

Esta expressão é trivialmente generalizada para um número arbitrário de operadores:

$$\langle \Omega | T \{ \mathcal{O}_H(x_1) \dots \mathcal{O}_H(x_n) \} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \{ \mathcal{O}_I(x_1) \dots \mathcal{O}_I(x_n) \text{Exp} \left[-i \int_{-T}^T dt H_{\text{int}}(t) \right] \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \{ \text{Exp} \left[-i \int_{-T}^T dt H_{\text{int}}(t) \right] \} | 0 \rangle}$$

(eq. 12.1)

Teorema de Wick

Na prática, obter $\langle \Omega | T \{ \mathcal{O}_H(x_1) \dots \mathcal{O}_H(x_n) \} | \Omega \rangle$ envolve calcular:

$$\langle 0 | T \{ \mathcal{O}_I(x_1) \dots \mathcal{O}_I(x_n) \left(\int_{-T}^T dt H_{\text{int}}(t) \right)^m \} | 0 \rangle$$

→ pode parecer que teremos que calcular infinitos elementos deste tipo, para todos n's. Isto é verdade para o resultado exato. Mas veremos que, em teoria de perturbação, poderemos truncar a expansão da exponencial

Como tanto os operadores $\mathcal{O}_I(x)$ quanto o Hamiltoniano de interação são produtos de campos, este problema se reduz a calcular elementos de matriz do tipo:

$$\langle 0 | T \{ \phi_I(x_1) \dots \phi_I(x_n) \} | 0 \rangle$$

Para isto faremos a divisão do operador de campo:

$$\phi_I = \phi_I^+(x) + \phi_I^-(x) \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi_I^+(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} a_{\vec{p}} e^{-i p x} \\ \phi_I^-(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} a_{\vec{p}}^\dagger e^{+i p x} \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} x^0 = t - t_0 \\ p^0 = E_p \\ x^0 = t - t_0 \\ p^0 = E_p \end{array} \right.$$

pg 10

$$\phi_I(x) = e^{i H_0(t-t_0)} \phi(t_0, \vec{x}) e^{-i H_0(t-t_0)}$$

$$\phi_I(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_{\vec{p}} e^{i p x} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i p x})$$

$$e^{i H_0(t-t_0)} \hat{a}_{\vec{p}} e^{-i H_0(t-t_0)} = \hat{a}_{\vec{p}} e^{-i E_p(t-t_0)}$$

$$e^{i H_0(t-t_0)} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{-i H_0(t-t_0)} = \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{+i E_p(t-t_0)}$$

De forma que:

$$\phi_I^+ | 0 \rangle = 0 = \langle 0 | \phi_I^-$$

(eq. 12.3)

Definiremos também uma nova notação para o produto normal: $:\mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n: \equiv N[\mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n]$

Imagine que $x^0 > y^0$

$$T \{ \phi_I(x) \phi_I(y) \} = \phi_I^+(x) \phi_I^+(y) + \phi_I^-(x) \phi_I^-(y) + \phi_I^+(x) \phi_I^-(y) + \phi_I^-(x) \phi_I^+(y) =$$

$$= \underbrace{\phi_{\mathbb{I}}^+(x)\phi_{\mathbb{I}}^+(y) + \phi_{\mathbb{I}}^-(x)\phi_{\mathbb{I}}^-(y)}_{\text{estão normal. ordenados}} + [\phi_{\mathbb{I}}^+(x), \phi_{\mathbb{I}}^-(y)] + \underbrace{\phi_{\mathbb{I}}^-(y)\phi_{\mathbb{I}}^+(x) + \phi_{\mathbb{I}}^-(x)\phi_{\mathbb{I}}^+(y)}_{\text{estão normal. ordenados}} =$$

$$\mathcal{T}\{\phi_{\mathbb{I}}(x)\phi_{\mathbb{I}}(y)\} = \mathcal{N}[\phi_{\mathbb{I}}(x)\phi_{\mathbb{I}}(y)] + [\phi_{\mathbb{I}}^+(x), \phi_{\mathbb{I}}^-(y)] \quad x^0 > y^0 \quad (\text{eq. 13.1})$$

Poderia ter feito o mesmo para $y^0 > x^0$ e obteríamos:

$$\mathcal{T}\{\phi_{\mathbb{I}}(x)\phi_{\mathbb{I}}(y)\} = \mathcal{N}[\phi_{\mathbb{I}}(x)\phi_{\mathbb{I}}(y)] + [\phi_{\mathbb{I}}^+(y), \phi_{\mathbb{I}}^-(x)] \quad y^0 > x^0 \quad (\text{eq. 13.2})$$

SIMÉTRICO

Definimos a **contração**:

$$\overbrace{\phi_{\mathbb{I}}(x)\phi_{\mathbb{I}}(y)} \equiv \begin{cases} [\phi_{\mathbb{I}}^+(x), \phi_{\mathbb{I}}^-(y)] & x^0 > y^0 \\ [\phi_{\mathbb{I}}^+(y), \phi_{\mathbb{I}}^-(x)] & y^0 > x^0 \end{cases} \quad (\text{eq. 13.3})$$

