

# Teoria de Perturbação

(Peskin 4.1)

Por enquanto o curso abordou campos livres, cujas excitações tem uma interpretação de partículas quânticas também livres. Nestas teorias não vemos interações, espalhamentos nem estados ligados. Em suma, em um universo descrito por estas teorias não veríamos nada. Agora vamos tentar nos aproximar de teorias mais próximas da realidade introduzindo termos de interação na Hamiltoniana do sistema. Queremos continuar trabalhando com teorias locais, portanto este termo de interação será da forma:

$$H_{INT} = \int d^3x \frac{\mathcal{L}_{INT}[\phi(x)]}{\mathcal{L}_{INT}[\phi(x)]} = - \int d^3x \mathcal{L}_{INT}[\phi(x)]$$

$\swarrow$  só depende de campos calculados em um mesmo ponto "x"  
 em contraste com:  $\mathcal{L}_{INT}[\phi(x), \phi(y), \dots, \phi(z)]$

Ao longo das próximas página abordaremos três exemplos de teorias interagentes:

(I) Teoria "lambda phi 4":

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2}_{\mathcal{L}_0} - \underbrace{\frac{\lambda}{4!} \phi^4}_{\mathcal{L}_{INT}} \quad (\text{eq. 1.1})$$

$\lambda \rightarrow$  constante de acoplamento (claramente voltamos para o caso livre quando  $\lambda = 0$ )

E.O.M.

$$(\partial^2 + m^2) \phi(x) = - \frac{\lambda}{3!} \phi^3 \quad (\text{eq. 1.2})$$

Que tem uma solução bem mais complicada do que a equação de movimento livre (de fato não sabemos resolvê-la exatamente). Para quantizar, impomos a relação de comutação:

$$[\phi(t, \vec{x}), \Pi(t, \vec{y})] = i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$$

$\rightarrow$  é o mesmo da teoria livre pois a interação não depende de  $\partial_\mu \phi$

Exemplos: o bóson de Higgs (o único escalar "fundamental" presente na natureza) tem esta interação e ela também aparece em "quasi-partículas" de certos modelos de matéria condensada.

## (II) Eletrodinâmica Quântica (QED):

$$\mathcal{L}_{QED} = \mathcal{L}_{DIRAC} + \mathcal{L}_{MAXWELL} + \mathcal{L}_{INT} = \bar{\Psi} (i \not{\partial} - m) \Psi - \frac{1}{4} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) - e \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi A_\mu$$

elétron carga é algo como a constante de acoplamento

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad \text{fóton}$$

Para uma teoria com mais férmions (com carga elétrica) basta ir somando termos do tipo:

$$\bar{\Psi}_f (i \not{\partial} - m_f) \Psi_f - Q_f \bar{\Psi}_f \gamma^\mu \Psi_f A_\mu$$

índice que diferencia os férmions ("flavor" ou "sabor") carga do férmion  
 massa do férmion

mas nos limitaremos ao caso do elétron por enquanto (do ponto de vista da QED adicionar mais férmions seria só repetição da mesma física).

Podemos colocar este Lagrangiana em uma forma mais simples usando a derivada covariante:

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + i e A_\mu(x)$$

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\Psi} (i \not{D} - m) \Psi - \frac{1}{4} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \quad (\text{eq. 2.1})$$

Uma propriedade crucial desta Lagrangiana é que ela é invariante por **transformações de gauge**:

$$\Psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} \Psi(x) \quad A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x)$$

fase local

De fato uma das formas de chegar a esta Lagrangiana a partir de "primeiros princípios" é postular a existência de um férmion e exigir que a Lagrangiana seja invariante pela primeira transformação da esquerda acima. Isso é impossível sem a introdução de um campo vetorial que se transforme conforme a transformação da direita. Aí basta escrever todos os termos envolvendo estes dois campos que sejam invariantes sobre estas transformações e chegamos na equação 2.1 (a menos de infinitos termos não-renormalizáveis, o que será melhor entendido em QFT II, mas por enquanto podemos ter como imposição adicional proibir produtos e potências mais altas dos operadores que já aparecem em 2.1 ou aplicação de mais derivadas - o que equivale a impor que a teoria seja renormalizável)

$$\hookrightarrow \text{EX: } (\Psi\Psi), (\bar{\Psi}\not{\partial}\Psi)^2, \bar{\Psi}\Psi(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}), \partial^\mu \partial_\mu (F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}), \text{ETC...}$$

$$\text{E.O.M.} \rightarrow (i \not{D} - m) \Psi(x) = 0 \quad \text{eqs. de Dirac + acoplamento mínimo} \quad (\text{eq. 2.2})$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = e \bar{\Psi} \gamma^\nu \Psi \equiv e j^\nu \quad (\text{eq. 2.3})$$

