

Podemos comparar este resultado com a aproximação de Born para espalhamentos em mecânica quântica:

$$\langle \vec{p}' | i T | \vec{p} \rangle = -i V(\vec{q}) 2\pi \delta(E_{p'} - E_p) \quad (\text{eq. 201.1})$$

$$\vec{q} = \vec{p}' - \vec{p} \quad \text{momento transferido}$$

que é válido para potenciais fracos (o que condiz com nossa aproximação perturbativa - estamos pegando só os diagramas em ordem mais baixa [LO]) e espalhamentos onde o estado final é parecido com o inicial (espalhamento com ângulo pequeno, energia trocada bem menor que a energia incidente). Nosso resultado é mais geral que isso (vale para qualquer ângulo), mas deve valer neste limite em particular.

A comparação é delicada, pois usamos normalizações diferentes do que usualmente se faz em mecânica quântica (para obter objetos relativisticamente invariantes). O fator de $2m$ acompanhando cada linha fermiônica vem desta diferença de normalização, então devemos ignorá-lo na comparação.

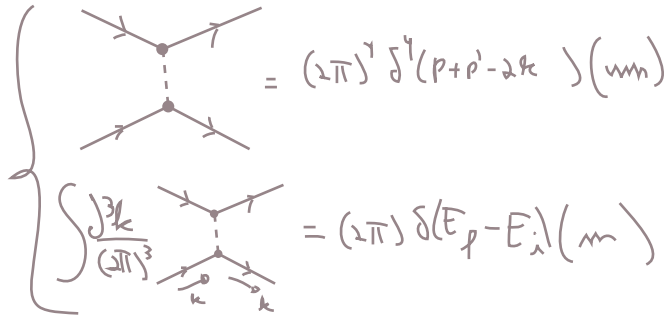
Outra sutileza vem do fato de que, na aproximação de Born, estamos assumindo que o momento do "centro espalhador" (o alvo), não muda, e temos só uma partícula inicial e uma final ($1 \rightarrow 1$). Isso quer dizer que: $\vec{p}^0 \neq \vec{p}^1$ ao passo que $E_{p'} = E_p$ ($|\vec{p}'| = |\vec{p}|$)

Nesse caso, definimos:

$$\langle \vec{p}' | i T | \vec{p} \rangle = i \mathcal{M} (2\pi) \delta(E_{p'} - E_p) \quad (\text{eq. 201.2})$$

(outra forma de ver isso é notar que, como não estamos observando o momento inicial ou final do alvo, temos que integrar sobre ambos, com a condição $k' = k$ temos apenas uma integral:

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\vec{p} + \vec{p}' - 2\vec{k})$$



que absorve a delta nos momentos, deixando apenas a delta na energia:

Comparando 201.2 com 201.1 obtemos: $V(\vec{q}) = -\mathcal{M}$

e como (de novo, por conta da aproximação de Born), não há inversões de spin ($s' = s, r' = r$):

$$V(\vec{q}) = \frac{-g^2}{|\vec{q}|^2 + m_\phi^2} \quad (\text{eq. 201.3})$$

Para obter este potencial no espaço das posições fazemos:

$$V(\vec{x}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{-g^2}{|\vec{q}|^2 + m_\phi^2} e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} = \frac{-g^2}{(2\pi)^3} 2\pi \int_0^\infty q^2 dq \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{iqr} \frac{1}{q^2 + m_\phi^2} =$$

$$= \frac{-g^2}{4\pi^2 i r} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \frac{q e^{iqr}}{q^2 + m_\phi^2}$$

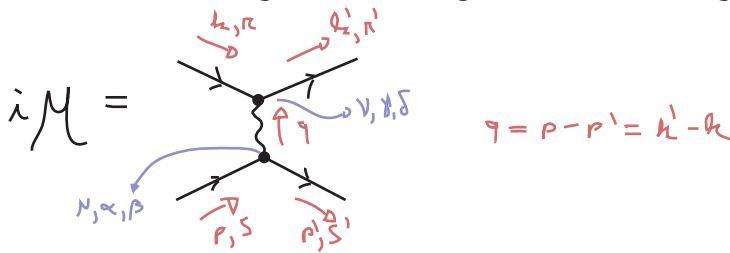
$r \equiv |\vec{x}|$
 $q \equiv |\vec{q}|$

$$V(\vec{x}) = \frac{-g^2}{4\pi^2 i r} (2\pi i) \left(\frac{i m e^{-m_\phi r}}{2 i m} \right) = \frac{-g^2}{4\pi r} e^{-m_\phi r} \quad (\text{eq. 201.4})$$

que é o potencial atrativo de Yukawa.

Potencial de Coulomb

Seguimos a mesma lógica acima, agora temos o diagrama:



$$i\mathcal{M} = \bar{u}^s(p')_\alpha (-ie\gamma_{\alpha\mu}^N) u^r(p)_\beta \frac{-i\eta^{\mu\nu}}{(p-p')^2} \bar{u}^{r'}(k')_\gamma (-ie\gamma_{\gamma\nu}^N) u^s(k)_\delta$$

No limite não relativístico:

$$\bar{u}^s(p') \gamma^0 u^r(p) = m \begin{pmatrix} \xi^{s+} & \xi^{s+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^r \\ \xi^r \end{pmatrix} = 2m \delta^{sr}$$

$$\bar{u}^s(p') \gamma^i u^r(p) = m \begin{pmatrix} \xi^{s+} & \xi^{s+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^r \\ \xi^r \end{pmatrix} = 0$$

e obtemos:

$$i\mathcal{M} = \frac{-ie^2 \gamma_{00}}{|\vec{p}-\vec{p}'|^2} (2m \delta^{sr}) (2m \delta^{r's'}) = -\frac{ie^2}{|\vec{p}'-\vec{p}|^2} (2m \delta^{sr}) (2m \delta^{r's'})$$

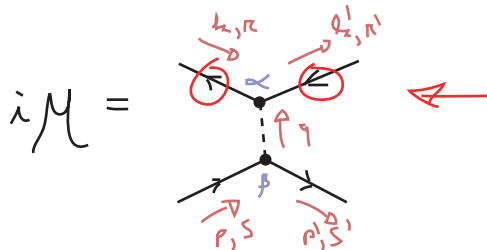
$$\boxed{V(q) = +\frac{e^2}{|\vec{q}|^2}} \quad (\text{eq. 202.1})$$

que é muito parecida com o potencial de Yukawa da eq. 201.3 (salvo o sinal e o fato de não termos massa). Portanto ao invés de fazer a transformada de Fourier de novo, basta inverter o sinal e fazer $m = 0$ em 201.4:

$$\boxed{V(\lambda) = \frac{\pm e^2}{4\pi\lambda} \equiv \frac{\alpha}{\lambda}} \quad (\text{eq. 202.2}) \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137}$$

Potencial Partícula-Antipartícula

O que acontece se substituirmos um dos férmions por sua antipartícula?



$$\bar{u}^{r'}(k') u^r(k) \rightarrow \bar{v}^{r'}(k') v^r(k) = m \begin{pmatrix} \xi^{r'+} & -\xi^{r'+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^r \\ -\xi^r \end{pmatrix} = -2m \delta^{r'r'}$$

no entanto usando: $|p, k\rangle = a_p^+ b_k^+ |0\rangle$ $\langle p', k'| = \langle 0| b_k a_p$ mudança de sinal

$$\langle p', k' | \bar{\Psi} \Psi \bar{\Psi} \Psi | p, k \rangle = \langle 0 | b_k a_p (\bar{\Psi} \Psi)(z_2) (\bar{\Psi} \Psi)(z_1) a_p^+ b_k^+ | 0 \rangle$$

Para "desentrelaçar" as contrações preciso fazer um número ímpar de permutações, que não tínhamos no caso só com partículas:

$$\langle 0 | a_{k'} a_{p'} (\bar{\psi} \psi)(y_+) (\bar{\psi} \psi)(y_1) a_p^+ a_k^+ | 0 \rangle$$

o que produz mais um sinal. A conclusão é que o potencial de Yukawa é atrativo mesmo neste caso.

No caso do potencial de Coulomb também temos este segundo fator (-1) advindo da ordem dos operadores fermiônicos, no entanto a troca de "u" por "v" resulta em:

$$\bar{u}^s(p') \not{\epsilon} u^s(p) = 2m \delta^{ss'} \Rightarrow \bar{v}^s(k) \not{\epsilon} v^{s'}(k) = m (\not{\epsilon}^+ - \not{\epsilon}^+) \underbrace{\left(\begin{smallmatrix} \not{\epsilon}^0 \\ 1 \end{smallmatrix} \right)}_1 \not{\epsilon}^0 \underbrace{\left(\begin{smallmatrix} \not{\epsilon}^0 \\ -\not{\epsilon}^0 \end{smallmatrix} \right)}_1 = 2m \delta^{ss'}$$

ou seja, não há mudança aqui. Logo temos um sinal total de diferença, de forma que o potencial entre partícula e anti-partícula é atrativo.

Espalhamento Rutherford

Vamos calcular agora a seção de choque de espalhamento de um elétron por um campo elétrico gerado por um núcleo atômico (não estamos considerando o núcleo dinamicamente, assumimos que ele é infinitamente mais pesado que o elétron e seu único papel vai ser produzir o campo). A Hamiltoniana de interação é:

$$H_I = \int d^3x e \bar{\psi} \not{\epsilon} \psi A_\mu$$

A primeira contribuição perturbativa para a parte não trivial da matriz S, de ordem e, é dada por (eq. 190.2):

$$\langle p' | iT | p \rangle = \langle p' | T \left\{ e^{-i \int H_I dt} \right\} | p \rangle = \dots + \underbrace{\langle p' | T \left\{ -i \int d^4x \bar{\psi} e \not{\epsilon} \psi A_\mu \right\} | p \rangle}_{\text{primeira ordem}} + \dots =$$

Note que não tenho fótons no estado inicial nem no final, e não estou contraindo A_μ com nada (se tratasse A como operador isto daria zero) - estamos tratando A como um campo clássico

$$\stackrel{\mathcal{O}(e)}{=} -i e \bar{u}(p') \not{\epsilon} u(p) \int d^4x e^{-i p' x} e^{+i p x} A_\mu(x) = -i e \bar{u}(p') \not{\epsilon} u(p) A_\mu(p' - p) \quad \text{(eq. 203.1)}$$

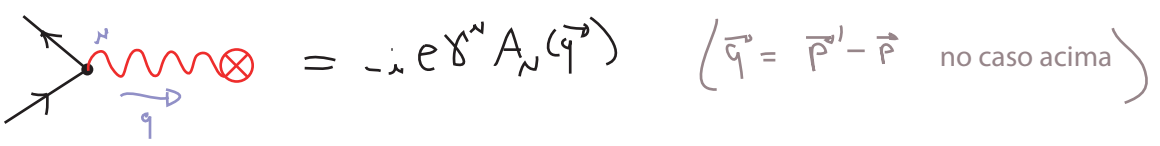
Se tomarmos a função $A_\mu(x)$ como independente do tempo, a sua transformada de Fourier vai ter uma delta de Dirac na energia:

$$A_\mu(p' - p) = A_\mu(\vec{p}' - \vec{p}) 2\pi \delta(\epsilon_{p'} - \epsilon_p)$$

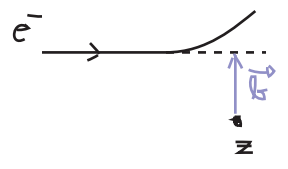
E, assim como na eq. 201.2, temos:

$$\langle p' | iT | p \rangle = i M(i\pi) \delta(\epsilon_{p'} - \epsilon_p)$$

Vemos que o efeito do campo externo pode ser codificado em uma nova regra de Feynman:



Queremos então calcular o espalhamento:



Que é um espalhamento 2 → 2 onde, no entanto, estamos olhando apenas uma das partículas. Assim como antes, temos:

$$dP(i \rightarrow f) = \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 2E_f} |\text{out} \langle p_f | \phi_A \rangle_{in}|^2$$

$$d\sigma = \int d^3 \vec{k} dP(\vec{k}) = \int d^3 k \underbrace{\frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 2E_f}}_{(2\pi)^{-6}} \underbrace{\left(\frac{d^3 k_i \phi(k_i)}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_i}} \right)}_{(2\pi)^{-6}} \underbrace{\left(\frac{d^3 \bar{k}_i \phi(\bar{k}_i)}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_i}} \right)}_{(2\pi)^{-6}} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{k}_i - \vec{k}_i)} \times \langle p_f | k_i \rangle_{in} \langle p_f | \bar{k}_i \rangle_{in}^*$$

Dado que: $\langle p_f | k_i \rangle_{in} = i \mathcal{M} 2\pi \delta(E_f - E_i)$
 $\langle p_f | \bar{k}_i \rangle_{in}^* = -i \mathcal{M}^* 2\pi \delta(E_f - E_i)$

$$\int d^3 k e^{i\vec{k} \cdot (\vec{k}_i - \vec{k}_i)} = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k}_i - \vec{k}_i)$$

$$\delta(E_f - E_i) \delta(E_f - E_i) = \delta(E_f - E_i) \frac{\delta(\vec{k}_i^z - k_i^z)}{|\frac{\vec{k}_i^z}{E_i}|}$$

× $\mathcal{M}(p_i \rightarrow p_f)$

$$\int \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 2E_f} 2\pi \delta(E_f - E_i) = d\Omega \int \frac{dp_r p_r^2}{8\pi^2 E_f} \delta(p_f - p_i) = \frac{d\Omega}{8\pi} \int dp_r p_r \delta(p_f - p_i)$$

Mais uma vez assumimos que: $|\phi(k_i)|^2 = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k}_i - \vec{p}_i)$ → cancela o que ainda tinha de potência de 2π por aí

$$\therefore \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{v_i E_i} \int dp_r p_r \delta(p_f - p_i) |\mathcal{M}(p_i \rightarrow p_f)|^2 \quad (\text{eq. 204.1})$$

$\frac{|\vec{k}_i^z}{E_i}| (\sqrt{2E_i})^2 \rightarrow |\vec{k}_i^z|$
 $E_i \approx m$

No caso de um núcleo de carga Z e teremos: $A_0(\vec{r}) = + \frac{Ze}{4\pi r} \rightarrow A_0(\vec{q}) = \frac{Ze}{|\vec{q}|^2}$

$$i\mathcal{M} = -ie \bar{u}(p_f) \gamma^\mu u(p_i) A_\mu(\vec{p}_f - \vec{p}_i) = -ie^2 \frac{\bar{u}(p_f) \gamma^0 u(p_i)}{|\vec{p}_f - \vec{p}_i|^2}$$

No limite não relativístico, como já vimos:

$$\bar{u}^{s'}(p_f) \gamma^0 u^s(p_i) = 2m \delta^{ss'}$$

$$\bar{u}^{s'}(p_f) \gamma^0 u^s(p_i) = \bar{u}^{s'}(p_f) \gamma^0 (v^0) (v^0) u^s(p_i) = \bar{u}^{s'}(p_f) \delta^0 u^s(p_i)$$

$$\therefore |iM|^2 = Z^2 e^4 \frac{4m^2 \delta^{ss'} \delta^{s's'}}{|\vec{p}_f - \vec{p}_i|^4} = Z^2 e^4 \frac{\bar{u}^{s'}(p_f) \gamma^0 u^s(p_i) \bar{u}^{s'}(p_i) \gamma^0 u^s(p_f)}{|\vec{p}_f - \vec{p}_i|^4}$$

Lembrando que temos que tirar a média sobre spins iniciais e somar sobre os finais (já que não estamos considerando feixes polarizados nem observando a polarização final):

$$\frac{1}{2} \sum_{ss'} |M|^2 = \frac{Z^2 e^4 m^2}{|\vec{p}_f - \vec{p}_i|^4}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{ss'} \delta^{ss'} \delta^{s's'} = 1$$

$$|\vec{p}_f + \vec{p}_i - 2p_i \cos \theta| = \sqrt{2p_i^2 - 2p_i^2 \cos \theta} = 2p_i \sin(\theta/2)$$

(eq. 204.1)

$$\delta(p_f - p_i) \Rightarrow |\vec{p}_f| = |\vec{p}_i| \Rightarrow |\vec{p}_f - \vec{p}_i| = 2p_i \sin(\theta/2) \simeq 2m v_i \sin(\theta/2)$$

Enfim:

(eq. 204.1) →

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{v_i E_i} \frac{m v_i}{m v_i} \frac{Z^2 e^4 m^2}{(2m v_i \sin(\theta/2))^4} = \frac{Z^2 \alpha^2}{4m^2 v_i^4 \sin^4(\theta/2)}$$

(eq. 205.1)

que é o resultado obtido por Rutherford em 1911.

Espalhamento $e^+e^- \rightarrow \ell \bar{\ell}$ despolarizado

(Nastase 24; Peskin 5.1)

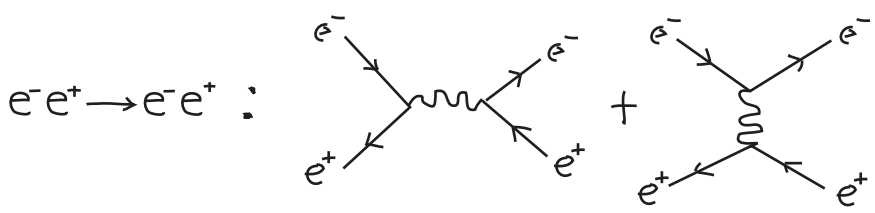
Agora que já reproduzimos alguns resultados clássicos conhecidos vamos atacar um espalhamento novo, a aniquilação elétron-pósitron em léptons, que é intrinsecamente quântica-relativística.

$$\text{Lépton: } \ell \equiv e^-, \mu^-, \tau^-, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$$

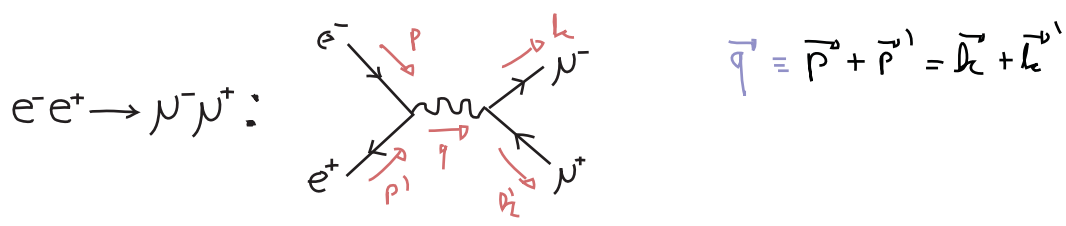
$$\bar{\ell} \equiv e^+, \mu^+, \tau^+, \bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\mu, \bar{\nu}_\tau$$

(eq. 205.2)

Se consideramos apenas a QED podemos esquecer dos neutrinos (já que não tem carga elétrica nenhum vértice nesta teoria os envolve). O caso em que $\ell = e^-$ é chamado de Espalhamento Bhabha e tem dois diagramas (ordem e^2):



No caso em que $l = \mu, \tau$ temos apenas o primeiro diagrama. Realizaremos o cálculo para o muon, mas a única coisa que muda para o τ é a massa.



Note que para criar o par de léptons final eu preciso ter uma energia mínima inicial:

$$E_{cm} > 2m_l \quad (\text{eq. 206.1})$$

o que significa:

{	energia inicial	estados finais possíveis (ignorando a produção de quarks)
	$E_{cm} < 2m_\mu$	e^-e^+
	$2m_\mu \leq E_{cm} < 2m_\tau$	$e^-e^+; \mu^-\mu^+$
	$E_{cm} \geq 2m_\tau$	$e^-e^+; \mu^-\mu^+; \tau^-\tau^+$

Usando as regras de Feynman para o diagrama acima obtemos:

$$i \mathcal{M} = \bar{v}^{s'}(p') (-ie\gamma^\mu) u^s(p) \left(\frac{-i g^{\mu\nu}}{q^2 - i\epsilon} \right) \bar{u}^r(k) (-ie\gamma^\nu) v^{r'}(k') =$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$ não importa aqui porque não estamos integrando em q e, por conservação de momento, $q^2 \neq 0$

$$= +\frac{i e^2}{q^2} (\bar{v}^{s'}(p') \gamma^\mu u^s(p)) (\bar{u}^r(k) \gamma_\mu v^{r'}(k'))$$

$$(\bar{v} \gamma^\mu u)^* = (\bar{v} \gamma^\mu u)^\dagger = u^\dagger \gamma^{\mu\dagger} (v^\dagger \gamma^0)^\dagger = u^\dagger \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 v = \bar{u} \gamma^\mu v$$

$\underbrace{\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0}_{\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^\mu}$ $\underbrace{\gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\mu \gamma^0 \gamma^0}_{\gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\mu}$

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{q^4} (\bar{v}^{s'}(p') \gamma^\mu u^s(p)) (\bar{u}^r(k) \gamma_\mu v^{r'}(k')) (\bar{v}^{r'}(k') \gamma_\nu u^r(k)) (\bar{u}^s(p) \gamma^\nu v^{s'}(p'))$$

(eq. 206.2)

Se não estamos observando as polarizações devemos tirar a média sobre as duas polarizações iniciais e somamos sobre as finais, obtendo a chamada **seção de choque despolarizada**. Estas somas vão agir sobre os u 's e v 's (eqs. 148.1 e 148.2):

$$\sum_s u_i^s(p) \bar{u}_j^s(p) = \not{p}_{ij} + m \hat{1}_{ij} \quad \sum_s v_i^s(p) \bar{v}_j^s(p) = \not{p}_{ij} - m \hat{1}_{ij}$$

Explicitando os índices spinoriais em 206.2 temos:

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4^4} (\bar{u}_i^{s'}(p') \gamma_{ij}^{\mu} u_j^s(p)) (\bar{u}_k^{\pi}(k) \gamma_{kl}^{\nu} u_l^{\pi'}(k')) (\bar{u}_m^{\pi'}(k') \gamma_{mn}^{\rho} u_n^{\pi}(k)) (\bar{u}_o^s(p) \gamma_{op}^{\sigma} u_p^{s'}(p'))$$

$$\frac{1}{2} \sum_s \frac{1}{2} \sum_{s'} \sum_{\pi} \sum_{\pi'} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4^4} \gamma_{ij}^{\mu} \gamma_{kl}^{\nu} \gamma_{mn}^{\rho} \gamma_{op}^{\sigma} (\not{k}' - m_{\nu})_{lm} (\not{k} + m_{\nu})_{nk} (\not{k} + m_{\rho})_{jo} (\not{k}' - m_{\rho})_{pi}$$

$$\text{Tr}[\gamma_{\mu}(-i\not{k}' - m_{\nu}) \gamma_{\nu}(-i\not{k} + m_{\nu})]$$

$$\text{Tr}[\gamma^{\mu}(-i\not{k} + m_{\rho}) \gamma^{\nu}(-i\not{k}' - m_{\rho})]$$

estes traços não são coincidência, notem que aparece um deles por linha fermiônica e isto vai sempre acontecer.

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{SPINS}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4^4} \text{Tr}[\gamma_{\mu}(\not{k}' - m_{\nu}) \gamma_{\nu}(\not{k} + m_{\nu})] \text{Tr}[\gamma^{\mu}(\not{k} + m_{\rho}) \gamma^{\nu}(\not{k}' - m_{\rho})]$$

(eq. 207.1)

Para calcular os traços acima precisamos desenvolver um certo arsenal de identidades envolvendo matrizes de Dirac (note que há até quatro delas em cada traço). Fazemos uma pausa no presente cálculo para desenvolver este arsenal.

Identidades com Matrizes de Dirac

Dado que: $(\gamma^5)^2 = 1$
 $\{\gamma^{\mu}, \gamma^5\} = 0$ } propriedades independentes de representação

$$\text{Tr}[\gamma^{\mu}] = \text{Tr}[(\gamma^5)^2 \gamma^{\mu}] = -\text{Tr}[\gamma^5 \gamma^{\mu} \gamma^5] = -\text{Tr}[\gamma^{\mu}] = 0$$

$$\text{Tr}[\gamma^5] = \text{Tr}[\pm (\gamma^{\mu})^2 \gamma^5] = \text{Tr}[\pm \gamma^{\mu} \gamma^5 \gamma^{\mu}] = -\text{Tr}[\gamma^5] = 0$$

↳ depende de repr. e de $\mu \rightarrow (\gamma^{\mu})^2 = \pm 1$

$$\text{Tr}[\gamma^{\mu}] = \text{Tr}[\gamma^5] = 0$$

(eq. 207.2)

Note que o mesmo que fizemos para provar as identidades acima poderia ser usado para provar:

$$\text{Tr}[\gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \gamma^{\rho} \dots \gamma^{\sigma}] = 0$$

ímpar (eq. 207.3)

$$\text{Tr}[\gamma^5 \gamma^5 \dots \gamma^5] = \text{Tr}[\gamma^5] = 0$$

(eq. 207.4)

$$\boxed{\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu]} = \text{Tr} \left[\frac{1}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu + \frac{1}{2} \overset{\text{CICL.}}{\gamma^\nu \gamma^\mu} \right] = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\underbrace{\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}}_{2g^{\mu\nu} \cdot \hat{1}_{4 \times 4}} \right] = 4g^{\mu\nu} \quad (\text{eq. 208.1})$$

De uma forma geral, o que fazemos com um produto de matrizes de Dirac é expandir na base:

$$\mathcal{V}_{\mathbb{F}} = \{ \hat{1}, \gamma^5, \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma^5, \gamma^{\mu\nu} \}$$

e vale: $\boxed{\mathcal{V}_{\mathbb{F}} \neq \hat{1} \leftrightarrow \text{Tr}[\mathcal{V}_{\mathbb{F}}] = 0}$ (eq. 208.2)

Já provamos isso para o segundo e o terceiro e: $\text{Tr}[\underbrace{\gamma^\mu \gamma^5}_{(-1)}] = -\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^5] = 0$

$$\text{Tr}[\gamma^{\mu\nu}] \leftarrow \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu] = 4g^{\mu\nu} - 4g^{\nu\mu} = 0$$

Produtos mais complicados podem ser expandidos na base usando:

$$\begin{aligned} \gamma^{\mu\nu} \gamma^5 &= -\frac{i}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_{\rho\sigma} \\ \gamma^{\mu\nu\rho} &= -i \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_\sigma \\ \gamma^{\mu\nu\rho} \gamma_5 &= -i \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_\sigma \\ \gamma^{\mu\nu\rho\sigma} &= i \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_5 \end{aligned} \quad (\text{eq. 208.3})$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\underbrace{\gamma^\mu \gamma^\nu}_{2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu} \gamma^\rho \gamma^\sigma] &= \text{Tr}[(2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu) \underbrace{\gamma^\rho \gamma^\sigma}_{g^{\rho\sigma} - \gamma^\sigma \gamma^\rho}] = \\ &= \text{Tr}[2g^{\mu\nu} \underbrace{\gamma^\rho \gamma^\sigma}_{\text{Tr}[\gamma^\rho \gamma^\sigma] = 4g^{\rho\sigma}} - 2g^{\mu\rho} \gamma^\nu \gamma^\sigma + 2g^{\mu\sigma} \gamma^\nu \gamma^\rho] - \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] \\ 2\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] &= 2[4g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - 4g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + 4g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}] \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma]} = 4[g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}] \quad (\text{eq. 208.4})$$

Como $\gamma^5 = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$

$$\boxed{\text{Tr}[\underbrace{\gamma^\mu \dots \gamma^\nu}_{\text{ÍMPAR}} \gamma^5]} = 0 \quad (\text{eq. 208.4})$$

Já o produto com 2 γ_s :

$$\text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5] = \text{Tr} [\underbrace{\pm (\gamma^\alpha)^2}_{\substack{\text{cicl} \\ \alpha \neq \mu; \alpha \neq \nu}} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5] = -\text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5] = 0 \quad (\text{eq. 209.1})$$

o que não funciona para 4 γ_s , caso sejam as 4 diferentes, uma vez que já não existe uma quinta para inserir como identidade.

$$\text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^5] \propto \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \quad \left(\begin{array}{l} \text{antissim sobre a troca de quaisquer dois} \\ \text{índices} \\ \text{para achar a constante de proporcionalidade basta} \\ \text{escolher uma das permutações, ex:} \\ \{\mu, \nu, \alpha, \beta\} = \{0, 1, 2, 3\} \end{array} \right)$$

$$\text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^5] = 4i \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \quad (\text{eq. 209.2})$$

Também é útil conhecer as contrações entre os ϵ_s :

$$\begin{aligned} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} &= 4! \epsilon^{0123} \epsilon_{0123} = -24 \\ \epsilon^{\alpha\beta\gamma\mu} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\nu} &= 3! \delta_\nu^\mu \epsilon^{0123} \epsilon_{0123} = -6 \delta_\nu^\mu \\ \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \epsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} &= 2! (\delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu - \delta_\sigma^\mu \delta_\rho^\nu) \epsilon^{0123} \epsilon_{0123} = -2 (\delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu - \delta_\sigma^\mu \delta_\rho^\nu) \end{aligned}$$

e notar que é possível inverter a ordem das γ_s no traço:

$$\begin{aligned} \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \dots] &= \text{Tr} [C \gamma^\mu C^{-1} C \gamma^\nu C^{-1} \dots \gamma^p C^{-1}] = (-1)^n \text{Tr} [\gamma^{\mu T} \gamma^{\nu T} \dots] = \\ &= (-1)^n \text{Tr} [(\dots \gamma^\nu \gamma^\mu)^T] = (-1)^n \text{Tr} [\dots \gamma^\nu \gamma^\mu] \end{aligned}$$

↪ se n é ímpar o traço é zero.

$$\text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \dots] = \text{Tr} [\dots \gamma^\nu \gamma^\mu] \quad (\text{eq. 209.3})$$

Finalmente, listamos algumas contrações entre γ_s que nos permitem simplificar o argumento do traço antes de fazê-lo:

$$g_{\mu\nu} (\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}) \Rightarrow \gamma^\mu \gamma_\mu = \delta^\mu_\mu = 4 \quad (\text{eq. 209.4})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_\mu + 2g^{\mu\nu} \gamma_\mu = -2\gamma^\nu \quad (\text{eq. 209.5})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\nu = -\gamma^\nu \underbrace{\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma_\nu}_{-2\gamma^\rho} + 2g^{\mu\nu} \gamma^\rho \gamma_\nu = 2\gamma^\nu \gamma^\rho + 2\gamma^\rho \gamma^\nu = 4g^{\nu\rho} \quad (\text{eq. 210.1})$$

(seguinto a mesma lógica)

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\nu = -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\mu \quad (\text{eq. 210.2})$$



Voltando ao cálculo da seção de choque, podemos simplificar bastante a equação 207.1

$$\text{(eq 207.1)} \rightarrow \frac{1}{4} \sum_{\text{SPINS}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4q^4} \text{Tr}[\gamma_\mu (\not{k}' - m_e) \gamma_\nu (\not{k} + m_e)] \text{Tr}[\gamma^\mu (\not{p} + m_e) \gamma^\nu (\not{p}' - m_e)] =$$

do quatro termos aqui, apenas dois tem o traço não nulo:

$\sim \gamma_\mu \not{k}' \gamma_\nu \not{k}$ & $\sim m_e^2 \gamma_\mu \gamma_\nu$

logo:

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\gamma_\mu (\not{k}' - m_e) \gamma_\nu (\not{k} + m_e)] &= +k'^\alpha \not{\epsilon}^\beta \text{Tr}[\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta] - m_e^2 \text{Tr}[\gamma_\mu \gamma_\nu] = \\ &= 4k'^\alpha k^\beta (g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} + g_{\mu\beta} g_{\alpha\nu}) - 4m_e^2 g_{\mu\nu} = \\ &= 4(+k'_\mu k_\nu - k' \cdot k g_{\mu\nu} + k_\mu k'_\nu - m_e^2 g_{\mu\nu}) \end{aligned}$$

da mesma forma:

$$\text{Tr}[\gamma^\mu (\not{p} + m_e) \gamma^\nu (\not{p}' - m_e)] = 4(+p^\mu p'^\nu + p'^\mu p^\nu - p \cdot p' g^{\mu\nu} - \underbrace{m_e^2 g^{\mu\nu}})$$

como os momentos são da ordem de m_e e $\frac{m_e}{m_\mu} \sim \frac{1}{200}$

podemos desprezar este termo

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\text{SPINS}} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{4e^4}{q^4} \left[k'_\mu k_\nu + k_\mu k'_\nu - g_{\mu\nu} (m_e^2 + k' \cdot k) \right] \left[p^\mu p'^\nu + p'^\mu p^\nu - p \cdot p' g^{\mu\nu} \right] = \\ &= \frac{4e^4}{q^4} \left[2k' \cdot p k \cdot p' + 2k' \cdot p' k \cdot p - 2\cancel{k' \cdot k} p \cdot p' - (m_e^2 + \cancel{k' \cdot k}) (2p \cdot p' - 4p \cdot p') \right] = \\ &\hspace{15em} - 2p \cdot p' \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{SPINS}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{8e^4}{q^4} (k' \cdot p k \cdot p' + k' \cdot p' k \cdot p + m_e^2 p \cdot p') \quad (\text{eq. 210.3})$$

Esta expressão pode ser calculada em qualquer referencial, tomemos o do centro de massa.