Notem que como o comutador é um número, podemos fazer:

$$[\phi_{\mathbb{I}}^+(x), \phi_{\mathbb{I}}^-(y)] \langle 0|0 \rangle = \langle 0| \phi_{\mathbb{I}}^+ \phi_{\mathbb{I}}^- - \phi_{\mathbb{I}}^- \phi_{\mathbb{I}}^+ |0 \rangle = \langle 0| \phi_{\mathbb{I}}^+ \phi_{\mathbb{I}}^- |0 \rangle = D(x-y)$$

$$[\phi_{\mathbb{I}}^+(x), \phi_{\mathbb{I}}^-(y)] = D(y-x)$$

Isso quer dizer que (pg 68 de QFTI-2017):

$$\overbrace{\phi_{\mathbb{I}}(x)\phi_{\mathbb{I}}(y)} = D_F(x-y) \quad (\text{eq. 13.4})$$

Pelo mesmo motivo posso incluí-lo no ordenamento normal:

$$\mathcal{T}\{\phi_{\mathbb{I}}(x)\phi_{\mathbb{I}}(y)\} = \mathcal{N}[\phi_{\mathbb{I}}(x)\phi_{\mathbb{I}}(y) + \overbrace{\phi_{\mathbb{I}}(x)\phi_{\mathbb{I}}(y)}] \quad (\text{eq. 13.5})$$

A generalização desta relação para um número m de campos é chamada de **Teorema de Wick** e é dada por:

$$\mathcal{T}\{\phi_{\mathbb{I}}(x_1) \dots \phi_{\mathbb{I}}(x_m)\} = \mathcal{N}[\phi_{\mathbb{I}}(x_1) \dots \phi_{\mathbb{I}}(x_m) + \text{todas as contrações possíveis}]$$

Veja que "todas contrações possíveis" inclui contrações parciais:

$$T\{\underbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4}_{\phi_{\pm}(x_i)}\} = + \dots + \underbrace{N[\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4]}_{\mathcal{D}_F(x_1 - x_3) N[\phi_2 \phi_4]} + \dots + \underbrace{N[\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4]}_{\mathcal{D}_F(x_1 - x_3) \mathcal{D}_F(x_2 - x_4)}$$

Em que o teorema de Wick nos ajuda? Note que o que queremos calcular é:

$$\langle 0 | T\{\phi_1 \dots \phi_n\} | 0 \rangle = \langle 0 | N[\phi_1 \dots \phi_n + \text{CONTRAÇÕES}] | 0 \rangle$$

Neste caso, qualquer produto normal que sobre depois da aplicação do teorema dá zero. Ex:

$$\langle 0 | N[\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4] | 0 \rangle = 0$$

$$\langle 0 | \mathcal{D}_F(x_1 - x_3) N[\phi_2 \phi_4] | 0 \rangle = \mathcal{D}_F(x_1 - x_3) \langle 0 | N[\phi_2 \phi_4] | 0 \rangle = 0$$

$$\langle 0 | 0 \rangle \mathcal{D}_F(x_1 - x_3) \mathcal{D}_F(x_2 - x_4) \neq 0$$

$$\langle 0 | T\{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4\} | 0 \rangle = \mathcal{D}_F(x_1 - x_2) \mathcal{D}_F(x_3 - x_4) + \mathcal{D}_F(x_1 - x_3) \mathcal{D}_F(x_2 - x_4) + \mathcal{D}_F(x_1 - x_4) \mathcal{D}_F(x_2 - x_3)$$

A prova do teorema de Wick é feita por indução. Nós provamos o caso com dois campos, é possível provar o para 3 campos usando o de 2 campos, e então o passo n sabendo que o n-1 vale. Isto fica como exercício.

Regras de Feynman para $\lambda\phi^4$

(Peskin 4.4)

Voltemos agora para a eq. 12.1:

$$\langle \Omega | T\{\phi(x_1) \dots \phi(x_n)\} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{1}{N} \langle 0 | T\{\phi_{\pm}(x_1) \dots \phi_{\pm}(x_n) \text{Exp}[-i \int_{-T}^T dt H_{\text{int}}(t)]\} | 0 \rangle$$

denominador no lado direito de 12.1

E vamos assumir que $\langle H_1 \rangle$ é (em todos os sentidos) pequeno.