$\hookrightarrow$  eqs. de Maxwell não homogêneas e a corrente é a corrente conservada em 2.2:  $j^\nu = \bar{\Psi} \gamma^\nu \Psi$

A quantização do campo fermiônico não muda. A quantização do fóton (ou de qualquer outro **campo de Gauge**) é mais delicada (note que  $\pi^0 = 0$  em nossa Lagrangiana) e a evitaremos por enquanto.

(III) Interação de Yukawa:

$$\mathcal{L}_{\text{YUKAWA}} = \mathcal{L}_{\text{DIRAC}}[\Psi] + \mathcal{L}_{\text{K-G}}[\phi] - g \bar{\Psi} \Psi \phi \quad (\text{eq. 3.1})$$

acoplamento de Yukawa

Assim como na QED podemos adicionar mais férmions e escalares com diferentes acoplamentos entre si:

$$g_{f_1 f_2} \bar{\Psi}_{f_1} \Psi_{f_2} \phi_{f_2}$$

Exemplos: força nuclear forte (onde os protons e neutrons são os férmions e o pion é o escalar); interação do Higgs com quase todos os férmions do Modelo Padrão (tem um monte de "Yukawas" como parâmetros livres no Modelo Padrão)

## Quadro de Interação e o Teorema de Wick

(Peskin 4.2 e 4.3, Stermann Appendix A)

Os "quadros" da MQ:

Dado um elemento de matriz:  $\langle \Psi | \hat{A} | \phi \rangle$   
 $\hookrightarrow \hat{A} = \hat{A}(Q, P)$

(no que segue estou forçando minha letra a diferenciar  $\frac{d}{dt}$  de  $\frac{d}{dt}$ )

a evolução temporal é dada por:

$$i \frac{d}{dt} \langle \Psi | \hat{A} | \phi \rangle = \langle \Psi | [\hat{A}, \hat{H}] | \phi \rangle \quad (\text{eq. 3.2})$$

$\hookrightarrow$  calculado em  $t$

A equação 3.2 tem toda a informação sobre a evolução, mas gostaríamos de separar a evolução dos operadores e estados, definindo:

$$i \frac{d\hat{A}}{dt} \equiv [\hat{A}, \hat{M}]$$

$$\hat{M}^+ = M$$

$$i \frac{d|\psi\rangle}{dt} \equiv \hat{N}|\psi\rangle$$

$$\hat{N}^+ = N$$

$$-i \frac{d\langle\psi|}{dt} \equiv \hat{N}^+ \langle\psi|$$

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} \langle \Psi | \hat{A} | \phi \rangle &= i \left( \frac{d\langle \Psi |}{dt} \right) \hat{A} | \phi \rangle + i \langle \Psi | \frac{d\hat{A}}{dt} | \phi \rangle + i \langle \Psi | \hat{A} \left( \frac{d|\phi\rangle}{dt} \right) \\ &= - \langle \Psi | \hat{N}^+ \hat{A} | \phi \rangle + \langle \Psi | [\hat{A}, \hat{M}] | \phi \rangle + \langle \Psi | \hat{A} \hat{N} | \phi \rangle = \end{aligned}$$

$$N^{\dagger} = N$$

$$\downarrow$$

$$= \langle \Psi | [\hat{A}, \hat{N}] | \phi \rangle + \langle \Psi | [\hat{A}, \hat{M}] | \phi \rangle = \langle \Psi | [\hat{A}, \hat{H}] | \phi \rangle$$

$$\boxed{\hat{N} + \hat{M} = \hat{H}} \quad (\text{eq. 4.1})$$

Um "quadro" consiste em uma escolha de  $\hat{M}$  e  $\hat{N}$ :

