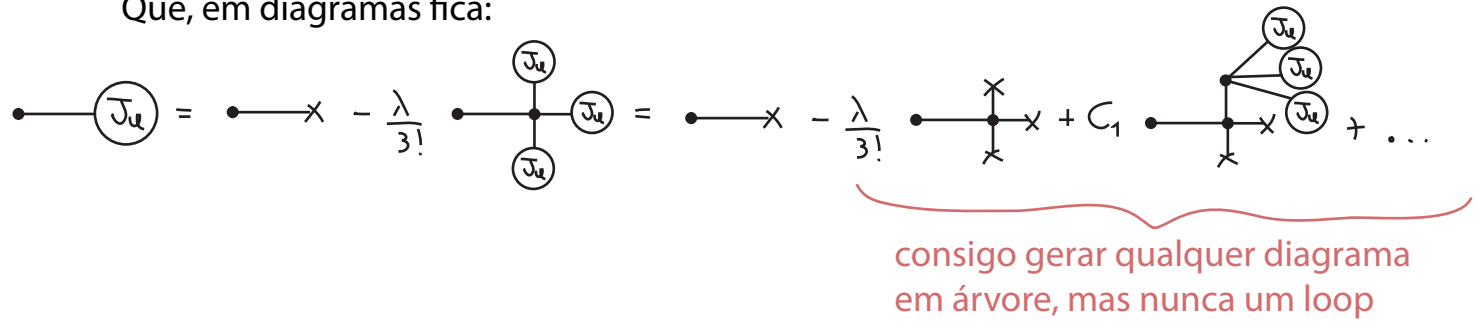


Que, em diagramas fica:



Isso quer dizer que os diagramas em nível árvore são "clássicos" (no sentido mais geral da palavra)? Não. De fato se calculamos estes diagramas usando propagadores e no fim interpretarmos todos os resultados como amplitudes de probabilidade, teremos, como esperado, efeitos já conhecidos de mecânica quântica, tal como interferências entre canais alternativos. O que estamos perdendo então? Os efeitos quânticos intrínsecos de uma *teoria de campo*, que são codificados nos loops da expansão perturbativa. Estes efeitos serão melhor abordados em TQCII, mas consistem essencialmente no fato de uma excitação do campo (uma partícula) acabar interagindo com o próprio campo, com várias consequências (o propagador completo tem um polo que não coincide com a massa na lagrangiana, running das constantes de acoplamento, etc...)

Equações de Dyson-Schwinger e identidades de Ward

(Nastase 18, Peskin 9.6)

A nível clássico vale:

$$\frac{\delta S[J]}{\delta \phi(x)} - J(x) = 0$$

Queremos o equivalente quântico disso. Considere a identidade:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{d}{dx} f(x) = 0 \quad \leftrightarrow \quad f(\pm\infty) = 0$$

Podemos generalizar isto para a integral de trajetória e, no caso do espaço Euclideo não precisamos que o campo vá a zero, a ciclicidade da integral já garante isso:

$$\int \mathcal{D}\phi \frac{\delta}{\delta \phi(x)} e^{-S[\phi] + J \cdot \phi} = 0$$

$$\int \mathcal{D}\phi \frac{\delta}{\delta \phi(x)} e^{-S[\phi] + J \cdot \phi} = \int \mathcal{D}\phi \left[-\frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(x)} + J(x) \right] e^{-S[\phi] + J \cdot \phi} =$$

$$= \left[-\frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(x)} \Big|_{\phi = \frac{\delta J}{\delta \phi}} + J(x) \right] Z[J] = 0$$

leia-se: (1) agimos com a derivada em ϕ na ação; (2) no resultado, troco todos os ϕ por derivadas em J ; (3) essas agem em Z .

$$\left[-\frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(x)} \Big|_{\phi=\frac{\delta}{\delta J}} + J(x) \right] Z[J] = 0$$

Equação de Schwinger-Dyson

(eq. 184.1)

(em sua versão mais compacta e geral)

$$\rightarrow \left\langle \frac{\delta S}{\delta \phi(x)} - J(x) \right\rangle = 0$$

Este resultado parece óbvio e trivial de deduzir, mas isto foi graças ao formalismo de integral de trajetórias. Historicamente este resultado foi obtido em termos de diagramas de Feynman, e é interessante ver como isto é feito pois ele implica **relações** nada triviais **entre diagramas**.

Vamos assumir uma teoria bosônica com termo cinético quadrático e uma interação qualquer:

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \phi \cdot \Delta^{-1} \phi + S_{\text{I}}[\phi]$$

$$\frac{\delta}{\delta \phi(x)} S[\phi] = (\Delta^{-1} \phi)(x) + \frac{\delta}{\delta \phi(x)} S_{\text{I}}[\phi]$$

$$\left(\Delta \cdot \frac{\delta S}{\delta \phi} \right)(y) = \phi(y) + \left(\Delta \cdot \frac{\delta S_{\text{I}}}{\delta \phi} \right)(y)$$

$$\left\{ \int d^4x \Delta(x-y) \frac{\delta}{\delta \phi(x)} = \left(\Delta \cdot \frac{\delta}{\delta \phi} \right)(y) \right\}$$

Substituindo isso em 184.1 (onde primeiro aplicamos Δ):

$$\left[-\frac{\delta}{\delta J(x)} - \left(\Delta \cdot \frac{\delta S_{\text{I}}}{\delta \phi} \right)(x) \Big|_{\phi=\frac{\delta}{\delta J}} + (\Delta \cdot J)(x) \right] Z[J] = 0$$

de onde obtemos a equação de Schwinger-Dyson para Z:

$$\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} = (\Delta \cdot J)(x) Z[J] - \left(\Delta \cdot \frac{\delta S_{\text{I}}}{\delta \phi} \right)(x) \Big|_{\phi=\frac{\delta}{\delta J}} Z[J]$$

(eq. 184.2)

$$\langle \phi(x) \rangle = \langle (\Delta \cdot J)(x) \rangle - \left\langle \left(\Delta \cdot \frac{\delta S_{\text{I}}}{\delta \phi} \right)(x) \right\rangle$$

Uma vez que tenhamos a equação para Z podemos obter a equação para qualquer função de n-pontos, mas precisamos especificar uma interação. Por exemplo:

$$\int \mathcal{L}_{\text{I}}(\phi(y)) = \frac{g_3}{3!} \phi^3(y) + \frac{g_4}{4!} \phi^4(y)$$

(eq. 184.2)

$$\begin{aligned} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} &= (\Delta \cdot J)(x) Z[J] - \int d^4y \Delta(x-y) \int d^4z \delta(y-z) \left(\frac{g_3}{2!} \frac{\delta^2}{\delta J(y) \delta J(y)} + \frac{g_4}{3!} \frac{\delta^3}{\delta J(y) \delta J(y) \delta J(y)} \right) Z[J] \\ &= (\Delta \cdot J)(x) Z[J] - \int d^4z \Delta(x-z) \left(\frac{g_3}{2!} \frac{\delta^2}{\delta J(y) \delta J(y)} + \frac{g_4}{3!} \frac{\delta^3}{\delta J(y) \delta J(y) \delta J(y)} \right) Z[J] \end{aligned}$$

Chamemos $x = x_i$ na equação acima e então tomemos mais $(n-1)$ derivadas: $\frac{\delta}{\delta J(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta J(x_n)}$

$$\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Bigg|_{J=0} = G^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$$

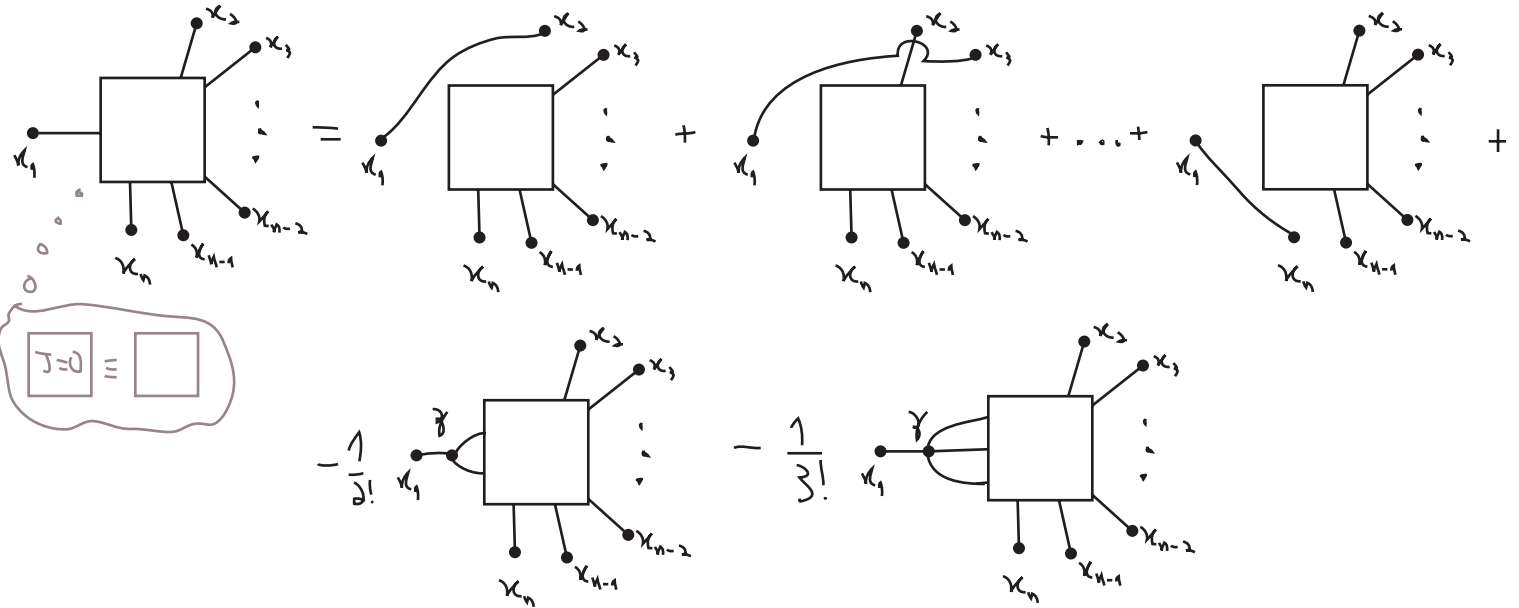
$$\frac{\delta^{n-1} (\Delta \cdot J)(x_1) Z[J]}{\delta J(x_2) \dots \delta J(x_n)} \Bigg|_{J=0} = \Delta(x_1 - x_2) G^{(n-2)}(x_3, \dots, x_n) + \Delta(x_1 - x_3) G^{(n-2)}(x_2, x_4, \dots, x_n) + \dots$$

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \Delta(x_1 - x_2) G^{(n-2)}(x_3, \dots, x_n) + \dots + \Delta(x_1 - x_n) G^{(n-2)}(x_2, \dots, x_{n-1}) +$$

$$- \int d^d z \Delta(x_1 - z) \left[\frac{g_3}{2!} G^{(n+1)}(z, z, x_2, \dots, x_n) + \frac{g_4}{3!} G^{(n+2)}(z, z, z, x_2, \dots, x_n) \right] \quad (\text{eq. 185.1})$$

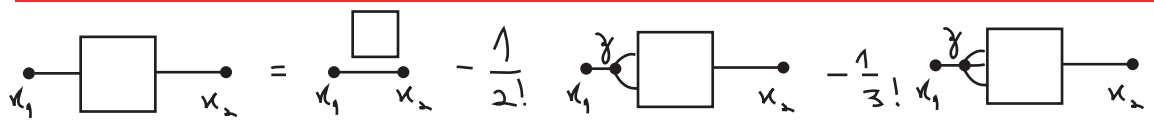
(note que estas são as funções de Green completas, essa relação é verdade independentemente de teoria de perturbação)

Vamos expressar esta equação em termos de diagramas (note que a equação é sempre escrita em função de um **ponto especial** escolhido, neste caso x_1):



Podemos reiterar a equação de DS para obter a expansão perturbativa. Tome, por exemplo, a função de dois pontos da teoria acima:

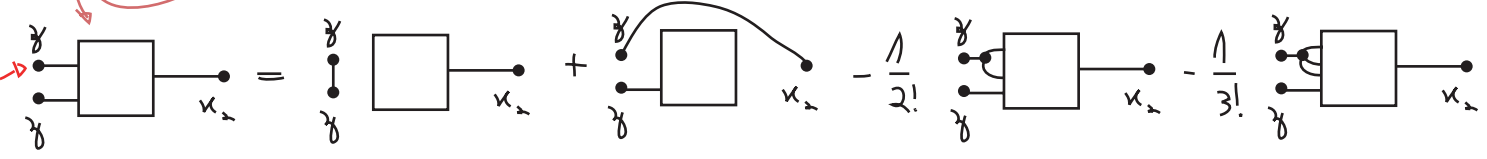
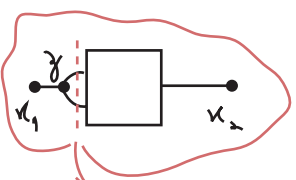
$$G^{(2)}(x_1, x_2) = \Delta(x_1 - x_2) G^{(0)} - \int d^d z \Delta(x_1 - z) \left[\frac{g_3}{2!} G^{(3)}(z, z, x_2) + \frac{g_4}{3!} G^{(4)}(z, z, z, x_2) \right] \quad (\text{eq. 185.2})$$



Se usarmos novamente a equação de DS para $G^{(3)}$ e $G^{(4)}$, temos:

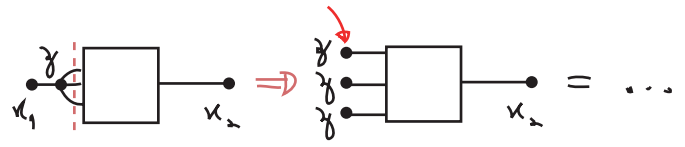
$$G^{(3)}(z, z, x_2) = \Delta(z - z) G^{(1)}(x_2) + \Delta(z - x_2) G^{(1)}(z) - \frac{g_3}{2!} \int d^d w \Delta(z - w) G^{(4)}(w, w, z, x_2) - \frac{g_4}{3!} \int d^d w \Delta(z - w) G^{(5)}(w, w, w, z, x_2)$$

Ponto escolhido para escrever a equação



$$G^{(1)}(z, z, z, x_2) = 2\Delta(z-z) G^{(2)}(z, x_2) + \Delta(z-x_2) G^{(2)}(z, z) - \frac{g_3}{2!} \int d^4\omega \Delta(z-\omega) G^{(5)}(\omega, \omega, z, z, x_2) + \dots$$

$$- \frac{g_4}{3!} \int d^4\omega \Delta(z-\omega) G^{(6)}(\omega, \omega, \omega, z, z, x_2)$$



Voltando com estas expressões em 170.2, temos:

$$G^{(2)}(x_1, x_2) = \Delta(x_1-x_2) G^{(0)} - \frac{g_3}{2!} \int d^4z \Delta(x_1-z) \left[\Delta(z-z) G^{(1)}(x_2) + \Delta(z-x_2) G^{(1)}(z) - \frac{g_3}{2!} \int d^4\omega \Delta(z-\omega) G^{(4)}(\omega, \omega, z, x_2) - \frac{g_4}{3!} \int d^4\omega \Delta(z-\omega) G^{(5)}(\omega, \omega, \omega, z, x_2) \right] + \dots$$

$$- \frac{g_4}{3!} \int d^4z \Delta(x_1-z) \left[2\Delta(z-z) G^{(2)}(z, x_2) + \Delta(z-x_2) G^{(2)}(z, z) + \dots \right]$$

$$- \frac{g_3}{2!} \int d^4\omega \Delta(z-\omega) G^{(5)}(\omega, \omega, z, z, x_2) - \frac{g_4}{3!} \int d^4\omega \Delta(z-\omega) G^{(6)}(\omega, \omega, \omega, z, z, x_2)$$

O que podemos continuar iterando para obter termos com potências ainda maiores de g_3 e g_4 . Suponha que estivéssemos interessados no termos **CONECTADOS** de ordem $(g_3)^0(g_4)^1$: para começar podemos esquecer completamente o primeiro colchete, pois tudo ali é proporcional a g_3 . Além disso, para nos livrarmos das bolhas no vácuo, devemos dividir tudo por $G^{(0)}$ (o que acontece mesmo em observáveis). Aí só restam os dois primeiros termos do segundo colchete, pois os outros tem potências a mais de g_3 ou g_4 . Como:

$$G^{(2)}(z, x_2) = \Delta(z-x_2) G^{(0)} + \cancel{\mathcal{O}(g_3, g_4)} \rightarrow \text{já temos uma potência de } g_4 \text{ multiplicando tudo}$$

$$G^{(2)}(x_1, x_2) \stackrel{\mathcal{O}(g_3^0, g_4^1)}{=} \Delta(x_1-x_2) - \frac{g_4}{3!} \int d^4z \Delta(x_1-z) \Delta(z-z) \Delta(z-x_2) = \text{diagrama com linha} + \text{diagrama com bolha} + \dots$$

fator de simetria ok!

Simetrias e as Identidades de Ward

Como já vimos dada uma simetria sobre a transformação (global):

$$\phi^{i'} = \phi^i + \underbrace{\epsilon^a (T^a)_{ij}}_{\delta\phi^i} \phi^j$$

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \int d^4x \left\{ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^i} \delta \phi^i + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi^i)} \partial_\mu \delta \phi^i \right\} = \\ &= \int d^4x \left\{ \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^i} - \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi^i)} \right) \right] \delta \phi^i + \partial_\mu \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi^i)} \delta \phi^i \right] \right\} \end{aligned}$$

se as equações de movimento CLÁSSICAS forem satisfeitas o primeiro colchete é zero, e temos (usando o $\delta\phi^i$ acima):

$$(\delta S)^{\text{cl}} = \lambda \epsilon^a \partial_\mu \underbrace{\left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi^i)} (T^a)_{ij} \phi^j \right]}_{j_\mu^a} = 0 \quad (\text{corrente de Noether})$$

Note a importância da equação de movimento clássica. Por isso dizemos que a corrente é conservada classicamente ou **on-shell** (nome que ficará mais claro adiante). Suponha agora que estejamos pensando nas trajetórias ou configurações não clássicas da teoria (**off-shell**), ainda temos $\delta S = 0$, só que:

$$\delta S = 0 = \lambda \epsilon^a (T^a)_{ij} \left\{ \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^i} - \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi^i)} \right) \right] \phi^j + \partial_\mu \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi^i)} \phi^j \right] \right\}$$

Suponha agora que nós tornemos a simetria mais geral tornando-a local $\epsilon^a \rightarrow \epsilon^a(x)$. A ação que era invariante sob a transformação global não vai ser obrigatoriamente invariante sobre a transformação local, a variação agora será:

0 (note que não mudei a Lagrangeana)

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \lambda \epsilon^a(x) (T^a)_{ij} \left\{ \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^i} - \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi^i)} \right) \right] \phi^j + \partial_\mu \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi^i)} \phi^j \right] \right\} + \\ &+ \lambda \int d^4x (\partial_\nu \epsilon^a) (T^a)_{ij} \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\nu \phi^i)} \phi^j \right] = \\ &= \lambda \int d^4x (\partial^\nu \epsilon^a(x)) j_\nu^a(x) = -\lambda \int d^4x \epsilon^a(x) \partial^\nu j_\nu^a(x) \quad (\text{eq. 187.1}) \end{aligned}$$

↳ assumindo que ϵ vai a zero no infinito

Esta equação 187.1 vale off-shell, portanto podemos usá-la dentro de integrais de trajetória. Acharmos um jeito de definir a corrente off-shell de uma ação classicamente invariante sob uma transformação global: basta olhar a variação da mesma ação sob a versão local da transformação, o coeficiente de $\delta^\mu \epsilon^\alpha(x)$ é a corrente.

O que queremos agora é muito semelhante à eq. 184.1 (Dyson-Schwinger), que era uma versão quântica das equações de movimento. Queremos a versão quântica da conservação da corrente:

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \implies \langle \partial_\mu j^\mu = 0 \rangle$$

Aqui, no entanto, a passagem não é garantida, pois podem aparecer **anomalias quânticas**: quando as correções quânticas não respeitam a simetria

Considere: $\delta \phi^\alpha(x) = \lambda \epsilon^\alpha(x) T_{\alpha\beta}^a \phi^\beta$ $\phi' = \phi + \delta\phi$

sempre vale que: $\int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} = \int \mathcal{D}\phi' e^{-S[\phi']}$ (só estou mudando o nome da variável de integração)

No entanto, se a mudança de ϕ para ϕ' for tal que o jacobiano seja $\hat{1}$, então $\mathcal{D}\phi' = \mathcal{D}\phi$ e aí:

$$\int \mathcal{D}\phi (e^{-S[\phi']} - e^{-S[\phi]}) = 0 = \int \mathcal{D}\phi \delta(e^{-S[\phi']}) = - \int \mathcal{D}\phi \delta S[\phi] e^{-S[\phi]}$$

$\therefore \langle \delta S \rangle = 0$ (eq. 188.1) se $S[\phi'] = S[\phi]$ ou seja, é uma simetria da teoria clássica
ou seja, é uma simetria da teoria quântica

As anomalias entram justamente aí, pois teorias anômalas modificam o jacobiano fazendo justamente que ele seja diferente da identidade. Este assunto será abordado em TQCII, portanto aqui assumiremos simplesmente que a teoria não é anômala. Substituindo 187.1 em 188.1 temos:

$$\int \mathcal{D}\phi \left(-\lambda \int d^4x \epsilon^\alpha(x) \partial^\mu j_\mu^\alpha(x) \right) e^{-S[\phi]} = 0$$

$$\underbrace{\int d^4x \lambda \epsilon^\alpha(x)}_{\text{arbitrário}} \int \mathcal{D}\phi \partial^\mu j_\mu^\alpha(x) e^{-S[\phi]} = 0$$

$\int \mathcal{D}\phi \partial^\mu j_\mu^\alpha(x) e^{-S[\phi]} = 0$

Identidade de Ward
(eq. 188.2)

$$\langle \partial^\mu j_\mu^\alpha \rangle = 0$$

Podemos obter outras identidades deste tipo generalizando o operador que está sendo variado:

$$\delta \mathcal{O}(\phi, \lambda) = \int d^4x \frac{\delta \mathcal{O}(\phi, \lambda)}{\delta \epsilon^a(x)} \epsilon^a(x)$$

e obtemos:

$$0 = \int \mathcal{D}\phi \delta \left[e^{-S[\phi]} \mathcal{O}(\phi, \lambda) \right] = i \int d^4x \epsilon^a(x) \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \left[\partial^\mu \tilde{j}_\mu^a(x) \mathcal{O} - i \frac{\delta \mathcal{O}}{\delta \epsilon^a(x)} \right]$$

De forma que temos as **Identidades de Ward** Generalizadas:

$$\int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} (\partial^\mu \tilde{j}_\mu^a(x)) \mathcal{O}(\phi, \lambda) = i \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \frac{\delta \mathcal{O}(\phi, \lambda)}{\delta \epsilon^a(x)} \quad (\text{eq. 189.1})$$

Que pode ser usada para, por exemplo, explorar o caso com fontes: $\mathcal{O} = e^{\phi \cdot J}$

$$0 = \int \mathcal{D}\phi \delta \left[e^{-S[\phi] + \phi \cdot J} \right] = \int d^4x \epsilon^a(x) \int \mathcal{D}\phi \frac{\delta}{\delta \epsilon^a(x)} \left[e^{-S[\phi] + \phi \cdot J} \right]$$

$$0 = \int \mathcal{D}\phi \frac{\delta}{\delta \epsilon^a(x)} \left[e^{-S[\phi] + \phi \cdot J} \right] = i T_{ij}^a \int \mathcal{D}\phi \left[-\frac{\delta S}{\delta \phi^i} \phi^j + J_i \phi^i \right] e^{-S + \phi \cdot J}$$

$$\phi(x) \rightarrow \frac{\delta}{\delta J(x)} \quad \frac{\delta S}{\delta \epsilon^a} = \frac{\delta S}{\delta \phi^i} \frac{\delta \phi^i}{\delta \epsilon^a} = i T_{ij}^a \frac{\delta S}{\delta \phi^i} \phi^j$$

$$(i T_{ij}^a) \left[-\frac{\delta S}{\delta \phi^i(x)} \right]_{\phi = \frac{\delta}{\delta J}} + J_i(x) \left[\frac{\delta}{\delta J_j(x)} \right] Z[J] = 0 \quad (\text{eq. 189.2})$$

O que nos dá uma identidade de Ward para Z e pode facilmente ser usada para obter identidades para as funções de Green.

Veremos que a versão local desta história (note que em nenhuma das passagens acima a ação era invariante sobre a transformação local) leva a relações semelhantes (chamadas de Ward-Takahashi) que colocam forte restrições sobre as funções de Green. Um resultado importante é, por exemplo:

$$k^\mu \Pi_{\mu\nu}^{(2)} = 0 \quad \rightarrow \quad \Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k) = (k^2 \delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) \tilde{\Pi}^{(2)}(k^2)$$

↳ Função 1PI de dois pontos para o fóton.

É esta restrição que mantém o fóton sem massa mesmo sob correções radiativas (loops).