (eq. 163.3)

Fornece a seguinte relação de comutação:

$$[A^i(\vec{x},t), E^j(\vec{x}',t)] = i\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\Delta^{ij}\, e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')} = i\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\Big(\delta^{ij} - \underbrace{\frac{k^i k^j}{k^2}}_{\frac{\partial^i\partial^j}{(\vec{\nabla})^2}}\Big)\, e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')}$$

$$= i\left(\delta^{ji} - \frac{\partial^i\partial^j}{(\vec{\nabla})^2}\right)\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')$$

$[A,A]=[E,E]=0$

que, por sua vez, satisfaz $\vec{\nabla}[\vec{A}, E^i] = 0$ uma vez que

$$k_i \Delta^{ij} = k_j - k_i \frac{k^i k^j}{k^2} = 0$$

Substituindo a decomposição de A no comutador acima obtemos a relação usual:

$$\boxed{[a^{(\lambda)}(k), a^{(\lambda')\dagger}(k')] = (2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta^3(\vec{k}-\vec{k}')}$$ (eq. 164.1)

$[a,a]=[a^\dagger,a^\dagger]=0$

$$H = \frac{1}{2}\int d^3x\,(\vec{E}^2+\vec{B}^2) = \sum_\lambda\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{k^0}{2}\left[a^{(\lambda)\dagger}(k)a^{(\lambda)}(k) + a^{(\lambda)}(k)a^{(\lambda)\dagger}(k)\right]$$

$$\boxed{:H: = \sum_\lambda\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,k^0\,a^{(\lambda)\dagger}(k)\,a^{(\lambda)}(k)}$$ (eq. 164.2)

Esta escolha de Gauge é conveniente pois só temos dois graus de liberdade, que coincidem com os graus físicos. No entanto a invariancia de Lorentz explícita está perdida, e para ter certeza de que correções quânticas (loops) não a quebram seria necessário testá-la explicitamente a cada passo da teoria de perturbação. Uma alternativa a isto seria escolher o Gauge Covariante (que mantém a estrutura de Lorentz explícita) e pagar o preço de ter polarizações não físicas na teoria, é o que faremos a seguir.

Quantização no Gauge Covariante

(mais detalhes: Mandl e Shaw, secs 5.1 e 5.2)

Neste caso, a única condição de fixação é a da eq. 147.1: $\partial_\mu A^\mu = 0$

A solução clássica é: $$A_\mu = \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3\sqrt{2E_k}}\underbrace{\sum_{\lambda=0}^{3}}_{\text{4 polarizações}}\epsilon_\mu^{(\lambda)}(k)\left[a^{(\lambda)}(k)\,e^{-ikx} + a^{(\lambda)\dagger}(k)\,e^{+ikx}\right]$$

$k^2=0 \xrightarrow{E_k = k}$

Podemos escolher um sistema de coordenadas tomando o 3 eixo na direção de k: $k^\mu = (k,0,0,k)$

e mais uma vez construir polarizações ortogonais:

$$\epsilon^{(0)}_{\mu} = (1,0,0,0) \quad \epsilon^{(1)}_{\mu} = (0,1,0,0) \quad \epsilon^{(2)}_{\mu} = (0,0,1,0) \quad \epsilon^{(3)}_{\mu} = (0,0,0,1)$$

$$\therefore \quad \epsilon^{(\lambda)}_{\mu} = \delta^{\lambda}_{\mu}$$

$$\lambda = 1,2 \rightarrow k^{\mu}\epsilon^{(\lambda)}_{\mu} = 0$$ ✓ Polarições transversas são físicas

$$\lambda = 0,3 \rightarrow k^{\mu}\epsilon^{(\lambda)}_{\mu} = E_k$$ ✗ Polarições tipo-tempo ($\lambda = 0$) e longitudinal ($\lambda = 3$) não são físicas

isso quer dizer que, quando forçarmos a condição $\partial^{\mu}A_{\mu} = 0$ em termos de observáveis, os modos tipo-tempo e longitudinal devem se cancelar.