**Quadro de Schrödinger:**

$$\left. \begin{aligned} \hat{M} &= 0 \\ \hat{N} &= \hat{H} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} i \frac{d}{dt} |\Psi_S(t)\rangle &= \hat{H} |\Psi_S(t)\rangle \\ i \frac{d}{dt} \hat{A}_S(t) &= 0 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\hat{A}_S(t)}{dt} &= \frac{d\hat{H}}{dt} \stackrel{\uparrow}{=} 0 \\ \text{não dependem} & \\ \text{explicitamente do tempo} & \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \hat{A}_S(t) &= \hat{A}(t_0) \\ |\Psi_S(t)\rangle &= e^{-i\hat{H}(t-t_0)} |\Psi(t_0)\rangle \end{aligned}} \quad (\text{eq. 4.2})$$

**Quadro de Heisenberg:**

$$\left. \begin{aligned} \hat{M} &= \hat{H} \\ \hat{N} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} i \frac{d}{dt} \hat{A}_H(t) &= [\hat{A}_H(t), \hat{H}] \\ \frac{d}{dt} |\Psi_H(t)\rangle &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{A}_H(t) &= e^{i\hat{H}(t-t_0)} \hat{A}(t_0) e^{-i\hat{H}(t-t_0)} \\ |\Psi_H(t)\rangle &= |\Psi(t_0)\rangle \end{aligned}} \quad (\text{eq. 4.3})$$

Para o tempo fixo  $t_0$  os dois quadros coincidem:

$$\boxed{|\Psi_S(t_0)\rangle = |\Psi_H(t_0)\rangle = |\Psi(t_0)\rangle \quad \hat{A}_H(t_0) = \hat{A}_S(t_0) = \hat{A}(t_0)} \quad (\text{eq. 4.4})$$

Podemos mudar entre os dois quadros fazendo uma transformação unitária:

$$\begin{aligned} |\Psi_w\rangle &= \hat{W} |\Psi\rangle & \hat{W}^{\dagger} &= \hat{W}^{-1} \\ \hat{A}_w &= \hat{W} \hat{A} \hat{W}^{\dagger} = \hat{W} \hat{A} \hat{W}^{-1} \end{aligned}$$

Definindo  $W$  como a transformação "Q. Schrödinger"  $\rightarrow$  "Q. Heisenberg", vemos que:

$$\hat{A}_H(t) = e^{i\hat{H}(t-t_0)} \hat{A}(t_0) e^{-i\hat{H}(t-t_0)} \longleftrightarrow \hat{W} = e^{i\hat{H}(t-t_0)}$$

O que também poderia ter sido obtido de:

$$|\Psi_H(t)\rangle = \hat{W} |\Psi_S(t)\rangle \Rightarrow |\Psi_S(t)\rangle = \hat{W}^{-1} |\Psi_H(t)\rangle = \underbrace{e^{-i\hat{H}(t-t_0)}}_{U_S(t,t_0)} |\Psi(t_0)\rangle$$

(eq. 4.2)

$$\hat{W} = U_S^{-1}(t, t_0) = U_S(t_0, t) \quad (\text{eq. 5.1})$$

De onde vemos que esta transformação é o inverso do operador evolução.

### Quadro de Interação (ou de Dirac):

Suponha que tenhamos um hamiltoniano do tipo:

$$\hat{H} = \underbrace{\hat{H}_0}_{\text{parte livre (quadrática nos campos)}} + \underbrace{\hat{H}_1}_{\text{parte interagente (potências maiores)}}$$

o quadro interação equivale à escolha:

$$\hat{M} = \hat{H}_0 \quad \hat{N} = \hat{H}_1$$

$$i \frac{d\hat{A}_I(t)}{dt} = [\hat{A}_I(t), \hat{H}_0] \quad (\text{eq. 5.2})$$

$$i \frac{d|\Psi_I(t)\rangle}{dt} = \hat{H}_1 |\Psi_I(t)\rangle \quad (\text{eq. 5.3})$$

Mais uma vez, todos os quadros são iguais em  $t_0$ :

$$\hat{A}_I(t_0) = \hat{A}_S(t_0) = \hat{A}_H(t_0) = \hat{A}(t_0) \quad |\Psi_I(t_0)\rangle = |\Psi_S(t_0)\rangle = |\Psi_H(t_0)\rangle = |\Psi(t_0)\rangle$$