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \hat{H}_1 = \lambda \hat{\mathcal{O}}(\phi) \quad \Rightarrow \quad \langle \hat{H}_1 \rangle &= \lambda \langle \hat{\mathcal{O}}(\phi) \rangle \quad \Rightarrow \quad \langle \hat{H}_1^2 \rangle \ll \langle \hat{H}_1 \rangle \ll \langle \hat{1} \rangle \\ \hookrightarrow \lambda \sim 0 \quad \langle \hat{H}_1^2 \rangle &= \lambda^2 \langle \hat{\mathcal{O}}(\phi)^2 \rangle \quad \langle \phi_1 \dots \phi_n \hat{H}_1^2 \rangle \ll \langle \phi_1 \dots \phi_n \hat{H}_1 \rangle \ll \langle \phi_1 \dots \phi_n \rangle \end{aligned}$$

Neste caso podemos calcular o produto temporalmente ordenado em uma **aproximação perturbativa**, expandindo as exponenciais em H_1 , e tomando tantos termos quantos necessários (dependendo da precisão necessária):

$$\langle \Omega | T\{\phi(x_1) \dots \phi(x_n)\} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{1}{N} \left\{ \langle 0 | T\{\phi_{\pm}(x_1) \dots \phi_{\pm}(x_n)\} | 0 \rangle + \right.$$

$$+ \langle 0 | T \{ \underbrace{\phi_1(x_1) \dots \phi_n(x_n)}_{\mathcal{O}(\lambda)} \underbrace{\left(-i \int_{-T}^T dt H_{\text{int}}(t) \right)}_{\text{"inserções de } H_{\text{int}}"} \} | 0 \rangle + \langle 0 | T \{ \underbrace{\phi_1(x_1) \dots \phi_n(x_n)}_{\mathcal{O}(\lambda^2)} \underbrace{\left(-i \int_{-T}^T dt H_{\text{int}}(t) \right)^2}_{\text{"inserções de } H_{\text{int}}"} \} | 0 \rangle + \dots$$

Analisando o produto de quatro campos: $\langle \Omega | T \{ \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \} | \Omega \rangle$

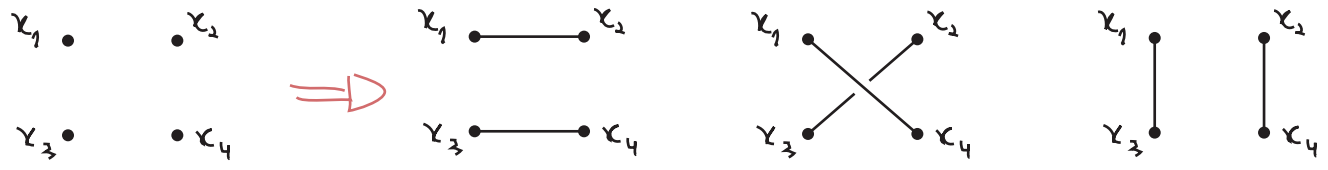
$$\phi_i = \phi_{\text{int}}(x_i)$$

temos em ordem 0 de perturbação (que de fato é a teoria livre):

$\mathcal{O}(\lambda^0)$

$$\langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \} | 0 \rangle = \underbrace{D_F(x_1 - x_2) D_F(x_3 - x_4)}_{\text{Wick}} + D_F(x_1 - x_3) D_F(x_2 - x_4) + D_F(x_1 - x_4) D_F(x_2 - x_3) + \dots$$

Este tipo de lógica combinatória imposta pelo teorema de Wick pode ser enormemente agilizada e sistematizada usando um recurso gráfico que ganhou o nome de **Diagramas de Feynman**. No caso simples acima (onde o ganho de usar grafos não é evidente, mas avançaremos rapidamente para casos mais complicados, onde o ganho é enorme), temos quatro pontos no espaço-tempo e os conectamos de todas as formas possíveis:



$$\boxed{x_1 \text{ --- } x_2} \equiv D_F(x_1 - x_2) \quad \text{Propagador} \quad (\text{eq. 15.1})$$

Lembrando também que podemos interpretar $\phi(x_1)|0\rangle$ como a criação de uma partícula em x_1 e $\langle 0|\phi(x_2)$ como a aniquilação de uma partícula em x_2 , e que o propagador de Feynman dá conta de todas as possibilidades de ordenamentos temporais, é comum "ler" o diagrama do propagador com esta imagem física em mente: a partícula foi criada em x_1 (x_2) e aniquilada em x_2 (x_1) (ela não é perfeita, no entanto, como veremos mais adiante).

Considere agora o produto de dois campos: $\langle \Omega | T \{ \phi_1 \phi_2 \} | \Omega \rangle$

o primeiro termo é trivial:

$\mathcal{O}(\lambda^0)$

$$\langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 \} | 0 \rangle = x_1 \text{ --- } x_2$$

e o segundo (primeira correção perturbativa) é dado por:

$\mathcal{O}(\lambda^1)$

$$\langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 \left(-i \int dt H_{\text{int}}(t) \right) \} | 0 \rangle$$

$$H_{\text{int}}(t) = \int d^3x \mathcal{H}_{\text{int}}(x)$$

Tomemos uma interação específica, conhecida com **Teoria $\lambda\phi^4$** : $\mathcal{H}_{\text{int}} = \frac{\lambda}{4!} \phi^4$

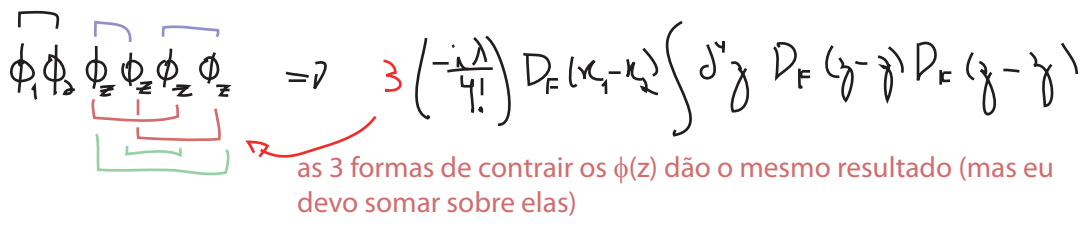
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\nu \phi \partial^\nu \phi - \frac{m^2 \phi^2}{2} - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \iff \mathcal{L} = \mathcal{L}(\chi)$$

$$\int dt H_{I, \mathbb{R}} = \int dt \int d^3 z \mathcal{H}_{I, \mathbb{R}}(z) = \int d^4 z \frac{\lambda}{4!} \phi_{\mathbb{R}}(z) \phi_{\mathbb{R}}(z) \phi_{\mathbb{R}}(z) \phi_{\mathbb{R}}(z) \leftarrow \text{ todos no mesmo ponto}$$

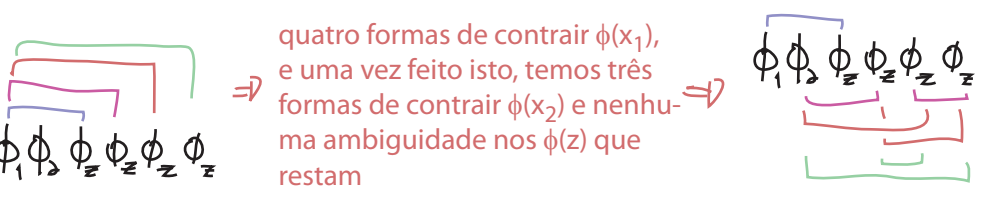
$$\langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 (-i \int dt H_{I, \mathbb{R}}(t)) \} | 0 \rangle = -\frac{i\lambda}{4!} \int d^4 z \langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 \phi_z \phi_z \phi_z \phi_z \} | 0 \rangle$$

Temos que fazer todas as contrações possíveis destes 6 campos, e dividimos isto em dois casos:

- (1) contraímos $\phi(x_1)$ com $\phi(x_2)$ e os $\phi(z)$ só entre si.
- (2) contraímos $\phi(x_1)$ com um dos $\phi(z)$ e $\phi(x_2)$ com outro (os dois $\phi(z)$ que restam são contraídos entre si).

(1) \Rightarrow 

$$\Rightarrow 3 \left(-\frac{i\lambda}{4!} \right) D_F(x_1 - x_2) \int d^4 z D_F(z - z) D_F(z - z)$$

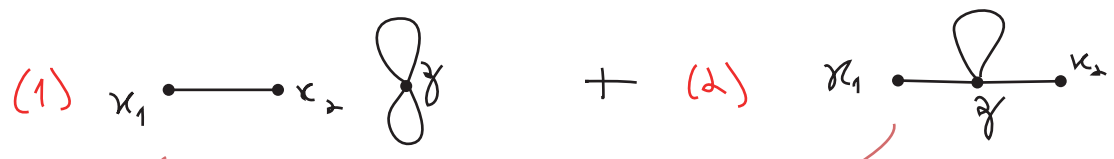
(2) \Rightarrow 

$$\therefore 4 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{i\lambda}{4!} \right) \int d^4 z D_F(x_1 - z) D_F(x_2 - z) D_F(z - z)$$

$$\langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 (-i \int dt H_{I, \mathbb{R}}(t)) \} | 0 \rangle = 3 \left(-\frac{i\lambda}{4!} \right) D_F(x_1 - x_2) \int d^4 z D_F(z - z) D_F(z - z) + 12 \left(-\frac{i\lambda}{4!} \right) \int d^4 z D_F(x_1 - z) D_F(x_2 - z) D_F(z - z) \quad (\text{eq. 16.1})$$

A versão diagramática seria:

$x_1 \cdot x_2 \cdot z \cdot z \Rightarrow$ lembrando que temos 4 campos em z logo 4 linhas devem sair/entrar ali



$\leftarrow 3 \left(-\frac{i\lambda}{4!} \right) D_F(x_1 - x_2) \int d^4 z D_F(z - z) D_F(z - z)$ $\leftarrow 12 \left(-\frac{i\lambda}{4!} \right) \int d^4 z D_F(x_1 - z) D_F(x_2 - z) D_F(z - z)$

como advinho estes fatores?!?

Vejam os um caso mais complicado:

$\mathcal{O}(\lambda^3)$

expansão da exponencial

$$\langle 0 | T \left\{ \phi_x \phi_y \left[\frac{1}{3!} (-i \frac{\Delta}{4!})^3 \int d^4z \phi_z \phi_z \phi_z \phi_z \int d^4w \phi_w \phi_w \phi_w \phi_w \int d^4u \phi_u \phi_u \phi_u \phi_u \right] \right\} | 0 \rangle \quad (\text{eq. 17.1})$$

para esta contração (x-z, y-w, z-z, z-w, w-u, w-u, u-u)

$$= \frac{1}{3!} (-i \frac{\Delta}{4!})^3 \int d^4z \int d^4w \int d^4u D_F(x-z) D_F(y-w) D_F(z-z) D_F(z-w) D_F(w-u) D_F(w-u) D_F(u-u) \quad (\text{eq. 17.2})$$

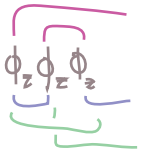
Vamos tentar identificar quantas contrações diferentes poderiam ter levado à mesma expressão 17.2.

Nome dos vértices: 3!

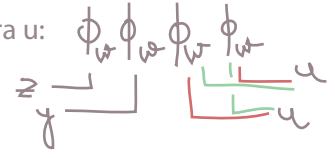
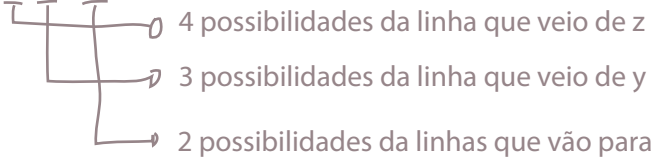
(z, w e u são variáveis mudas. Pense na expressão 17.1: eu poderia ter trocado a ordem de z, w e u sem mudar a posição dos "contratores" e há 3! ordenamentos para w, z e u - zwu, zuw, uzw, uwz, wzu)

Contrações no vértice z: 4·3

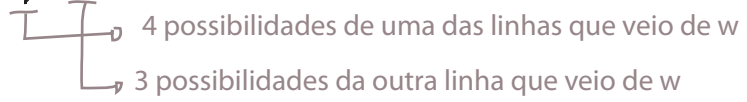
(temos 4 formas de conectar a linha que vem de x. Uma vez feito isto temos três forma de conectar os z's entre si. A linha que sobra vai para w)



Contrações no vértice w: 4·3·2

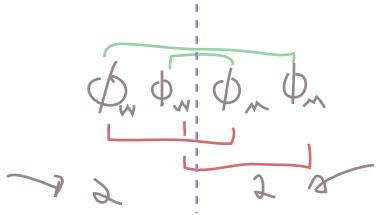


Contrações no vértice u: 4·3



(os dois campos que sobram só tem uma possibilidade)

Dupla contagem w vs. u: 1/2



dupla contagem (acontece sempre que ligo pontos internos com mais de uma linha)

$$3! (4 \cdot 3) (4 \cdot 3 \cdot 2) (4 \cdot 3) \frac{1}{2} = \frac{3! (4!)^3}{8} =$$

De forma que temos 10368 contrações diferentes que levam à mesma expressão 17.2. Note no entanto que este número quase exatamente cancela os fatoriais presentes em 17.2:

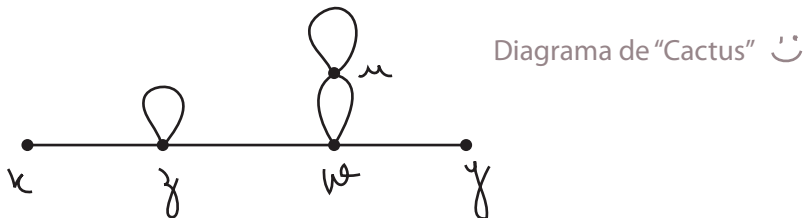
$$\left(\text{Soma sobre todas as contrações} \right) = -\frac{i\lambda}{8} \int d^4z \int d^4w \int d^4\mu D_F(x-z) D_F(y-w) D_F(z-z) D_F(z-w) D_F^2(w-\mu) D_F(\mu-\mu)$$

Este cancelamento não é tão impressionante se pensarmos a respeito:

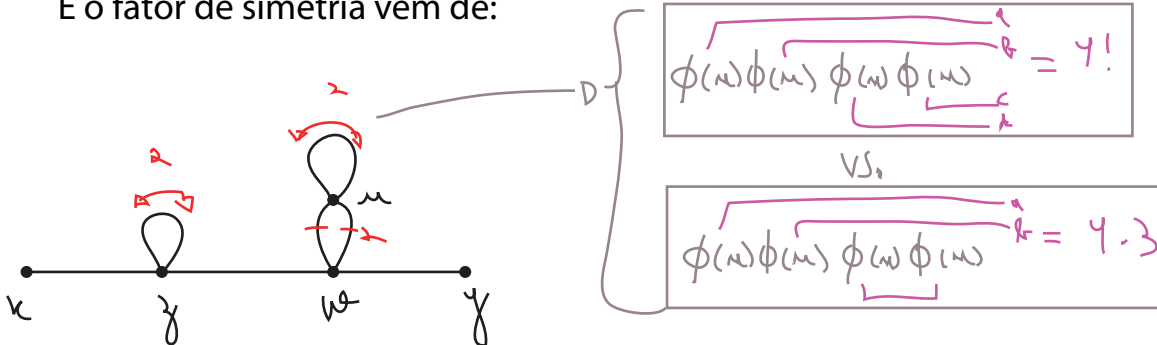
- (1) o fator 3! que vem da troca dos nomes dos pontos internos vai em geral cancelar com o 3! da série de Taylor da exponencial
- (2) cada um destes pontos internos tem 4 linhas saindo, e isso (inocentemente) nos dá um 4! para cada ponto interno, que cancela o 1/4! que está no Hamiltoniano de interação (de fato é por isso que definimos o Hamiltoniano com este 4!).

O ponto (2) acima não é totalmente verdade, **por conta das duplas contagens** e é isso que faz o cancelamento não ser exato e produz aquele "8" que sobrou no final. Isso quer dizer que simplesmente ignorando o 3! da série e os 4! do Hamiltoniano faremos uma sobrecontagem - que devemos dividir por um fator que dê conta das duplas contagens. Este fator que sobra é chamado de **Fator de Simetria** do diagrama e é nele que estamos interessados.

Como vemos este fator direto do diagrama? Baseado nos propagadores podemos desenhar:



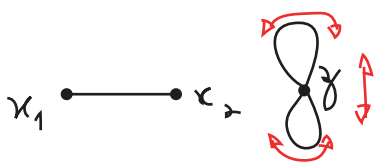
E o fator de simetria vem de:



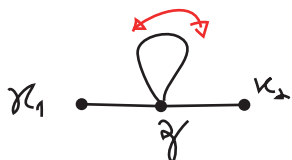
(pode ainda haver uma simetria por equivalência de dois pontos, mas esta não aparece neste diagrama)

$$S = 2 \times 2 \times 2 = 8 \quad \text{Fator de Simetria}$$

Voltando aos fatores da expressão 16.1:



$$S = 8 \Rightarrow -\frac{i\lambda}{8} D_F(x_1-x_2) \int d^4z D_F(z-z) D_F(z-z)$$



$$S = 2 \Rightarrow -\frac{i\lambda}{2} \int d^4z D_F(x_1-z) D_F(z-z) D_F(z-z)$$

e isto aqui? $e^{-i\int \mathcal{H}} = \frac{-i\lambda}{4!} \int \phi^4$
para cada ponto interno terei um fator deste

O fator que resta vem de estabelecer uma regra para o **vértice** da teoria:

$$\text{Vértice} \quad \left(\text{eq. 19.1} \right)$$

(note que o vértice é este ponto de onde saem 4 linhas, as linhas em si tem regras próprias dadas por 15.1)

E como este vértice é um ponto "interno" do diagrama, ele também contribui com uma integral em z . Para cada vértice no diagrama vai entrar um fator $(-i\lambda)$ e farei uma integral. Com isso, temos um conjunto de regras **para esta teoria** (campo escalar real com interação ϕ^4) que nos permite transformar um diagrama em uma expressão analítica:

- (1) para cada propagador: $x_1 \text{---} x_2 = D_F(x_1 - x_2)$
- (2) para cada vértice: $= (-i\lambda) \int d^4z$
- (3) para cada ponto externo: $x_1 \text{---} = 1$ (isto é trivial aqui, mas não será assim na versão final das regras)
- (4) divida tudo pelo fator de simetria

Regras de Feynman (para func. de Green) de $\lambda\phi^4$ no espaço das posições (eq. 19.2)

Mais alguns exemplos:

$$= \frac{(-i\lambda)^2}{3!} \int d^4z_1 \int d^4z_2 D_F(x_1 - z_1) D_F(x_2 - z_2) D_F^3(z_1 - z_2)$$

↳ 3! trocas de linhas

$$= \frac{(-i\lambda)^3}{3! \cdot 2} \int d^4z_1 d^4z_2 d^4z_3 D_F(x_1 - z_1) D_F(x_2 - z_2) D_F(z_1 - z_2) D_F(z_1 - z_3) D_F^3(z_2 - z_3)$$

$S = 3! \cdot 2$

Notando finalmente que para calcular uma dada função de n pontos, temos que somar sobre todos os diagramas possíveis até um certa ordem perturbativa:

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 - i\epsilon)} \frac{1}{N} \left\{ \underbrace{\text{---}}_{\mathcal{O}(\lambda^0)} + \underbrace{\text{---} \text{---}}_{\mathcal{O}(\lambda^1)} + \underbrace{\text{---} \text{---} \text{---}}_{\mathcal{O}(\lambda^2)} + \dots \right\}$$

Em geral estamos interessados em calcular estes elementos no espaço dos momentos, não da posição, então é bem útil escrever as regras de Feynman também para os momentos. Note que:

TQC I - 2017 eq. 67.1 $\Rightarrow D_F(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \underbrace{\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}}_{D_F(p)} e^{-ip(x-y)}$

note que podia ser (y-x) pois o sinal de p é arbitrário, a escolha é feita por consistência com as linhas externas. Da forma que está escrito o momento vai de y para x (veja no fim da pg 21)

e:

$$\langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \} | 0 \rangle = \theta(z_3 > z_1 > z_2) \langle 0 | \phi_3 \phi_4 \phi_1 \phi_2 | 0 \rangle + \dots$$

outros ordenamentos temp.

$$\int \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{p_3}}} a_{p_3}^\dagger e^{ip_3 z_3}$$

(eq. 12.2)

De forma que cada elemento no espaço das posições contém uma infinidade de possibilidades no espaço dos momentos

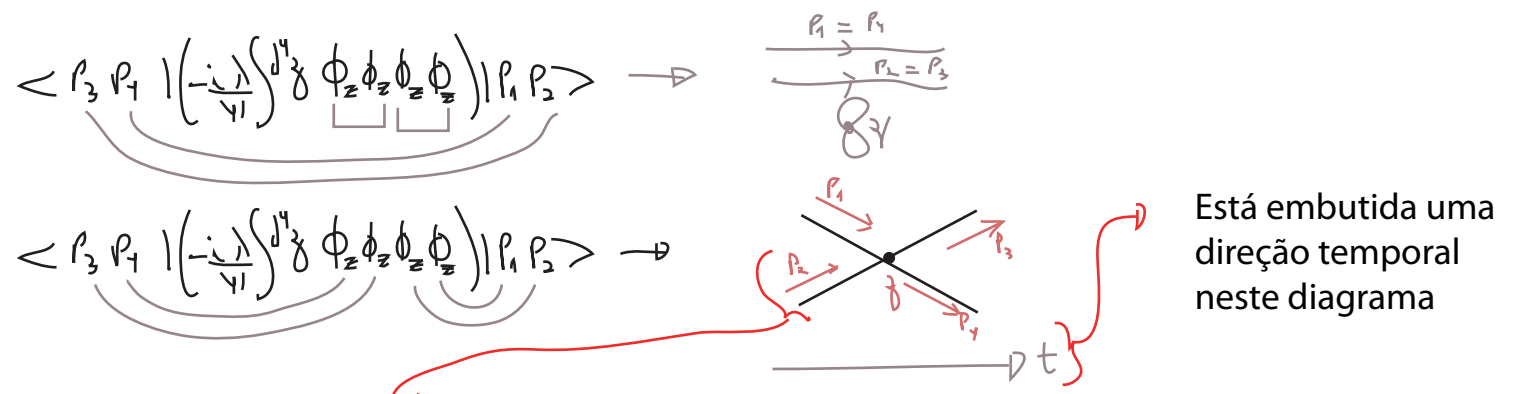
$$\langle 0 | \phi_3 \phi_4 \phi_1 \phi_2 | 0 \rangle \sim \int d^4 p_1 \int d^4 p_2 \int d^4 p_3 \int d^4 p_4 \langle p_3 p_4 | p_1 p_2 \rangle$$

queremos regras para estes (com escolha específica de $p_1 \dots p_4$)

No caso de uma inserção da interação temos:

$$\langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \left(\frac{-i\lambda}{4!} \int d^4 z \phi_z \phi_z \phi_z \phi_z \right) \} | 0 \rangle \sim \dots + \int \langle p_3 p_4 | \left(\frac{-i\lambda}{4!} \int d^4 z \phi_z \phi_z \phi_z \phi_z \right) | p_1 p_2 \rangle$$

de novo há várias possibilidades do que pode ocorrer:



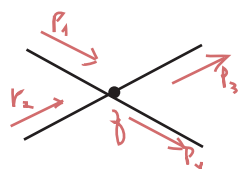
Note que esta linha vem até z de um ponto indeterminado, porque passamos da representação em x_2 para uma em p_2 . Chamamos isto de **linha externa**.

$\phi^+ \phi^+ \phi^+ \phi^- = 0$
assim todos com número diferentes de criações e aniquilações

Suponha que estejamos interessados em:

Então: $\langle p_3 p_4 | (\phi_z^+ + \phi_z^-) (\phi_z^+ + \phi_z^-) (\phi_z^+ + \phi_z^-) (\phi_z^+ + \phi_z^-) | p_1 p_2 \rangle$

aniqu. / cria



4! formas de fazer isto

$$\begin{aligned} \phi_z^+ |P_1\rangle &= \int \frac{d^3 P_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{P_2}}} \underbrace{a_{P_2} e^{-iP_2 z}}_{\text{comut.}} \sqrt{2E_{P_1}} a_{P_1}^+ |0\rangle = \\ &= \int \frac{d^3 P_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{P_2}}} e^{-iP_2 z} \sqrt{2E_{P_1}} (2\pi)^3 \delta(P_2 - P_1) |0\rangle = e^{-iP_1 z} |0\rangle \end{aligned} \quad (\text{eq. 21.1})$$

Da mesma forma:

$$\langle P_3 | \phi_z = \langle 0 | e^{iP_3 z} \quad (\text{eq. 21.2})$$

O que nos mostra que cada linha externa contribuirá com:



Ainda resta a integral em z:

$$\begin{aligned} &= \frac{(-i\lambda)}{4!} \int d^4 z e^{-iP_1 z} e^{-iP_2 z} e^{iP_3 z} e^{iP_4 z} = \\ &= \frac{(-i\lambda)}{4!} (2\pi)^4 \delta^4(P_1 + P_2 - P_3 - P_4) \end{aligned}$$

4! formas de fazer isto

contribuição do vértice (a integração na posição do vértice garantiu conservação de momento no mesmo)

No caso de um diagrama mais complicado:

$$\begin{aligned} &= \langle P_3 P_4 | \underbrace{\left(\frac{-i\lambda}{4!} \int d^4 z_1 \phi_{z_1} \phi_{z_2} \phi_{z_3} \phi_{z_4} \right)}_{4.3} \underbrace{\left(\frac{-i\lambda}{4!} \int d^4 z_1 \phi_{z_1} \phi_{z_2} \phi_{z_3} \phi_{z_4} \right)}_2 | P_1 P_2 \rangle = \\ &= \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int d^4 z_1 d^4 z_2 \int \frac{d^4 k_1 d^4 k_2}{(2\pi)^8} D_F(k_1) D_F(k_2) e^{-i k_1 (z_1 - z_2)} e^{-i k_2 (z_2 - z_1)} e^{-i P_1 z_1} e^{-i P_2 z_1} e^{i P_3 z_2} e^{i P_4 z_2} \end{aligned}$$

fator de simetria

propagadores

linhas externas

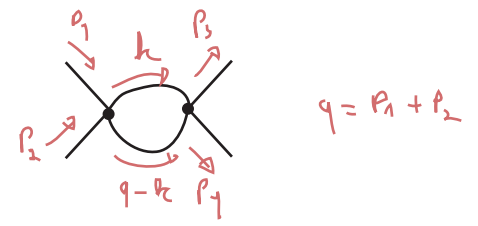
escolho o sinal de k para manter a direção de momento igual a das linhas externas: $Exp[-ik_1 z_2]$ para momento entrando em z_2 e $Exp[ik_1 z_1]$ para momento saindo de z_1 .

$$= \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^4 k_1}{k_1 = k} \int \frac{d^4 k_2}{P_1 + P_2 = q} \delta(+k_2 - (q - k)) D_F(k_1) D_F(k_2)$$

$$= \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int d^4k \delta^4(-k - (q-k) + p_3 + p_4) D_F(k) D_F(q-k) =$$

$$= \frac{(-i\lambda)^2 (2\pi)^4}{2} \delta^4(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D_F(k) D_F(p_1 + p_2 - k)$$

estou escrevendo assim pois logo vamos querer identificar \mathcal{M}



Podemos então escrever as regras para obter diretamente a expressão no espaço dos momentos (que não é da função de Green $G_n(x_1, \dots, x_n)$, nem de sua transformada de Fourier $\tilde{G}_n(p_1, \dots, p_n)$ mas sim para elementos do tipo $\langle p_1, p_2, \dots | p_3, p_4, \dots \rangle$)

- (1) para cada propagador de momento p: = $D_F(p) = \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$
- (2) para cada vértice: = $-i\lambda$
- (3) para linha externa: = 1
- (4) imponha conservação de momento em cada vértice (re-escrevendo os momentos internos)
- (5) integre sobre cada momento não determinado: $\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$
- (6) divida pelo fator de simetria
- (7) multiplique por: $(2\pi)^4 \delta^4(\sum p_\alpha)$ momentos externos

Regras de Feynman para $\langle p_1, p_2, \dots | p_3, p_4, \dots \rangle$ de $\lambda\phi^4$ no espaço dos momentos (eq. 22.1)

Mais alguns exemplos:

$$\text{Self-energy diagram} = (2\pi)^4 \delta(p_1 - p_2) \frac{(-i\lambda)}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D_F(k)$$

$$\text{Vertex correction diagram} \Rightarrow (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D_F(k) D_F(q-k)$$

$q = p_1 - p_3$

Conservação nos vértices: $\left. \begin{aligned} p_1 &= p_3 + k_2 + k \\ p_2 + k_2 + k_1 &= p_4 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} p_1 - p_3 &= q = p_1 - p_3 = k_2 + k \\ k_2 &= q - k \end{aligned}$