Mais uma vez temos que modificar o jeito de quantizar para levar o vínculo da fixação de Gauge em conta, neste caso trocaremos a imposição forte de que:

$$\left[\partial_{\mu}A^{\mu}(x), A^{\nu}(x')\right] = 0$$

que é impossível de satisfazer com a expansão de *A* dada acima, por uma condição imposta apenas sobre a parte de aniquilação da expansão:

$$\boxed{\partial^{\mu}A^{(+)}_{\mu}(x)\,|\psi\rangle = 0} \quad \text{(eq. 150.1)}$$

Condição de Gupta-Bleuler

$$A^{(+)}_{\mu} \equiv \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\sqrt{2E_k}} \sum_{\lambda=0,\dots,3} \vec{\epsilon}^{(\lambda)}(k)\, a^{(\lambda)}(k)\, e^{-ik\cdot x}$$

Que também implica:

$$\begin{cases} \langle\psi|\partial^{\mu}A^{(-)}_{\mu}(x) = 0 \\ A^{(-)}_{\mu} \equiv \dots \; a^{(\lambda)\dagger}(k)\, e^{+ikx} \\ \langle\psi|\partial^{\mu}A_{\mu}|\psi\rangle = \langle\psi|\partial^{\mu}A^{(-)}_{\mu} + \partial^{\mu}A^{(+)}_{\mu}|\psi\rangle = 0 \end{cases}$$

O que estamos fazendo na prática é colocar uma restrição nos estados iniciais e finais permitidos pela teoria. A quantização é dada por:

$$\left[A_{\mu}(\vec{x},t), \Pi_{\nu}(\vec{x}',t)\right] = i\, g_{\mu\nu}\, \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}') \qquad [A,A] = [\Pi,\Pi] = 0$$

Note que temos um problema aí, pois $\Pi_0 = \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}^0} = \dfrac{\partial}{\partial\dot{A}^0}\left[-\frac{1}{4}(\partial_i A_0 - \partial_0 A_i)(\partial^i A^0 - \partial^0 A^i)\right] = 0$

Portanto não há como a relação de comutação acima valer para A_0 e π_0, a não ser que modifiquemos a Lagrangeana - existe uma forma de fazer isso sem mudar as equações de movimento, que não exploraremos aqui, uma vez que este procedimento é muito mais direto via integrais de trajetória, o que faremos a seguir (veja Mandl e Shaw para a história completa). Assumindo que este problema foi resolvido, podemos obter relações de comutação para os operadores de criação e aniquilação:

$$\boxed{\left[a^{(\lambda)}(k), a^{(\lambda')\dagger}(k')\right] = -g^{\lambda\lambda'}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}')} \quad \text{(eq. 166.1)}$$

$$[a,a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0$$

O que está bem para $\lambda = 1, 2$ e 3, mas:

$$\lambda = 0 \Rightarrow \left[a^{(0)}(k), a^{(0)\dagger}(k')\right] = -(2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}')$$

O que leva a uma norma negativa para $a^\dagger|0\rangle$ pois:

$$\| a^\dagger|0\rangle\|^2 \equiv \langle 0|a a^\dagger|0\rangle = -\langle 0|a^\dagger a|0\rangle - \langle 0|0\rangle = -1$$

Reforçando o fato de que estes estados não podem ser físicos. A condição de Gupta-Bleuler diz que:

$$\partial^\mu A_\mu^{(+)}(x)|\psi\rangle = 0$$

$$k^\mu \epsilon_\mu^{(1)} = k^\mu \epsilon_\mu^{(2)} = 0$$

$$\hookrightarrow \sum_{\lambda=0\ldots3} k^\mu \epsilon_\mu^{(\lambda)}(k) a^{(\lambda)}(k)|\psi\rangle = 0 \longrightarrow \Big[\underbrace{k^\mu \epsilon_\mu^{(0)}(k)}_{E_k} a^{(0)}(k) + \underbrace{k^\mu \epsilon_\mu^{(3)}(k)}_{E_k} a^{(3)}(k)\Big]|\psi\rangle = 0$$

$$\boxed{\left[a^{(0)}(k) + a^{(3)}(k)\right]|\psi\rangle = 0} \quad \text{(eq. 166.2)}$$