A evolução dos operadores se dá como no quadro de Heisenberg da teoria livre:

$$i \frac{d\hat{H}_0}{dt} = 0 \quad \hat{H}_{0I}(t) = \hat{H}_{0S}(t) = \hat{H}_0$$

$$i \frac{d\hat{A}_I(t)}{dt} = [\hat{A}_I(t), \hat{H}_0] \quad \hat{A}_I(t) = e^{i\hat{H}_0(t-t_0)} \hat{A}(t_0) e^{-i\hat{H}_0(t-t_0)}$$

E o próprio hamiltoniano de interação depende do tempo:

$$i \frac{d\hat{H}_1}{dt} = [\hat{H}_1, \hat{H}_0] \quad \hat{H}_1 \equiv \hat{H}_{1I}(t) = e^{i\hat{H}_0(t-t_0)} \hat{H}_1(t_0) e^{-i\hat{H}_0(t-t_0)}$$

A evolução dos estados é um pouco mais complicada:

$$|\Psi_I(t)\rangle = \hat{U}_I(t, t_0) |\Psi_I(t_0)\rangle$$

quero encontrar U, que satisfaça:

$$\begin{cases} \hat{U}(t, t) = 1 \\ \hat{U}(t, t') \hat{U}(t', t_0) = \hat{U}(t, t_0) \end{cases} \quad (\text{eq. 6.1})$$

Substituindo isto em 5.3:

$$i \frac{d}{dt} \hat{U}_I(t, t_0) |\Psi_I(t_0)\rangle = \hat{H}_{1I}(t) \hat{U}_I(t, t_0) |\Psi_I(t_0)\rangle$$

$$i \frac{d}{dt} \hat{U}_I(t, t_0) = \hat{H}_{1I}(t) \hat{U}_I(t, t_0) \quad (\text{eq. 6.2})$$

Uma solução simples para esta equação é:

$$\hat{U}_I(t, t_0) = e^{i\hat{H}_0(t-t_0)} e^{-i\hat{H}_S(t-t_0)} \quad (\text{eq. 6.3})$$

$\hat{H}_S$ : hamiltoniano completo ( $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$ ) no quadro de Schrödinger

(vou suprimir os símbolos de operador daqui para frente)

$$\frac{d}{dt} U_I(t, t_0) = i H_0 e^{i H_0(t-t_0)} e^{-i H_S(t-t_0)} + e^{i H_0(t-t_0)} (-i H_S) e^{-i H_S(t-t_0)} =$$

$$= -i e^{i H_0(t-t_0)} (H_S - H_0) e^{-i H_S(t-t_0)} = -i H_{1I} e^{i H_0(t-t_0)} e^{-i H_S(t-t_0)} \hat{U}_I(t, t_0)$$

$H_{1I} = H_1(t_0)$

$$H_{1I} = e^{i H_0(t-t_0)} H_1(t_0) e^{-i H_0(t-t_0)} \Rightarrow H_1(t_0) = e^{-i H_0(t-t_0)} H_{1I} e^{i H_0(t-t_0)}$$

Gostaríamos de uma solução similar a  $e^{-i H_{1I} t}$ , mas isso requer mais cuidado pois  $H_{1I}$  na eq. 6.2 depende do tempo. Notemos que a expressão:

$$U_I(t, t_0) = 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 H_{1I}(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_{1I}(t_1) H_{1I}(t_2) + (-i)^3 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 \dots \quad (\text{eq. 7.1})$$

NOTE

$$\frac{d}{dt} \textcircled{I} = -i H_{1I}(t) \textcircled{I}$$

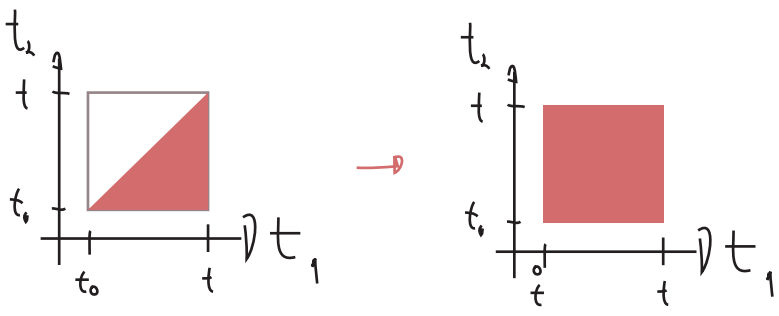
$$\frac{d}{dt} \textcircled{II} = (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_2 H_{1I}(t) H_{1I}(t_2) = -i H_{1I}(t) \textcircled{I}$$

