

# Diagramas de Feynman para a Matriz S

(Nastase 20; Peskin 4.6)

Finalmente podemos coletar tudo que aprendemos com as funções de Green e obter um conjunto de regras sucinto para o cálculo da matriz S incluindo agora as correções de ordem superior na teoria de perturbação. Partindo de (73.1 e 73.2):

$$\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \dots | S | \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \underbrace{\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \dots |}_{\text{estados da teoria completa}} e^{-i H(\Delta T)} | \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle \quad (\text{eq. 190.1})$$

Queremos os estados da teoria livre, vimos que (eq. 85.1):

$$|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \left( e^{-i \tilde{E}_0 T} \langle \Omega | 0 \rangle \right)^{-1} e^{-i H T} | 0 \rangle$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \left( e^{-i \tilde{E}_0 T} \langle \Omega | 0 \rangle \right)^{-1} U_I(0, -T) | 0 \rangle$$

Faremos agora:

$$| \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle \propto \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} e^{-i H T} | \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle_0$$

↳ estado livre, mas não é o vácuo

(estamos deixando a constante de proporcionalidade em aberto, pois ela pode ser bem complicada)

O lado direito de 190.1 fica:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \underbrace{\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \dots |}_{\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \dots |_0 e^{i H T}} e^{-i H(\Delta T)} \underbrace{| \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle}_{e^{-i H T} | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0} \propto \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \underbrace{\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \dots |_0}_{\text{pacotes estreitos}} e^{-i H(\Delta T)} \underbrace{| \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0}_{U_I(T_1, -T)}$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \dots |_0 T \left\{ \text{EXP} \left[ -i \int_{-T}^T dt H_I(t) \right] \right\} | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0$$

$$\therefore S_{fi} \propto \langle f | U_I(+\infty, -\infty) | i \rangle$$

No caso das funções de Green a constante de proporcionalidade se cancela usando a normalização (passagem entre as eqs. 87.1 e 87.2) e aqui acontece o mesmo. Provar isso envolve provar a fórmula LSZ e não faremos isso neste curso. O resultado obtido fazendo a normalização correta e usando a fórmula de LSZ é dado por:

↳ curioso? Veja as notas de TQCII (2016), pgs 93 a 98

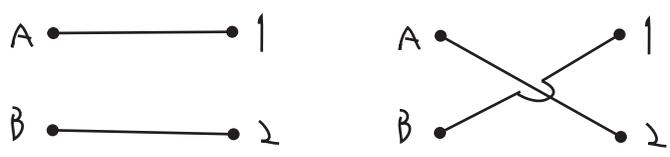
$$\langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n | i T | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle = (\sqrt{Z})^{n+1} \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \left( \langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n |_0 T \left( \text{EXP} \left[ -i \int_{-T}^T dt H_I(t) \right] \right) | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 \right) \begin{matrix} \text{conectado} \\ \text{amputado} \end{matrix}$$

(eq. 190.2)

Na equação 190.2 obtemos  $iT$  ao invés de  $S$ , pois a fórmula de LSZ só nos fornece estados conectados em que o estado inicial e final são diferentes. Ainda resta entender o que "amputado" quer dizer. Lembrando que  $Z = 1$  a nível árvore, vejamos alguns exemplos:

$2 \rightarrow 2$   $\mathcal{O}(\lambda^0)$  o lado direito de 190.2 fica:

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 &\equiv \sqrt{2E_A 2E_B 2E_1 2E_2} \langle 0 | a_1 a_2 a_A^\dagger a_B^\dagger | 0 \rangle = \\ &= 2E_A 2E_B (2\pi)^4 \left[ \delta^{(3)}(\vec{p}_A - \vec{p}_1) \delta^{(3)}(\vec{p}_B - \vec{p}_2) + \delta^{(3)}(\vec{p}_A - \vec{p}_2) \delta^{(3)}(\vec{p}_B - \vec{p}_1) \right] \end{aligned}$$



**Desconectados** (não são incluídos)

contribuem para a parte 1 de  $S = 1 + iT$

$2 \rightarrow 2$   $\mathcal{O}(\lambda^1)$

$$\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | T \left\{ -i \frac{\lambda}{4!} \int d^4x \phi^4(x) \right\} | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 = \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | N \left\{ -i \frac{\lambda}{4!} \int d^4x \phi^4(x) + \text{contr.} \right\} | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 \quad (\text{eq. 191.1})$$

Teorema de Wick

$\neq 0$

Os ordenamentos normais não contraídos não somem.

