

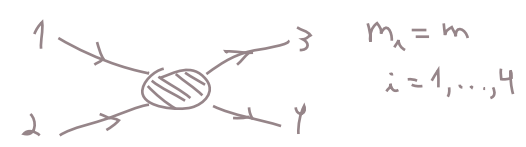
Se todas as partículas tiverem massas idênticas, então:

$$E_A = E_B = E_{cm}/2 \quad |\vec{p}_A| = |\vec{p}_B| = |\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = |\vec{p}|$$

$$E_A E_B / |v_A - v_B| = |E_A p_B - p_A E_B| = E_{cm} |\vec{p}|$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{cm} = \frac{|M|^2}{64 \pi^2 E_{cm}^2} \quad (\text{eq. 39.1})$$

Espalhamento com quatro estados de massa idêntica



Decaimento

Também podemos especializar as contas acima para o caso de uma partícula inicial decaindo (o caso $1 \rightarrow n$), basta voltar na eq. 35.2 e remover todas as integrais em k_B e \bar{k}_B (além do parâmetro de impacto):

$$d\Gamma = \left(\prod \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 dE_f} \right) \int \frac{d^3 k_A}{(2\pi)^3} \frac{\phi_A(\vec{k}_A)}{\sqrt{2E_A}} \int \frac{d^3 \bar{k}_A}{(2\pi)^3} \frac{\phi_A^*(\vec{k}_A)}{\sqrt{2E_A}} \langle \{p_f\} | \{k_A\} \rangle_{OUT} \langle \{p_f\} | \{\bar{k}_A\} \rangle_{IN}^*$$

o que significa que obteremos:

$$\int d^3 \bar{k}_A \delta(\vec{k}_A - \sum p_f) \delta(E_A - \sum E_f) = \delta(\vec{k}_A - \sum p_f) \delta(E_A - \sum E_f) \Big|_{\vec{k}_A = \sum p_f} \quad (\text{o que também implicará: } \vec{k}_A = \vec{k}_A, E_A = E_A)$$

ao invés do fator $|v_A - v_B|$ obtido na pg 36. Esta é de fato a única mudança. Assumindo de novo que o estado inicial é um pacote estreito e indo para o referencial do centro de massa (que neste caso coincide com o referencial de repouso da partícula inicial, que é onde definimos Γ de qualquer forma):

$$d\Gamma = \frac{1}{2m_A} \left(\prod \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 dE_f} \right) |M(m_A \rightarrow \{p_f\})|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A - \sum p_f) \quad (\text{eq. 39.2})$$

Aonde cabe a ressalva de que, uma vez que não é possível pensar em uma partícula INSTÁVEL no passado infinito, o que estamos assumindo aqui é que o tempo da vida τ , é tal que:

$$\tau \gg T \quad \Downarrow \quad \Delta E \simeq \frac{1}{T} \gg \frac{1}{\tau}$$

tempo que mandamos para infinito } lembrando que estas duas grandezas estão ligadas pelo princípio da incerteza
 energia total envolvida (neste caso ~ massa)

ou seja, quando a largura é pequena em relação a massa (estado estreito) ou de vida longa.

Diagramas de Feynman para a Matriz S

(Peskin 4.6)

Finalmente podemos coletar tudo que aprendemos com as funções de Green e obter um conjunto de regras sucinto para o cálculo da matriz S incluindo agora as correções de ordem superior na teoria de perturbação. Partindo de (33.1 e 33.2):

$$\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \dots | S | \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \dots | e^{-iH(\Delta T)} | \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle$$

(eq. 40.1)

Queremos os estados da teoria livre, vimos que (eq. 9.1):

$$|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \left(e^{-i\tilde{E}_0 T} |\Omega\rangle \right)^{-1} e^{-iHT} |0\rangle$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \left(e^{-i\tilde{E}_0 T} |\Omega\rangle \right)^{-1} U_I(0, -T) |0\rangle$$

Faremos agora:

$$|\vec{k}_A \vec{k}_B\rangle \propto \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} e^{-iHT} |\vec{k}_A \vec{k}_B\rangle_0$$

↳ estado livre, mas não é o vácuo

(estamos deixando a constante de proporcionalidade em aberto, pois ela pode ser bem complicada)

O lado direito de 40.1 fica:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \dots | e^{-iH(\Delta T)} | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle \propto \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \dots | e^{-iH(\Delta T)} U_I(T, -T) | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 =$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \dots | T \left\{ \text{EXP} \left[-i \int_{-T}^T dt H_I(t) \right] \right\} | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0$$

$$\therefore S_{fi} \propto \langle f | U_I(+\infty, -\infty) | i \rangle$$

No caso das funções de Green a constante de proporcionalidade se cancela usando a normalização (passagem entre as eqs. 11.1 e 11.2) e aqui acontece o mesmo. Provar isso envolve provar a fórmula LSZ e não faremos isso neste curso. O resultado obtido fazendo a normalização correta e usando a fórmula de LSZ é dado por:

↳ curioso? Veja as notas de TQCII (2016), pgs 93 a 98

$$\langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n | i T | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle = (\sqrt{Z})^{n+1} \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \left(\langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n | T \left(\text{EXP} \left[-i \int_{-T}^T dt H_I(t) \right] \right) | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 \right)$$

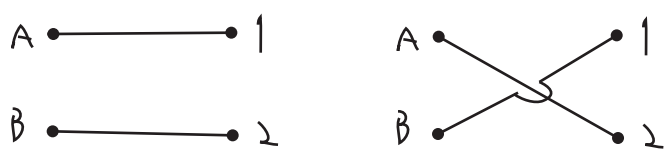
conectado amputado

(eq. 40.2)

Na equação 40.2 obtemos iT ao invés de S , pois a fórmula de LSZ só nos fornece estados conectados em que o estado inicial e final são diferentes. Ainda resta entender o que "amputado" quer dizer. Lembrando que $Z = 1$ a nível árvore, vejamos alguns exemplos:

$2 \rightarrow 2$ $\mathcal{O}(\lambda^0)$ o lado direito de 40.2 fica:

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 &\equiv \sqrt{2E_A 2E_B 2E_1 2E_2} \langle 0 | a_1 a_2 a_A^\dagger a_B^\dagger | 0 \rangle = \\ &= 2E_A 2E_B (2\pi)^4 \left[\delta^{(3)}(\vec{p}_A - \vec{p}_1) \delta^{(3)}(\vec{p}_B - \vec{p}_2) + \delta^{(3)}(\vec{p}_A - \vec{p}_2) \delta^{(3)}(\vec{p}_B - \vec{p}_1) \right] \end{aligned}$$



Desconectados (não são incluídos)
contribuem para a parte 1 de $S = 1 + iT$

$2 \rightarrow 2$ $\mathcal{O}(\lambda^1)$

$$\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | T \left\{ -i \frac{\lambda}{4!} \int d^4x \phi^4(x) \right\} | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 = \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | N \left\{ -i \frac{\lambda}{4!} \int d^4x \phi^4(x) + \text{contr.} \right\} | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 \quad (\text{eq. 41.1})$$

Teorema de Wick

Os ordenamentos normais não contraídos não somem.

Já vimos que (pág 21): $\underbrace{\phi^+}_{\text{agindo para a direita}} | \vec{p} \rangle_0 = e^{-i p x} | 0 \rangle$; $\langle \vec{p} | \underbrace{\phi^-}_{\text{agindo para a esquerda}} = \langle 0 | e^{i p x}$

dentro de $\langle \dots | N(\phi^N) | \dots \rangle = \langle \dots | (\phi^-)^n (\phi^+)^{N-n} | \dots \rangle$, $n = 0, \dots, N$, temos os ϕ^+ agindo para a direita e os ϕ^- agindo para a esquerda. Definimos então:

no exemplo em questão como temos 2 estados iniciais e 2 finais, o único termo que vai ser diferente de zero é $n=2$ ($N=4$)

Em 41.1 temos termos do tipo: $\phi\phi\phi\phi$, $\phi\phi\phi\phi$, $\phi\phi\phi\phi$

O último termo não passa de um diagrama desconectado acompanhado de bolhas no vácuo:

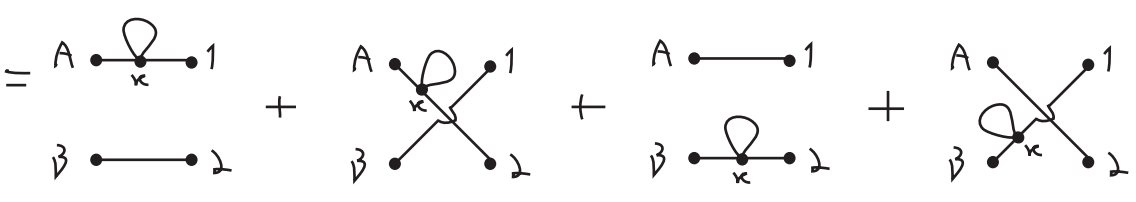
$$-i \frac{\lambda}{4!} \int d^4x \phi\phi\phi\phi \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 = 0 \times \left(\begin{array}{c} A \text{---} 1 \\ B \text{---} 2 \end{array} \quad \begin{array}{c} A \text{---} 1 \\ B \text{---} 2 \end{array} \right)$$

O segundo termo, com apenas uma contração, nos dá o seguinte:

$$-i \frac{\lambda}{4!} \int d^4x \ 2 \phi \phi \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | \phi^- \phi^+ | \vec{p}_a \vec{p}_b \rangle_0 =$$

$\langle \phi^+ \phi^+ \rangle = \langle \phi^- \phi^- \rangle = 0$

quatro diagramas



Desconectados (não são incluídos)

Finalmente, no termo sem nenhuma contração somos obrigados a contrair todos os campos com os estados assintóticos:

$$\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | \phi^- \phi^- \phi^+ \phi^+ | \vec{p}_a \vec{p}_b \rangle_0 = 4! e^{i(p_a + p_b - p_1 - p_2)x}$$

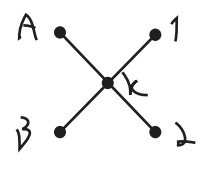
várias formas de fazer, mas todas com o mesmo resultado

$$\therefore \left(\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | N \left\{ -i \frac{\lambda}{4!} \int d^4x \phi^4(x) + \text{contr.} \right\} | \vec{p}_a \vec{p}_b \rangle_{\text{CONNECT.}} \right) = -i \frac{\lambda}{4!} \int d^4x \ 4! e^{i(p_a + p_b - p_1 - p_2)x} =$$

$$= -i \lambda (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_a + p_b - p_1 - p_2)$$

(eq. 42.1)

que é justamente o que obteríamos com as regras de Feynman para o diagrama:



como $i\mathcal{T} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_a + p_b - p_1 - p_2) i\mathcal{M} \Rightarrow \mathcal{M} = -\lambda$

logo a sessão de choque no centro de massa é: $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = \frac{\lambda^2}{64\pi^2 E_{cm}^2}$ (eq. 42.2)

Como o lado direito não tem qualquer dependência angular, fica fácil integrar em Ω :

$$\sigma_{TOT} = \frac{\lambda^2}{32\pi^2 E_{cm}^2} \quad \left(\int dR = 4\pi \right) \quad \frac{1}{2} \quad (2 \text{ partículas idênticas})$$

(eq. 43.1)

Até aqui nenhuma novidade, mas vejamos o que ocorre com algumas correções.

Até agora só o diagrama conectado contribuiu para esta seção de choque, mas resta a pergunta: todos os diagramas conectados possíveis contribuirão para ela? Vejamos o seguinte diagrama

$$= \frac{1}{2} (-i\lambda) (2\pi)^4 \delta^4(p_B + p_A - p_1 - p_2) (-i\lambda) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D_F(k) D_F(p' = p_B)$$

(sai da integral)

$$= \frac{1}{2} (-i\lambda) (2\pi)^4 \delta^4(p_B + p_A - p_1 - p_2) (-iM_{(1)}^2) \frac{i}{p_B^2 - m^2}$$

zero para partícula on-shell: $p_B^2 = m^2$

(eq. 43.2)

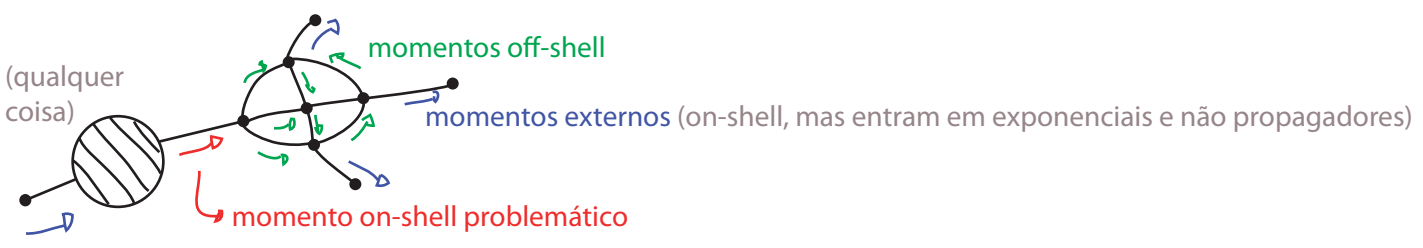
Essa é outra versão do problema que mencionamos pela primeira vez ao fim da página 23, onde obtemos as regras de Feynman no espaço dos momentos e apareceram propagadores para as linhas externas, na última expressão da pag 23 temos:

$$= \frac{\lambda^2}{3!} D_F(p_1) D_F(p_2) (2\pi)^4 \delta^4(p_2 - p_1) \int \frac{d^4p_i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_f}{(2\pi)^4} D_F(p_1 - p_i - p_f) D_F(p_i) D_F(p_f)$$