Esta equação deve ser verdade para quaquer estado ψ, e portanto é uma condição que restringe os estados físicos possíveis. Um exemplo de estado que satisfaz esta restrição é:

$$|\psi\rangle = \left(a^{(0)\dagger}(k) + a^{(3)\dagger}(k)\right)|0\rangle$$

$$\left[a^{(0)}(k) + a^{(3)}(k)\right]\left(a^{(0)\dagger}(k) + a^{(3)\dagger}(k)\right)|0\rangle = \Big[\underbrace{\left[a^{(0)}(k), a^{(0)\dagger}(k)\right]}_{-(2\pi)^3\delta} + \underbrace{\left[a^{(3)}(k), a^{(3)\dagger}(k)\right]}_{+(2\pi)^3\delta}\Big]|0\rangle = 0$$

Podemos mostrar que o mesmo é verdade para qualquer estado que tenha o mesmo número de excitações com as polarizações (0) e (3). O resultado final é que, neste Gauge, a contribuição destas duas polarizações não-físicas se cancelam no cálculo de todos os observáveis. A energia, por exemplo, é dada por:

$$\langle\psi|H|\psi\rangle = \int d^3k\, k^0 \sum_{\lambda=0,1,2,3} \xi_\lambda \langle\psi|\, a^{(\lambda)\dagger}a^{(\lambda)}\,|\psi\rangle$$

$$\boxed{\xi_0 = -1 \quad \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 1}$$

$$165.2 \longrightarrow \quad \langle\psi|\left[a^{\dagger(0)}(k) + a^{(3)\dagger}(k)\right] = 0$$

isso quer dizer que (simplificando a notação): $a^{(0)+}(k) \equiv 0^+$ $a^{(3)+}(k) \equiv 3^+$

$$<\psi|(0^+ + 3^+)0|\psi> = <\psi|(0^+ + 3^+)3|\psi> = <\psi|0^+(0+3)|\psi> = <\psi|3^+(0+3)|\psi> = 0$$

$$-<\psi|(0^+ + 3^+)0|\psi> + <\psi|(0^+ + 3^+)3|\psi> - <\psi|0^+(0+3)|\psi> + <\psi|3^+(0+3)|\psi> = 0$$

$$<\psi|-0^+0 - \cancel{3^+0} + \cancel{0^+3} + 3^+3 - 0^+0 - \cancel{0^+3} + \cancel{3^+0} + 3^+3|\psi> = 0$$

$$<\psi|a^{(3)+}(k)\,a^{(3)}(k) - a^{(0)+}(k)\,a^{(0)}(k)|\psi> = 0$$

Portanto a energia pode ser escrita como:

$$\boxed{<\psi|H|\psi> = \int d^3k\; k^0 \sum_{1,2} <\psi|\, a^{(\lambda)+}a^{(\lambda)}\, |\psi>} \quad \text{(eq. 167.1)}$$

só as polarizações transversais contribuem

Fixação de Gauge em Integrais de Trajetória, método de Fadeev-Popov

Há um jeito mais moderno, e mais facilmente generalizável para o caso não-abeliano, de lidar com a redundância contida nas teorias de Gauge. Começamos fazendo a rotação de Wick para o espaço Euclideano. É preciso atentar para o fato de que A_μ é um vetor de Lorentz e sua componente zero também deve ser rodada:

$$x_0 = x^0 = t = -i x_4 = -i x^4 \qquad \partial_0 = \frac{\partial}{\partial x^0} = i\frac{\partial}{\partial x^4} = i\,\partial_4$$

$$\boxed{A_0 \equiv i A_4} \quad \text{(eq. 167.2)}$$

$$\boxed{E_i^{(M)} = F_{0i}} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 = i\partial_4 A_i - i\partial_i A_4 = \boxed{i F_{4i} \equiv i E_i^{(E)}} \quad \boxed{F^{0i} = -i F^{4i}} \quad \text{(eq. 167.3)}$$

$$\mathcal{L}^{(M)}_{EM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}F_{0i}F^{0i} - \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} = -\frac{1}{4}F_{4i}F^{4i} - \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} = -\frac{1}{4}F^{(E)}_{\mu\nu}F^{(E)\mu\nu}$$

$$i\int \underbrace{d^4x}_{-i\,d^4x_E}\, \mathcal{L}^{(M)}_{EM} = \int d^4x_E \left(-\frac{1}{4}F^{(E)}_{\mu\nu}F^{(E)\mu\nu}\right) = \underbrace{-\int d^4x_E\, \underbrace{\left(F^{(E)}_{\mu\nu}\right)^2}_{\mathcal{L}^{(E)}_{EM}}}_{S^{(E)}_{EM}}$$

$$\boxed{\mathcal{L}^{(E)}_{EM} = \frac{1}{4}F^{(E)}_{\mu\nu}F^{(E)}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left[\left(E_i^{(E)}\right)^2 + \left(B_i^{(E)}\right)^2\right]} \quad \text{(eq. 167.4)}$$