$$\left( \frac{d}{dt} \textcircled{III} = -i H_{1I}(t) \textcircled{II} \right)$$

e assim por diante

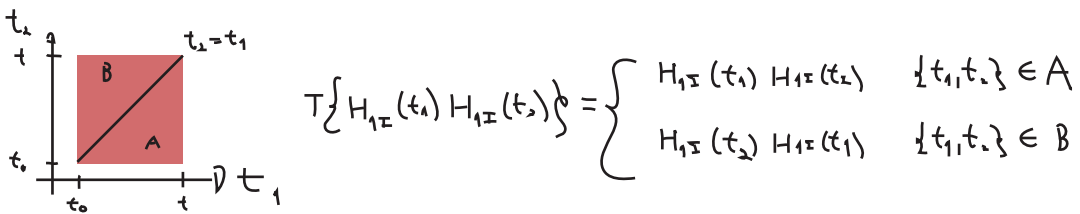
$$\therefore \frac{d}{dt} U_I(t, t_0) = -i H_{1I}(t) U_I(t, t_0) \quad \rightarrow \text{ o que prova que 7.1 é solução de 6.2}$$

Para simplificar mais o Ansatz 7.1, podemos trocar os limites de integração



tomando o cuidado de notar que  $[H_{1I}(t_1), H_{1I}(t_2)] \neq 0$

de fato, usando o ordenamento temporal:



Podemos escrever:

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 T \{ H_{1I}(t_1) H_{1I}(t_2) \} = \underbrace{\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H(t_1) H(t_2)}_A + \underbrace{\int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 H(t_1) H(t_2)}_B = 2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H(t_1) H(t_2)$$

Analogamente:

$$\int_{t_0}^t dt_1 \dots dt_n T \{ H_{1I}(t_1) \dots H_{1I}(t_n) \} = n! \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_{1I}(t_1) \dots H_{1I}(t_n)$$

De forma que:

$$\hat{U}_I(t, t_0) = 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 T \{ H_{1I}(t_1) \} + \frac{(-i)^2}{2!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 T \{ H_{1I}(t_1) H_{1I}(t_2) \} + \frac{(-i)^3}{3!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^t dt_3 T \{ \dots \}$$

$$\boxed{U_I(t, t_0) = T \left\{ \text{Exp} \left[ -i \int_{t_0}^t dt' H_{1I}(t') \right] \right\}} \quad (\text{eq. 8.1})$$

Esta separação entre a teoria livre e a parte interagente exige um cuidado adicional. Anteriormente usamos a definição para o vácuo como:

$$H_0 |0\rangle \equiv E_0^L |0\rangle = 0$$

↗ Assumindo  $H_0$  normalmente ordenado  
↘ Menor autovalor de  $H_0$   
↙ Hamiltoniano do sistema

Faremos o mesmo para o Hamiltoniano com a interação:  $H | \Omega \rangle = (H_0 + H_1) | \Omega \rangle \equiv E_0 | \Omega \rangle$

Menor autovalor de  $H = H_0 + H_1$  ↙

e, em geral:  $|0\rangle \neq |\Omega\rangle$ . Gostaríamos de expressar este novo vácuo em termos de grandezas conhecidas.

Construindo um conjunto completo com os autoestados do hamiltoniano total temos:

$$H |n\rangle = E_n |n\rangle$$



$$\hat{1} = |\Omega\rangle\langle\Omega| + \sum_{n \neq 0} |n\rangle\langle n|$$

Tomemos um estado que começou no vácuo "livre" da teoria e está evoluindo com o Hamiltoniano completo:

$$e^{-i\hat{H}T} |0\rangle = e^{-iE_0 T} |\Omega\rangle\langle\Omega|0\rangle + \sum_{n \neq 0} e^{-iE_n T} |n\rangle\langle n|0\rangle$$