Já vimos que (pág 97):  $\underbrace{\phi^+}_{\vec{p}} | \vec{p} \rangle_0 = e^{-\lambda p x} | 0 \rangle$ ;  $\underbrace{\langle \vec{p} |}_{\vec{p}} \phi^- = \langle 0 | e^{i p x}$

dentro de  $\langle \dots | N(\phi^N) | \dots \rangle = \langle \dots | (\phi^-)^n (\phi^+)^{N-n} | \dots \rangle$ ,  $n = 0, \dots, N$ , temos os  $\phi^+$  agindo para a direita e os  $\phi^-$  agindo para a esquerda. Definimos então:

no exemplo em questão como temos 2 estados iniciais e 2 finais, o único termo que vai ser diferente de zero é  $n=2$  ( $N=4$ )

Em 191.1 temos termos do tipo:  $\phi\phi\phi\phi$ ,  $\phi\phi\phi\phi$ ,  $\phi\phi\phi\phi$

O último termo não passa de um diagrama desconectado acompanhado de bolhas no vácuo:

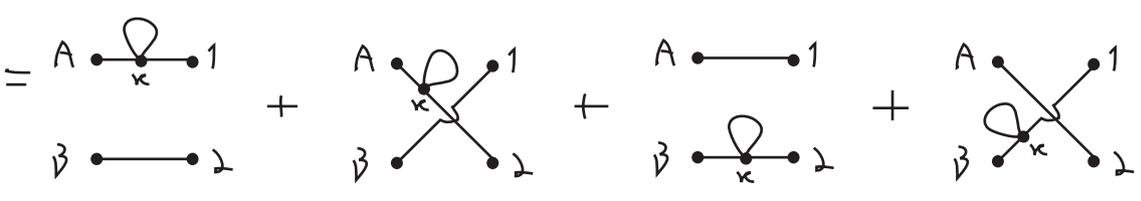
$$-i \frac{\lambda}{4!} \int d^4x \phi\phi\phi\phi \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 = 0 \times \left( \begin{array}{c} A \text{---} 1 \\ B \text{---} 2 \end{array} \quad \begin{array}{c} A \text{---} 1 \\ B \text{---} 2 \end{array} \right)$$

O segundo termo, com apenas uma contração, nos dá o seguinte:

$$-i \frac{\lambda}{4!} \int d^4x \ 2 \phi \phi \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | \phi^- \phi^+ | \vec{p}_a \vec{p}_b \rangle_0 =$$

$\langle \phi^+ \phi^+ \rangle = \langle \phi^- \phi^- \rangle = 0$

quatro diagramas



Desconectados (não são incluídos)

Finalmente, no termo sem nenhuma contração somos obrigados a contrair todos os campos com os estados assintóticos:

$$\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | \phi^- \phi^- \phi^+ \phi^+ | \vec{p}_a \vec{p}_b \rangle_0 = 4! e^{i(p_a + p_b - p_1 - p_2)x}$$

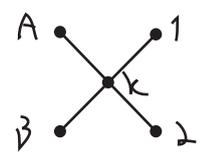
várias formas de fazer, mas todas com o mesmo resultado

$$\therefore \left( \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | N \left\{ -i \frac{\lambda}{4!} \int d^4x \phi_{\mp}^4(x) + \text{contr.} \right\} | \vec{p}_a \vec{p}_b \rangle_0 \right)_{\text{CONNECT.}} = -i \frac{\lambda}{4!} \int d^4x \ 4! e^{i(p_a + p_b - p_1 - p_2)x} =$$

$$= -i \lambda (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_a + p_b - p_1 - p_2)$$

(eq. 192.1)

que é justamente o que obteríamos com as regras de Feynman para o diagrama:



como  $i\mathcal{T} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_a + p_b - p_1 - p_2) i\mathcal{M} \Rightarrow \mathcal{M} = -\lambda$

logo a sessão de choque no centro de massa é:  $\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = \frac{\lambda^2}{64\pi^2 E_{cm}^2}$  (eq. 192.2)

Como o lado direito não tem qualquer dependência angular, fica fácil integrar em  $\Omega$ :

$$\sigma_{TOT} = \frac{\lambda^2}{32\pi^2 E_{cm}^2} \quad \left( \int dR = 4\pi \right) \quad \frac{1}{2} \quad (2 \text{ partículas idênticas})$$

(eq. 193.1)

Até aqui nenhuma novidade, mas vejamos o que ocorre com algumas correções.

Até agora só o diagrama conectado contribuiu para esta seção de choque, mas resta a pergunta: todos os diagramas conectados possíveis contribuirão para ela? Vejamos o seguinte diagrama

$$= \frac{1}{2} (-i\lambda) (2\pi)^4 \delta^4(p_B + p_A - p_1 - p_2) (-i\lambda) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D_F(k) D_F(p' = p_B)$$

(sai da integral)

$$= \frac{1}{2} (-i\lambda) (2\pi)^4 \delta^4(p_B + p_A - p_1 - p_2) (-iM_{(1)}^2) \frac{i}{p_B^2 - m^2}$$

zero para partícula on-shell:  $p_B^2 = m^2$

(eq. 193.2)

Essa é outra versão do problema que mencionamos pela primeira vez ao fim da página 99, onde obtemos as regras de Feynman no espaço dos momentos e apareceram propagadores para as linhas externas, na última expressão da pag 99 temos:

$$= \frac{\lambda^2}{3!} D_F(p_1) D_F(p_2) (2\pi)^4 \delta^4(p_2 - p_1) \int \frac{d^4p_i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_j}{(2\pi)^4} D_F(p_1 - p_i - p_j) D_F(p_i) D_F(p_j)$$

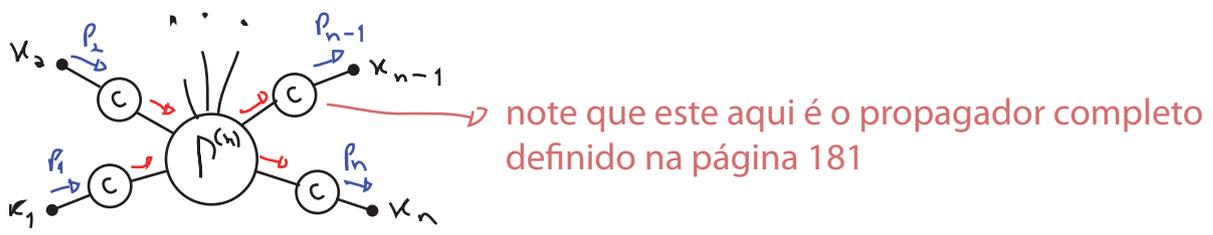
$\propto \frac{1}{p_i^2 - m^2}$

ambos problemáticos on-shell  $p_i^2 = m^2$

Este problema não apareceu no cálculo de 192.1 pois os estados finais e iniciais foram tratados de forma apropriada nas páginas 191 e 192 (por meio da contração dos operadores com os estados assintóticos) e forneceram exponenciais ao invés de propagadores. No entanto este tratamento não resolve o problema para o diagrama em 193.2 pois não é o propagador ligado ao ponto externo que está divergindo, mas sim aquele que envolve  $p'$ . Note que, em geral, este problema vai surgir toda vez em que um momento inicial ou final (por definição on-shell) "correr" dentro de alguma linha interna do diagrama. Note que:

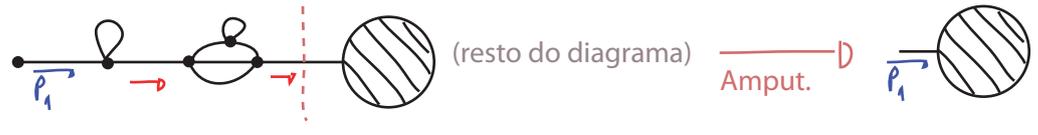


Fica claro que podemos fazer a seguinte separação para n pernas externas:



onde queremos nos livrar dos propagadores em vermelho. Esta operação é chamada de amputar o

diagrama, uma vez que removeremos as pernas externas com TODAS AS SUAS CORREÇÕES, ou seja, o propagador completo. Operacionalmente podemos "seguir" o momento externo e procurar a linha mais distante do ponto externo em que podemos remover a perna cortando apenas um propagador:



É a estes diagramas amputados que nos referimos na eq. 190.2. Felizmente a fórmula de LSZ faz esta "amputação" formalmente, basta notar que (LSZ, eq 74.3):

$$\langle \{P_i\}_n | \{k_j\}_m \rangle_{in} = \lim_{\substack{p_i^2 \rightarrow m_i^2 \\ k_j^2 \rightarrow m_j^2}} \frac{1}{(\sqrt{z^1})^{m+n}} \prod_{i=1}^n (p_i^2 - m_i^2 + i\epsilon) \prod_{j=1}^m (k_j^2 - m_j^2 + i\epsilon) \tilde{G}_{n+m}(p_i^N, k_j^N)$$

Se encontra multiplicado pelos propagadores completos "problemáticos"

$$G_2(p) \sim \frac{i z}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Inverso do propagador completo! ( $\Gamma^{(n)}$ )

É por isso que obtemos só os diagramas amputados quando passamos da fórmula de LSZ para a eq. 190.2 e finalmente:

$$i \mathcal{M} (2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_B - \sum p_k) = \left( \sum \text{diagramas conectados e amputados} \right) \times (\sqrt{z^1})^{n+2} \quad (\text{eq. 194.1})$$

## QED: definição e regras de Feynman

(Nastase 22; Peskin 4.8)

Agora passamos a aplicações físicas e construímos a nossa primeira Lagrangeana completa, observável e fenomenologicamente viável. Começaremos com a Eletrodinâmica Quântica, que é a versão de TQC para o eletromagnetismo. Para manter a teoria bem geral assumiremos que existem dois estados carregados: um férmion (que pode se o elétron) e um escalar complexo (que é uma partícula escalar carregada qualquer: um méson ou um núcleo atômico). Exigir que a teoria seja invariante por transformações  $U(1)_{EM}$  nos obriga a inserir também um campo de Gauge (o fóton) e obtemos a Lagrangeana (Minkowski):

$$\mathcal{L}_{QED}^{(M)}(A_\mu, \phi, \psi) = \underbrace{-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2}_{\mathcal{L}(A)} + \underbrace{\bar{\psi}(\not{D} - m)\psi}_{\mathcal{L}(A, \psi)} + \underbrace{(\not{D}_\mu \phi)^* (\not{D}^\mu \phi) - V(\phi^* \phi)}_{\mathcal{L}(A, \phi)}$$

e.g.:  $V(\phi^* \phi) = m^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2$

(eq. 190.2)

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad \not{D} = \gamma^\mu D_\mu \quad \bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 \quad \boxed{D_\mu = \partial_\mu - i e A_\mu}$$

So a transformação U(1) local os campos se transformam da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 \psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = \psi(x) e^{ie\chi(x)} \\
 \phi(x) &\rightarrow \phi'(x) = \phi(x) e^{ie\chi(x)} \\
 A_\mu(x) &\rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \chi(x)
 \end{aligned}
 \tag{eq. 195.1}$$

é fácil ver (com um pouco de álgebra) que a Lagrangeana é invariante sobre estas transformações e também que ela perde a invariância local se fizermos  $A_\mu = 0$  (mantém a invariância sobre U(1) global, no entanto).

Podemos passar para o espaço Euclideano (usando os resultados individuais para férmions, escalares e bósons de Gauge mostrados anteriormente):

$$iS^{(M)} \rightarrow -S^{(E)}$$

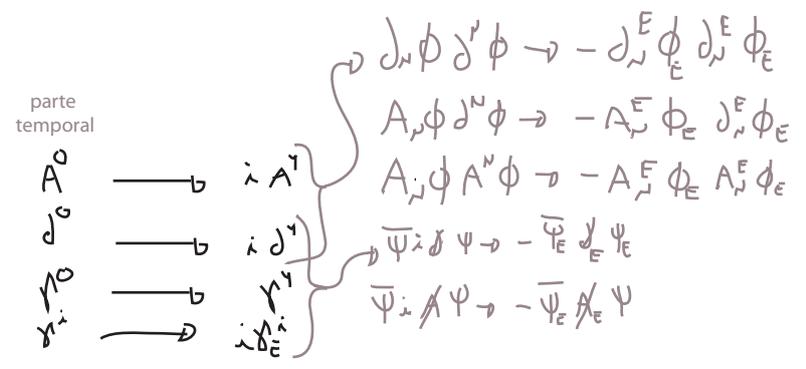
(pg 106)  $\mathcal{L}^{(E)}(\phi) = \partial_\mu \phi^* \partial_\mu \phi + V(\phi^* \phi)$

(pg 140)  $\mathcal{L}^{(E)}(\psi) = \bar{\psi} (\not{D} + m) \psi$   $\{ \gamma_\mu, \gamma_\nu \} = 2\delta_{\mu\nu}$

(pg 167)  $\mathcal{L}^{(E)}(A) = +\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(E)} F^{(E)\mu\nu}$

o único termo novo é:  $A_\mu^{(M)} \rightarrow \begin{cases} A_0 = i A_4 \\ A_i \end{cases}$

mas ele está sempre contraído com:  $\begin{cases} A^\mu \\ \partial^\mu \\ \gamma^\mu \end{cases}$



$$\therefore \mathcal{L}^{(E)}(A, \psi, \phi) = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \bar{\psi} (\not{D} + m) \psi + (\partial_\mu \phi)^* (\partial^\mu \phi) + V(\phi^* \phi) \tag{eq. 195.2}$$

**Quantização:**

Já vimos que a parte do bóson de Gauge, para ser quantizada, terá que passar por algum método de fixação de Gauge. Segundo o de Fadeev-Popov, ganhamos um termo de fixação de Gauge:

$$\mathcal{L}(A) \rightarrow \mathcal{L}_{\text{EFF}}(A) = \mathcal{L}(A) + \mathcal{L}_{\text{GF}} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2\alpha} (\partial^\mu A_\mu)^2$$

(a presença dos outros dois campos não muda o procedimento de Fadeev-Popov em nada, a única exigência que fizemos em relação a ação foi a de que fosse invariante de Gauge, o que é verdade para 195.2)

Resta então obter os propagadores. Na Lagrangeana 195.2 temos alguns termos de interação como:

$$(\gamma^\mu \bar{\psi} A_\mu \psi) \quad (\phi^* \phi A^\mu A_\mu)$$

a forma de lidar com estas interações é a habitual, adicionamos uma fonte para cada campo:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} - \mathcal{J}_\mu A_\mu - \bar{\xi} \Psi - \bar{\Psi} \xi - \mathcal{J} \phi - \bar{\mathcal{J}} \phi^*$$

e escrevemos as interações como derivadas nas fontes, que então podemos tirar de dentro das integrais de trajetória. O ponto é que uma vez feito isso, teremos três integrais de trajetória independentes, de três teorias livres:

$$\underbrace{\int \mathcal{D}A_\mu e^{-S(A)}}_{e^{\frac{1}{2} \mathcal{J}_\mu \Delta_{\mu\nu} \mathcal{J}_\nu}} \underbrace{\int \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} e^{-S(\Psi)}}_{e^{\bar{\xi} \mathcal{S}_F \xi}} \underbrace{\int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi^* e^{-S(\phi)}}_{e^{\bar{\mathcal{J}} \Delta \mathcal{J}}}$$

de onde fica claro que posso quantizar as três teorias independentemente e obter os propagadores já mostrados nas aulas anteriores.

Esquecendo o escalar por um tempo, temos o seguinte funcional gerador:

$$Z[\mathcal{J}_\mu, \xi, \bar{\xi}] = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} e^{-S_{\text{EFF}}[A, \Psi, \bar{\Psi}, \mathcal{J}_\mu, \xi, \bar{\xi}]} \quad (\text{eq. 196.1})$$

e o VEV de um operador qualquer será dado por:

$$\langle \hat{O}(A, \bar{\Psi}, \Psi) \rangle = \frac{\int \mathcal{D}A \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} \hat{O} e^{-S_{\text{EFF}}[A, \Psi, \bar{\Psi}, \mathcal{J}_\mu, \xi, \bar{\xi}]}}{\int \mathcal{D}A \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} e^{-S_{\text{EFF}}[A, \Psi, \bar{\Psi}, \mathcal{J}_\mu, \xi, \bar{\xi}]}} \quad (\text{eq. 196.2})$$

a energia livre (gerador dos diagramas conectados):

$$Z[\mathcal{J}, \xi, \bar{\xi}] = e^{-W[\mathcal{J}, \xi, \bar{\xi}]}$$

e a ação efetiva (gerador dos diagramas 1PI) será dada por (transformada de Legendre):

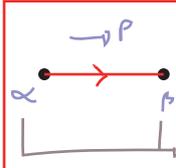
$$\Gamma[A_\mu, \bar{\Psi}_\mu, \Psi_\mu] = W[\mathcal{J}, \xi, \bar{\xi}] + \int d^4x [\mathcal{J}_\mu A_\mu^\mu + \bar{\xi} \Psi^\mu + \bar{\Psi}^\mu \xi] \quad (\text{eq. 196.3})$$

fazendo derivadas nesta equação obtemos as seguintes relações:

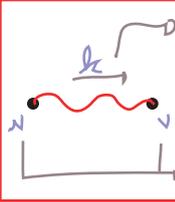
$$\frac{\delta W}{\delta \mathcal{J}_\mu} = -A_\mu^\mu \quad \frac{\delta W}{\delta \xi} = -\Psi^\mu \quad \frac{\delta W}{\delta \bar{\xi}} = \bar{\Psi}^\mu \quad (\text{eq. 196.4})$$

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu^\mu} = \mathcal{J}_\mu \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \Psi^\mu} = -\bar{\xi} \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\Psi}^\mu} = \xi \quad (\text{eq. 196.5})$$

### Regras de Feynman no espaço dos momentos (Euclideo):

propagador do férmion:  =  $\left( \frac{1}{i\not{p} + m} \right)_{\alpha\beta} = \frac{(-i\not{p} + m)_{\alpha\beta}}{p^2 + m^2}$  (Euclid.) (eq. 197.1)

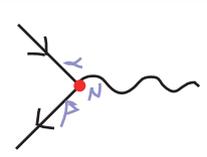
índices espinoriais ( $\alpha, \beta = 1 \dots 4$ )

propagador do fóton:  =  $\frac{1}{k^2} \left( \delta_{\mu\nu} - (1-\alpha) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right)$  (Euclid.) (eq. 197.2)

o sentido do momento não importa  
índices de Lorentz

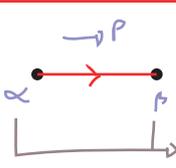
vértice: a interação é dada por parte da derivada covariante:  $S_{\text{I}} = -i e \int d^4x \bar{\Psi}_\alpha (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} A_\mu \Psi_\beta$

então basta derivar nos campos para obter (segundo a eq 122.1):

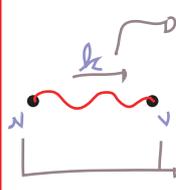
 =  $i e (\gamma^\mu)_{\alpha\beta}$  (Euclid.) (eq. 197.3)

### Regras de Feynman para a matriz S (Minkowski / Momentos):

As linhas externas on-shell, necessárias para o cálculo da matriz S, só podem ser obtidas no espaço físico, então re-escrevemos as regras fazendo a habitual rotação de volta:

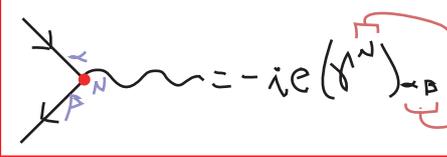
 =  $\frac{i (\not{p} + m)_{\alpha\beta}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$  (Mink.) (eq. 197.4)

índices espinoriais ( $\alpha, \beta = 1 \dots 4$ )

 =  $\frac{-i}{k^2 + i\epsilon} \left( g_{\mu\nu} - (1-\alpha) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + i\epsilon} \right)$  (Mink.) (eq. 197.5)

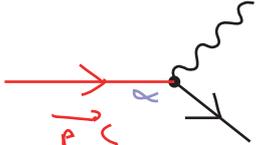
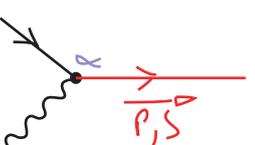
o sentido do momento não importa  
índices de Lorentz

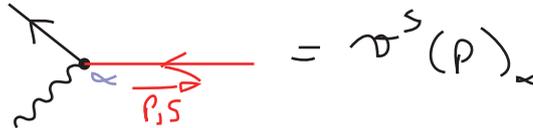
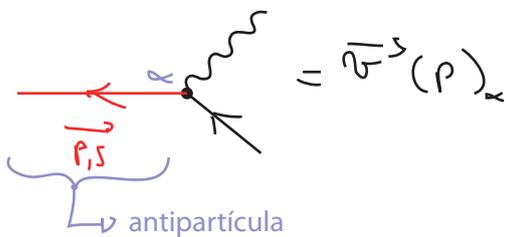
Para o vértice basta rodar  $S_1$  antes de derivar nos campos:

 =  $-i e (\gamma^\mu)_{\alpha\beta}$  (Mink.) (eq. 197.6)

note que os índices nos vértices tem que estar contraídos com os índices das linhas externas ou propagadores que entram neles

As linhas externas para os férmions foram obtidas nas pgs 145-146 (eq 146.1):

 =  $u^s(p)_\alpha$   =  $\bar{u}^s(p)_\alpha$  (Mink.)



que vêm de:

$$\psi |e^-(\vec{p}, s)\rangle = u^s(p) e^{i p x} |0\rangle$$

$$\bar{\psi} |e^+(\vec{p}, s)\rangle = \bar{v}^s(p) e^{i p x} |0\rangle$$

$$|e^-(\vec{p}, s)\rangle = \sqrt{2E_p} \hat{a}_r^+ |0\rangle$$

$$|e^+(\vec{p}, s)\rangle = \sqrt{2E_p} \hat{b}_r^+ |0\rangle$$

$$\langle e^-(\vec{p}, s) | \bar{\psi} = \bar{u}^s(p) e^{-i p x} \langle 0 |$$

$$\langle e^+(\vec{p}, s) | \psi = v^s(p) e^{-i p x} \langle 0 |$$

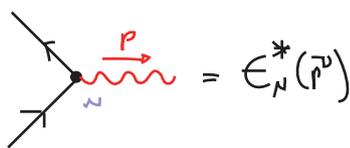
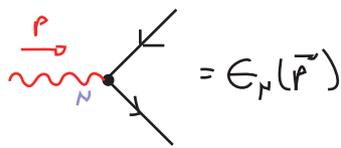
sendo importante lembrar que os sinais relativos entre diagramas que envolvam trocas destes estados finais e iniciais são fixados conforme regras mostradas nas páginas 146 e 147.

Da mesma forma podemos obter a linha externa do fóton (usando a expansão da pag 164):

$$A_\mu(\vec{p}) = \epsilon_\mu(\vec{p}) e^{i p x} |0\rangle$$

$$\langle \vec{p} | A_\mu = \epsilon_\mu^*(\vec{p}) e^{-i p x} \langle 0 |$$

na pg 164 escolhemos  $\epsilon$  real, que é útil para polariz. transversa. Para polarizações horárias ou anti-horárias seria mais conveniente tomar  $\epsilon$  complexo



(Mink.)

(eq. 198.1)

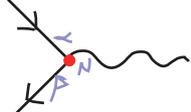
Em suma:

(198.2)

Regras de Feynman da QED - obtendo  $\mathcal{M}$

(1) desenhar todos os diagramas conectados e amputados que contribuem para o espalhamento

(2) escreva as funções dos propagadores (somente as linhas internas), conforme eqs. 197.4 e 197.5

(3) para cada vértice:   $= -ie(\gamma^\lambda)_{\alpha\beta}$

(4) para as linhas externas: eqs 146.1 e 198.1 (com atenção do sinal relativo entre diagramas iguais sob a troca de ponto de inserção de linhas fermiônicas externas)

(5) imponha conservação de momento em cada vértice (re-escrevendo os momentos internos)

(6) integre sobre cada momento não determinado:  $\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}$

(7) divida pelo fator de simetria

(8) multiplique por (-1) para cada loop fermiônico

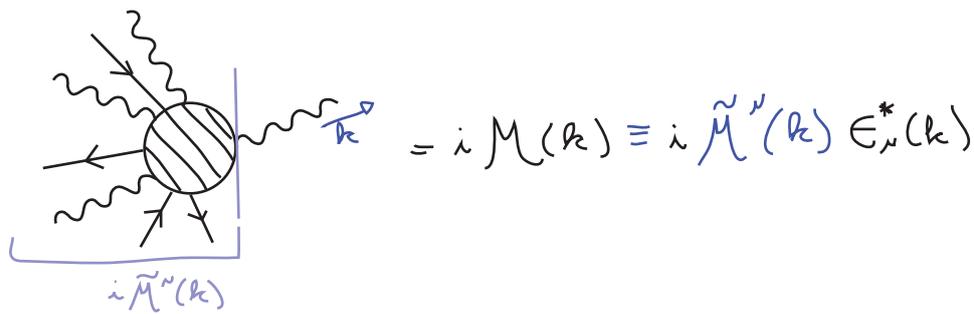
(9) rigorosamente deveríamos multiplicar por  $(2\pi)^4 \delta^4(\sum p_\alpha)$  mas como estamos procurando

$$i \mathcal{M} (2\pi)^4 \delta^4(\sum p_\alpha) = \left( \sum \text{diagramas conectados e amputados} \right) \times (\sqrt{Z})^{n+2} \quad (\text{eq. 194.1})$$

basta dividir o resultado do passo (8) por  $i$  para obter  $\mathcal{M}$  (veremos o que fazer com  $Z$  em TQCII, mas a nível árvore  $Z = 1$ )

Conhecendo o elemento de matriz, podemos usá-lo no cálculo da seção de choque, lembrando que na integração sobre os momentos finais é possível **haver uma dupla contagem no caso de partículas idênticas nos estados finais** (que nada tem a ver com os fatores de simetria levados em conta nas regras de Feynman)

Também é preciso notar, que assim como os férmions, os fótons carregam momento angular intrínseco, então conforme o espalhamento estudado é preciso somar ou tirar a média sobre as polarizações. O caso do fóton é um pouco mais complicado que o dos férmions, pois em geral temos polarizações não-físicas em  $\epsilon_\mu$ . Notemos, no entanto que cada fóton externo vai estar ligado em um diagrama mais geral da seguinte forma:



então, se estivermos somando sobre as polarizações a seção de choque incluirá:

$$\sum_{\epsilon} |M|^2 = \sum_{\epsilon} |\epsilon_\nu^*(k) \tilde{M}^\nu(k)|^2 = \sum_{\epsilon} \epsilon_\nu^* \epsilon_\nu \tilde{M}^\nu(k) M^{\nu*}(k)$$

podemos escolher uma direção para  $k$  e somar só sobre as polarizações físicas:

$$k^\mu = (k, 0, 0, k) \quad \sum_{\epsilon} \rightarrow \sum_{\epsilon=1,2} \leftrightarrow \begin{matrix} \epsilon_1^\mu = (0, 1, 0, 0) \\ \epsilon_2^\mu = (0, 0, 1, 0) \end{matrix}$$

$$\sum_{\epsilon} |M|^2 = |\tilde{M}^1(k)|^2 + |\tilde{M}^2(k)|^2 \quad (\text{eq. 199.1})$$

mas seria mais conveniente manter a invariância relativística explícita. Isso é possível lembrando da identidade de Ward (que será provada com mais rigor em campos II, veja Peskin sec 7.4):

$$k_\nu \tilde{M}^\nu(k) = 0$$

no referencial acima esta equação fica:  $k \tilde{M}^0(k) - k \tilde{M}^3(k) = 0 \Rightarrow \tilde{M}^0(k) = \tilde{M}^3(k)$  (eq. 199.2)

logo:

$$\sum_{\epsilon} |M|^2 = |\tilde{M}^1(k)|^2 + |\tilde{M}^2(k)|^2 + \overbrace{|\tilde{M}^3(k)|^2 - |\tilde{M}^0(k)|^2}^0$$

$$\sum_{\epsilon} \epsilon_\nu^* \epsilon_\nu \tilde{M}^\nu(k) \tilde{M}^{\nu*}(k) = -g_{\nu\nu} \tilde{M}^\nu(k) \tilde{M}^{\nu*}(k) \quad (\text{eq. 199.3})$$

que vale em qualquer referencial. Como não especificamos  $\tilde{M}$  a conclusão é que em geral podemos fazer a soma através da substituição:

$$\sum_{\epsilon} \epsilon_\nu^* \epsilon_\nu \rightarrow -g_{\nu\nu} \quad (\text{eq. 199.4})$$

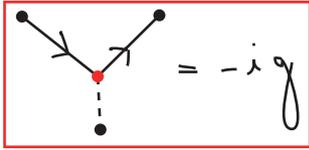
# Processos não relativísticos

(Nastase 23; Peskin 4.7 e 4.8)

Usaremos agora o formalismo que desenvolvemos para obter alguns resultados para processos não relativísticos conhecidos. Assim poderemos ver como aplicá-lo ao mesmo tempo que provamos a sua concordância com resultados experimentais conhecidos.

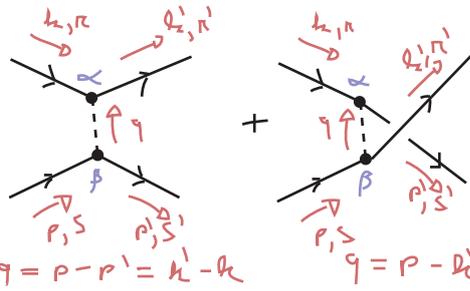
## Potencial de Yukawa

Queremos ver se o potencial de Yukawa entre dois férmions é mesmo dado pela troca de um escalar, conforme a interação da pg 144 (teoria de Yukawa):

$$\mathcal{L}_Y^{(m)} = g \bar{\psi} \psi \phi$$


(Mink.)

Para dois férmions idênticos interagindo, os dois diagramas em menor ordem de  $g$  que contribuem são:

$$i\mathcal{M} =$$


$q = p - p' = k' - k$        $q = p - k' = p' - k$

Se não fossem idênticos poderíamos pegar só o primeiro, pois o momento estaria ligado a identidade do férmion, de fato é este caso que consideraremos. No limite não relativístico temos:

$$p \simeq (m, \vec{p}) \quad p' \simeq (m, \vec{p}') \quad k \simeq (m, \vec{k}) \quad k' \simeq (m, \vec{k}')$$

$$(p - p')^2 \simeq -|\vec{p} - \vec{p}'|^2 \ll 0 \quad (p^0 - p'^0 \simeq m - m)$$

$$u^s(p) \simeq \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix} \quad \xi^s = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{u}^{s'}(p') u^s(p) = u^{s'} \gamma^0 u^s = m \begin{pmatrix} \xi^{s'+} & \xi^{s'+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix} = 2m \xi^{s'+} \xi^s$$

Isso nos permite escrever ambos os diagramas (lembre-se que só usaremos o primeiro):

$$i\mathcal{M} = (-ig) \bar{u}^{s'}(p')_{\beta} u^s(p)_{\beta} \frac{i}{(p-p')^2 - m_{\phi}^2} (-ig) \bar{u}^r(k')_{\alpha} u^r(k)_{\alpha}$$

$$- (-ig) \bar{u}^{s'}(p')_{\alpha} u^r(k)_{\alpha} \frac{i}{(p-k')^2 - m_{\phi}^2} (-ig) \bar{u}^r(k')_{\beta} u^s(p)_{\beta}$$

↑ sinal da troca de férmions no estado final

(eq. 200.1)

O que quer dizer que, para férmions distinguíveis no limite não relativístico:

$$i\mathcal{M} \simeq \frac{ig^2}{|\vec{p} - \vec{p}'|^2 + m_{\phi}^2} (2m \delta^{s's}) (2m \delta^{r'r})$$

(eq. 200.2)

Podemos comparar este resultado com a aproximação de Born para espalhamentos em mecânica quântica:

$$\langle \vec{p}' | i T | \vec{p} \rangle = -i V(\vec{q}) 2\pi \delta(E_{p'} - E_p) \quad (\text{eq. 201.1})$$

$$\vec{q} = \vec{p}' - \vec{p} \quad \text{momento transferido}$$

que é válido para potenciais fracos (o que condiz com nossa aproximação perturbativa - estamos pegando só os diagramas em ordem mais baixa [LO]) e espalhamentos onde o estado final é parecido com o inicial (espalhamento com ângulo pequeno, energia trocada bem menor que a energia incidente). Nosso resultado é mais geral que isso (vale para qualquer ângulo), mas deve valer neste limite em particular.

A comparação é delicada, pois usamos normalizações diferentes do que usualmente se faz em mecânica quântica (para obter objetos relativisticamente invariantes). O fator de  $2m$  acompanhando cada linha fermiônica vem desta diferença de normalização, então devemos ignorá-lo na comparação.

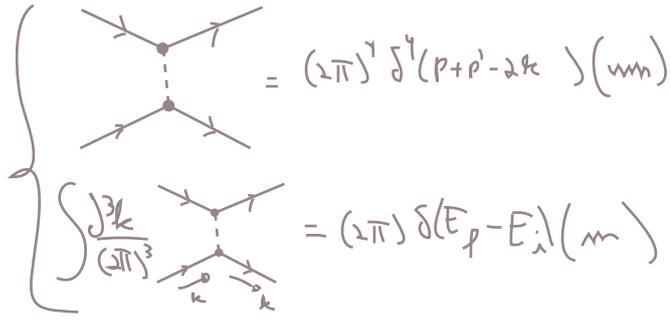
Outra sutileza vem do fato de que, na aproximação de Born, estamos assumindo que o momento do "centro espalhador" (o alvo), não muda, e temos só uma partícula inicial e uma final ( $1 \rightarrow 1$ ). Isso quer dizer que:  $\vec{p}^0 \neq \vec{p}'$  ao passo que  $E_{p'} = E_p$  ( $|\vec{p}'| = |\vec{p}|$ )

Nesse caso, definimos:

$$\langle \vec{p}' | i T | \vec{p} \rangle = i \mathcal{M} (2\pi) \delta(E_{p'} - E_p) \quad (\text{eq. 201.2})$$

(outra forma de ver isso é notar que, como não estamos observando o momento inicial ou final do alvo, temos que integrar sobre ambos, com a condição  $k' = k$  temos apenas uma integral:

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} + \vec{p}' - 2\vec{k})$$



que absorve a delta nos momentos, deixando apenas a delta na energia:

Comparando 201.2 com 201.1 obtemos:  $V(\vec{q}) = -\mathcal{M}$

e como (de novo, por conta da aproximação de Born), não há inversões de spin ( $s' = s, r' = r$ ):

$$V(\vec{q}) = \frac{-g^2}{|\vec{q}|^2 + m_\phi^2} \quad (\text{eq. 201.3})$$

Para obter este potencial no espaço das posições fazemos:

$$V(\vec{x}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{-g^2}{|\vec{q}|^2 + m_\phi^2} e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} = \frac{-g^2}{(2\pi)^3} 2\pi \int_0^\infty q^2 dq \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{iqr} \frac{1}{q^2 + m_\phi^2} =$$

$$= \frac{-g^2}{4\pi^2 i r} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \frac{q e^{iqr}}{q^2 + m_\phi^2}$$

$r \equiv |\vec{x}|$   
 $q \equiv |\vec{q}|$

$$\int_0^\pi \sin(\theta) d\theta e^{iqr \cos \theta} = \int_0^1 d(\cos \theta) e^{iqr \cos \theta} = \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{iqr}$$

$$V(\vec{x}) = \frac{-g^2}{4\pi^2 i r} (2\pi i) \left( \frac{i m_\phi e^{-m_\phi r}}{2 i m_\phi} \right) = \frac{-g^2}{4\pi r} e^{-m_\phi r} \quad (\text{eq. 201.4})$$

que é o potencial atrativo de Yukawa.