Esquecendo o índice (E) e fazendo uma integração por parte (análogo ao que fizemos para obter 161.1, mas aqui não há termos de borda por definição):

$$S_{EM}[A] = \int d^4x \left[-\frac{1}{2}A_\mu\left(\delta_{\mu\nu}\partial^2 - \partial_\nu\partial_\mu\right)A_\nu\right]$$

A idéia agora é que em:

$$Z = \int DA_\mu(x)\, e^{-S_{EM}[A]}$$

temos duas "somas":

(1) uma desejável, sobre todas as configurações fisicamente inequivalentes do campo A_μ que criam o comportamento quântico do campo
(2) uma soma igual a anterior só que com todos as configurações levadas em outras fisicamente equivalentes por meio de uma transformação de Gauge, para um parâmetro de Gauge λ específico. Claramente temos uma "cópia" desta para cada escolha de λ, o que acaba virando uma integral em λ.

Se conseguirmos fatorar a integral acima em duas: $\int DA_\mu(x) = \int d\lambda \int DA^{GF}_\mu(x)$

integral para os diversos "Gauges"

integral sobre os campos fisicamente relevantes (Gauge-fixados)

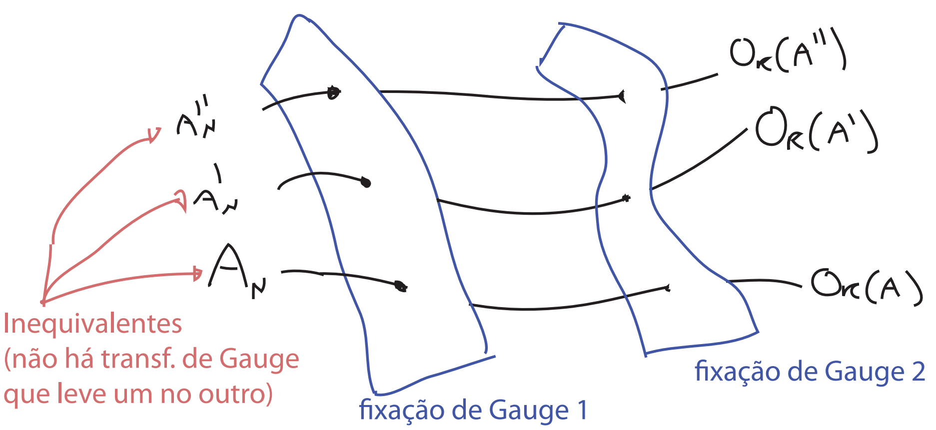
e eliminarmos toda dependencia em λ da integral de trajetória, então a integral em λ vira um fator multiplicativo em Z, completamente irrelevante (é o "volume" do espaço interno definido pelo grupo U(1)). Essa é nossa meta nas próximas páginas.

Para começar, consideremos uma fixação de Gauge covariante mais geral do que a de Lorenz:

$$\boxed{\partial_\mu A_\mu = C(x)} \qquad \text{(eq. 168.1)}$$

Dada uma configuração de campo específica A_μ, definamos a órbita de A_μ, *Or(A)*, como o conjunto de todas as outras configurações que podem ser obtidas a partir de A_μ por meio de uma transformação de Gauge.

Agora imagine também o espaço de todas as possíveis condições de fixação de Gauge. Se estas são "boas" fixações de Gauge, deve haver apenas um ponto de intersecção entre este espaço e *Or(A)* (para cada configuração inequivalente):



Vamos assumir que a intersecção é única, mas existe um problema conhecido em teorias não Abelianas com esta suposição, as chamadas cópias de Gribov (outras intersecções, uma infinidade delas de fato). Não nos preocuparemos com elas pois (1) só aparecem no caso não Abeliano e (2) mesmo nas teorias não Abelianas, só são importantes no regime não perturbativo destas.

Considere então que estamos percorrendo a órbita fazendo a transformação: