1.1 Em 3 dimensões, as rotações de um estado com spin 1/2 são geradas por:

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$$ (matrizes de spin)

onde $\vec{\sigma}$ são as matrizes de Pauli: $\begin{cases} [\sigma^i, \sigma^j] = 2i\epsilon^{ijk}\sigma^k \\ \{\sigma^i, \sigma^j\} = 2\delta^{ij} \end{cases}$

e: $[S^i, S^j] = i\epsilon^{ijk} S^k$ (que é a algebra do grupo de rotações em 3D, SO(3))

Uma rotação finita R(ϕ,n) de um ângulo ϕ em torno da direção $\vec{n}$ é dada por: $|\vec{n}|^2 = 1$

$$M(R) = e^{-i\phi\, \vec{n}\cdot\vec{S}}$$

E as matrizes de spin rodam como 3-vetores:

$$M^{-1}(R)\, S^i\, M(R) = \underbrace{R^{ij}}_{\text{matriz 3x3 que roda vetores em 3D}} S^j$$

Vamos generalizar esta representação de spin 1/2 para 3+1 dimensões (grupo de Lorentz):

1.1a As matrizes de Dirac são definidas por: $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ (álgebra de Clifford)

Mostre que as matrizes definidas por:

$$S^{\mu\nu} = -S^{\nu\mu} \equiv \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

$J^{\mu\nu} = i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu)$
geradores da transf. de Lorentz para 4-vetores (Peskin 3.1)

Satisfazem a álgebra do grupo de Lorentz:

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho})$$

ou seja, mostre que:

$$[S^{\mu\nu}, S^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho}S^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}S^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}S^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}S^{\nu\rho})$$

(se isto é verdade, as transformações geradas por estas matrizes são uma representação do grupo de Lorentz)

$$M_D(\Lambda) = e^{-\frac{i}{2}\Theta_{\alpha\beta}S^{\alpha\beta}}$$

$$\Lambda^\mu{}_\nu = e^{\Theta^\mu{}_\nu} \simeq \delta^\mu{}_\nu + \Theta^\mu{}_\nu + \frac{1}{2}\Theta^\mu{}_\lambda\Theta^\lambda{}_\nu + \ldots$$

1.1b Mostre que: $M_D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu M_D(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu$

(as matrizes de Dirac rodam como vetores em 3+1 dimensões)

1.1c Definamos espinores como os campos que se transformam sobre esta representação:

$$\psi'(x') = M_D(\Lambda)\psi(x) \longleftrightarrow x' = \Lambda x$$

Mostre que:

- $\psi^\dagger \psi$ não é invariante
- $\bar{\psi}\psi$ é invariante $\quad (\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0)$
- $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ é covariante

(ou seja: $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \rightarrow \Lambda^\mu{}_\nu \bar{\psi}\gamma^\nu\psi$
o que quer dizer que $V_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ é invariante, onde V_μ é qualquer vetor de Lorentz)

1.1d Escreva a Lagrangeana mais geral possível contendo apenas ψ, no máximo duas potências de ψ e derivadas espaciais (respeitando invariancia de Lorentz)

$\psi\psi, \psi^\dagger\psi, \psi^\dagger\psi^\dagger, \ldots$

1.2 Mostre que:

$$\int \frac{d\alpha\, d\alpha^*}{2\pi i} e^{-\alpha\alpha^*} |\alpha\rangle\langle\alpha^*|$$

1.3 Considerando o oscilador harmônico forçado escrito em termos dos estados coerentes (pgs 33 a 38 das notas de aula), mostre que:

(a) $\tilde{S}[\alpha(t), \alpha^*(t); \gamma(t), \bar{\gamma}(t)] = \tilde{S}[\alpha_{cl}(t), \alpha^*_{cl}(t); \gamma(t), \bar{\gamma}(t)] + \tilde{S}[\tilde{\alpha}(t), \tilde{\alpha}^*(t); 0, 0]$

(b) a equação 36.3 das notas de aula é verdadeira

1.4 Leia o cap I de S.Weinberg, "The Quantum Theory of Fields" , Vol I (disponível em http://www.ift.unesp.br/users/matheus/files/courses/2014tqc1/Weinberg_cap1.pdf)

1.5 Usando a equação 31.2 para o funcional gerador do oscilador harmônico forçado, obtenha a função de Greem de 4 pontos:

$$G_4(t_1, t_2, t_3, t_4)$$

A partir do G_4 obtido, obtenha também a função de Green de 4 pontos para o oscilador simples G_4^0

1.6 Dado que:

$$\ln Z[J] = \int dt \, \frac{J^2(t)}{2} f(t) + \lambda \int dt \, \frac{J^3(t)}{3!} + \tilde{\lambda} \int dt \, \frac{J^4(t)}{4!}$$

onde f(t) é uma função qualquer, independente da fonte J(t). Calcule as funções de Green de 3 pontos e de 4 pontos.