e façamos o limite  $T \rightarrow \infty(1 - i\epsilon)$

$\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-\epsilon E_0 T} \gg e^{-\epsilon E_1 T} \gg e^{-\epsilon E_2 T} \gg \dots$   
 "mata" os estados excitados:

e ficamos só com o zero-ésimo termo da soma do lado direito:

$$\lim_{T \rightarrow \infty(1 - i\epsilon)} \left[ e^{-i\hat{H}T} |0\rangle \right] = e^{-iE_0 T} |\Omega\rangle\langle\Omega|0\rangle$$

$$|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1 - i\epsilon)} \frac{e^{-i\hat{H}(T+t_0)} |0\rangle}{e^{-iE_0(T+t_0)} \langle\Omega|0\rangle} = \lim_{T \rightarrow \infty(1 - i\epsilon)} \frac{e^{-i\hat{H}(T+t_0)} e^{i\hat{H}_0(T+t_0)} |0\rangle}{e^{-iE_0(T+t_0)} \langle\Omega|0\rangle}$$

$H_0|0\rangle = 0$

$$|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1 - i\epsilon)} \frac{U_I(t_0, -T) |0\rangle}{e^{-iE_0(T+t_0)} \langle\Omega|0\rangle} \quad (\text{eq. 9.1})$$

$$(\text{eq. 6.3}) \Rightarrow U_I(-T, t_0) = e^{i\hat{H}_0(-T-t_0)} e^{-i\hat{H}(-T-t_0)} \quad U_I(t_0, -T) = e^{+i\hat{H}(-T-t_0)} e^{-i\hat{H}_0(-T-t_0)}$$

$$U_I(-T, t_0) U_I(t_0, -T) = 1$$

De forma semelhante:

$$\langle\Omega| = \lim_{T \rightarrow \infty(1 - i\epsilon)} \frac{\langle 0| U_I(T, t_0)}{e^{-iE_0(T-t_0)} \langle 0|\Omega\rangle} \quad (\text{eq. 9.2})$$

Esse é um bom ponto para para e fazer a pertinente pergunta: o que diabos estamos fazendo? Para que serve este quadro de interação?

Pois bem, a imagem que temos em mente é a de experiências aonde temos objetos quânticos e relativísticos: partículas se movendo e interagindo em altas energias. As situações típicas em que conseguimos estudar partículas relativísticas (Raios Cósmicos ou Aceleradores de Partículas) envolvem três "momentos":

(I) Duas ou mais partículas iniciais se aproximam da região de espalhamento a partir de distâncias que podem ser consideradas bem grandes se comparadas com a "região de interação". Estas partículas se movem em linhas retas e são livres (no sentido em que não interagem entre si - pode haver um campo externo que guia sua trajetória, mas ele é tratado classicamente e modifica a geodésica seguida pela partícula).

(II) Ocorre um choque/espalhamento praticamente instantâneo e pontual, no sentido quântico: o tamanho da região de interação e o tempo de duração da mesma estão protegidos pelo princípio da incerteza: não temos como determinar com exatidão aonde nem quando ela aconteceu.

(III) Um número  $n$  de partículas deixa a pequena região de interação. Podem ser as mesmas que entraram (no caso de um choque elástico) ou em número e tipo diferente (no caso inelástico). Estas estão novamente livres (no mesmo sentido do momento I) e se movem por uma distância grande antes de chegar aos detectores, onde são medidas (o que é uma nova interação, completamente independente da anterior).

O quadro de interação, por um lado, faz a evolução dos operadores acontecer segundo a Hamiltoniana livre, o que nos permitirá explorar o fato de o sistema é assintoticamente livre no início e no fim do espalhamento. Além disso a parte de interação do Hamiltoniano depende do tempo, o que nos permitirá restringir sua duração.

Uma expressão que deixa bem clara a utilidade do quadro é a 9.1:

$$|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{U_I(t_0, -T) |0\rangle}{e^{-iE_0(T+t_0)} \langle \Omega | 0 \rangle}$$

Vemos que (a menos de um fator de normalização) o vácuo interagente da teoria é criado a partir do vácuo livre pelo operador de evolução no quadro de interação. Este operador é entre um ponto infinito no passado e  $t_0$ , o que só quer dizer um tempo grande se comparado com o tempo de interação.

Vejamos como ficam as funções de green da teoria interagente neste quadro, primeiro notemos que:

$$\phi(x) = \phi(t, \vec{x}) = \phi_H(t, \vec{x}) \quad (\text{definimos nossos operadores de campo no quadro de Heisenberg})$$

$$\phi_H(t, \vec{x}) = e^{iH(t-t_0)} \phi(t_0, \vec{x}) e^{-iH(t-t_0)}$$

$$\phi_I(t, \vec{x}) = e^{iH_0(t-t_0)} \phi(t_0, \vec{x}) e^{-iH_0(t-t_0)} =$$

$$= \underbrace{e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)}}_{U_I(t, t_0)} \phi_H(x) \underbrace{e^{+iH(t-t_0)} e^{-iH_0(t-t_0)}}_{U_I^+(t, t_0)} \quad 6.3$$

$$\boxed{\phi_H(x) = U_I^+(t, t_0) \phi_I(x) U_I(t, t_0)} \quad (\text{eq. 10.1})$$

Podemos então escrever a função de dois pontos:

$$\begin{aligned} \langle \Omega | \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty (1-\lambda \epsilon)} \frac{\langle 0 | U_{\text{I}}(T, t_0) U_{\text{I}}^{\dagger}(x^0, t_0) \phi_{\text{I}}(x) U_{\text{I}}(x^0, t_0) \times \\ &\quad \times U_{\text{I}}^{\dagger}(y^0, t_0) \phi_{\text{I}}(y) U_{\text{I}}(y^0, t_0) \frac{U_{\text{I}}(t_0, -T) | 0 \rangle}{e^{-i E_0 (T+t_0)} \langle \Omega | 0 \rangle} = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty (1-\lambda \epsilon)} \frac{1}{e^{-i \lambda E_0 T} |\langle \Omega | 0 \rangle|^2} \langle 0 | U_{\text{I}}(T, x^0) \phi_{\text{I}}(x) U_{\text{I}}(x^0, y^0) \phi_{\text{I}}(y) U_{\text{I}}(y^0, -T) | 0 \rangle \end{aligned}$$

$$U_{\text{I}}^{\dagger}(t_1, t_2) = e^{-i H_0 (t_1 - t_2)} e^{i H(t_1, -t_2)} = U_{\text{I}}(t_2, t_1)$$

$$U_{\text{I}}(t_1, t') U_{\text{I}}(t', t_2) = U_{\text{I}}(t_1, t_2)$$

(eq. 11.1)

Por outro lado, sabemos que:

$$1 = \langle \Omega | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty (1-\lambda \epsilon)} \frac{\langle 0 | U_{\text{I}}(T, t_0) \overbrace{U_{\text{I}}(T, -T)} U_{\text{I}}(t_0, -T) | 0 \rangle}{e^{-i \lambda E_0 T} |\langle \Omega | 0 \rangle|^2}$$

Podemos dividir 11.1 por esta unidade, obtendo:

$$\langle \Omega | \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty (1-\lambda \epsilon)} \frac{\langle 0 | U_{\text{I}}(T, x^0) \phi_{\text{I}}(x) U_{\text{I}}(x^0, y^0) \phi_{\text{I}}(y) U_{\text{I}}(y^0, -T) | 0 \rangle}{\langle 0 | U_{\text{I}}(T, -T) | 0 \rangle}$$

(eq. 11.2)

Note que, para  $x^0 > y^0$ , ambos os lados da equação estão temporalmente ordenados. Poderíamos ter também calculado:

$$\langle \Omega | \phi(y) \phi(x) | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty (1-\lambda \epsilon)} \frac{\langle 0 | U_{\text{I}}(T, y^0) \phi_{\text{I}}(y) U_{\text{I}}(y^0, x^0) \phi_{\text{I}}(x) U_{\text{I}}(x^0, -T) | 0 \rangle}{\langle 0 | U_{\text{I}}(T, -T) | 0 \rangle}$$

E esta estaria ordenada para  $y^0 > x^0$ . De forma que podemos escrever:

$$\begin{aligned} \langle \Omega | T \{ \phi(y) \phi(x) \} | \Omega \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty (1-\lambda \epsilon)} \frac{\langle 0 | T \{ U_{\text{I}}(T, y^0) \phi_{\text{I}}(y) U_{\text{I}}(y^0, x^0) \phi_{\text{I}}(x) U_{\text{I}}(x^0, -T) \} | 0 \rangle}{\langle 0 | U_{\text{I}}(T, -T) | 0 \rangle} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty (1-\lambda \epsilon)} \frac{\langle 0 | T \{ \phi_{\text{I}}(y) \phi_{\text{I}}(x) U_{\text{I}}(T, -T) \} | 0 \rangle}{\langle 0 | U_{\text{I}}(T, -T) | 0 \rangle} \end{aligned}$$

dentro do produto T podemos comutar a vontade

$$\langle \Omega | T \{ \phi(y) \phi(x) \} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty (1-\lambda \epsilon)} \frac{\langle 0 | T \{ \phi_{\text{I}}(y) \phi_{\text{I}}(x) \text{Exp}[-i \int_{-T}^T dt H_{\text{I}}(t)] \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \{ \text{Exp}[-i \int_{-T}^T dt H_{\text{I}}(t)] \} | 0 \rangle}$$

Esta expressão é trivialmente generalizada para um número arbitrário de operadores:

$$\langle \Omega | T \{ \mathcal{O}_H(x_1) \dots \mathcal{O}_H(x_n) \} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \{ \mathcal{O}_I(x_1) \dots \mathcal{O}_I(x_n) \text{Exp} \left[ -i \int_{-T}^T dt H_{\text{int}}(t) \right] \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \{ \text{Exp} \left[ -i \int_{-T}^T dt H_{\text{int}}(t) \right] \} | 0 \rangle}$$

(eq. 12.1)

**Teorema de Wick**

Na prática, obter  $\langle \Omega | T \{ \mathcal{O}_H(x_1) \dots \mathcal{O}_H(x_n) \} | \Omega \rangle$  envolve calcular:

$$\langle 0 | T \{ \mathcal{O}_I(x_1) \dots \mathcal{O}_I(x_n) \left( \int_{-T}^T dt H_{\text{int}}(t) \right)^n \} | 0 \rangle$$

→ pode parecer que teremos que calcular infinitos elementos deste tipo, para todos n's. Isto é verdade para o resultado exato. Mas veremos que, em teoria de perturbação, poderemos truncar a expansão da exponencial

Como tanto os operadores  $\mathcal{O}_I(x)$  quanto o Hamiltoniano de interação são produtos de campos, este problema se reduz a calcular elementos de matriz do tipo:

$$\langle 0 | T \{ \phi_I(x_1) \dots \phi_I(x_n) \} | 0 \rangle$$

Para isto faremos a divisão do operador de campo:

$$\phi_I = \phi_I^+(x) + \phi_I^-(x) \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi_I^+(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} a_{\vec{p}} e^{-i p \cdot x} \\ \phi_I^-(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} a_{\vec{p}}^\dagger e^{+i p \cdot x} \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} x^0 = t - t_0 \\ p^0 = E_p \\ x^0 = t - t_0 \\ p^0 = E_p \end{array} \right.$$

(eq. 12.2)

pg 10

$$\phi_I(x) = e^{i H_0(t-t_0)} \phi(t_0, \vec{x}) e^{-i H_0(t-t_0)}$$

$$\phi_I(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_{\vec{p}} e^{i p \cdot x} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i p \cdot x})$$

$$e^{i H_0(t-t_0)} \hat{a}_{\vec{p}} e^{-i H_0(t-t_0)} = \hat{a}_{\vec{p}} e^{-i E_p(t-t_0)}$$

$$e^{i H_0(t-t_0)} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{-i H_0(t-t_0)} = \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{+i E_p(t-t_0)}$$

De forma que:

$$\phi_I^+ | 0 \rangle = 0 = \langle 0 | \phi_I^-$$

(eq. 12.3)

Definiremos também uma nova notação para o produto normal:  $:\mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n: \equiv N[\mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n]$

Imagine que  $x^0 > y^0$

$$T \{ \phi_I(x) \phi_I(y) \} = \phi_I^+(x) \phi_I^+(y) + \phi_I^-(x) \phi_I^-(y) + \phi_I^+(x) \phi_I^-(y) + \phi_I^-(x) \phi_I^+(y) =$$