$\propto \frac{1}{p_i^2 - m^2}$

ambos problemáticos on-shell $p_i^2 = m^2$

Este problema não apareceu no cálculo de 42.1 pois os estados finais e iniciais foram tratados de forma apropriada nas páginas 41 e 42 (por meio da contração dos operadores com os estados assintóticos) e forneceram exponenciais ao invés de propagadores. No entanto este tratamento não resolve o problema para o diagrama em 43.2 pois não é o propagador ligado ao ponto externo que está divergindo, mas sim aquele que envolve p' . Note que, em geral, este problema vai surgir toda vez em que um momento inicial ou final (por definição on-shell) "correr" dentro de alguma linha interna do diagrama. Note que:

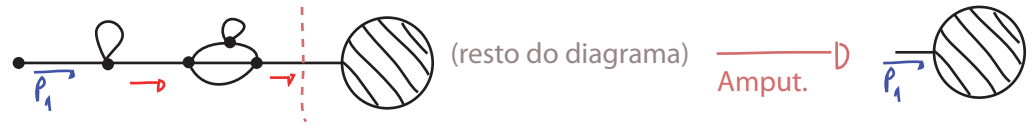


Fica claro que podemos fazer a seguinte separação para n pernas externas:



onde queremos nos livrar dos propagadores em vermelho. Esta operação é chamada de amputar o

diagrama, uma vez que removeremos as pernas externas com TODAS AS SUAS CORREÇÕES, ou seja, o propagador completo. Operacionalmente podemos "seguir" o momento externo e procurar a linha mais distante do ponto externo em que podemos remover a perna cortando apenas um propagador:



É a estes diagramas amputados que nos referimos na eq. 40.2. Felizmente a fórmula de LSZ faz esta "amputação" formalmente, basta notar que (LSZ, eq 34.3):

$$\langle \{P_i\}_n | \{k_j\}_m \rangle_{in} = \lim_{\substack{p_i^2 \rightarrow m_i^2 \\ q_j^2 \rightarrow m_j^2}} \frac{1}{(\sqrt{z'})^{m+n}} \prod_{i=1}^n (p_i^2 - m_i^2 + i\epsilon) \prod_{j=1}^m (k_j^2 - m_j^2 + i\epsilon) \tilde{G}_{n+m}(p_i, k_j)$$

Se encontra multiplicado pelos propagadores completos "problemáticos"

$$G_2(p) \sim \frac{i z}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$$= (\sqrt{z'})^{m+n} \prod_{i=1}^n \left(\frac{p_i^2 - m_i^2 + i\epsilon}{i z} \right) \prod_{j=1}^m \left(\frac{k_j^2 - m_j^2 + i\epsilon}{i z} \right)$$

Inverso do propagador completo! ($\Gamma^{(n)}$)

É por isso que obtemos só os diagramas amputados quando passamos da fórmula de LSZ para a eq. 40.2 e finalmente:

$$i \mathcal{M} (2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_B - \sum P_k) = \left(\sum \text{diagramas conectados e amputados} \right) \times (\sqrt{z'})^{n+2} \quad (\text{eq. 44.1})$$

Regras de Feynman para Férmions

(Peskin 4.7)

Queremos agora generalizar o que fizemos nas últimas páginas (onde tínhamos apenas escalares) para o caso de férmions. A dedução do teorema de Feynman (eq. 11.3) não sofre modificações pois a invariância de Lorentz exige que o Hamiltoniano de interação seja escalar (ou seja, um produto de um número par de campos espinoriais), com isso não há dificuldade adicional em definir as exponenciais ordenadas temporalmente.

$$T \{ H_{1I}(t_1) H_{1I}(t_2) \} = \begin{cases} H_{1I}(t_1) H_{1I}(t_2) & t_1 > t_2 \\ H_{1I}(t_2) H_{1I}(t_1) & t_2 > t_1 \end{cases}$$

mesmo que:

$$H_{1I}(t_1) = \int d^3x \bar{\Psi}(x_1) \Psi(x_1)$$

Temos que ter cuidado, no entanto, quando calculamos os elementos de matriz que aparecem no teorema de Feynman, uma vez que o teorema de Wick sofre uma modificação. Já vimos que no caso de férmions o ordenamento temporal é dado por:

$$T(\psi(x) \bar{\psi}(y)) = \begin{cases} \psi(x) \bar{\psi}(y) & x^0 > y^0 \\ -\bar{\psi}(y) \psi(x) & x^0 < y^0 \end{cases}$$

O que nos permite escrever o propagador:

$$S_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p}+m)}{p^2-m^2+i\epsilon} e^{-ip(x-y)} = \langle 0 | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(y) \} | 0 \rangle$$

Para produtos de mais campos a generalização é a natural, colocamos um sinal para cada vez que precisamos permutar dois operadores até chegar ao ordenamento temporal:

$$\psi(x_n) \equiv \psi_n$$

$$T\{\psi_1 \psi_2 \psi_3 \psi_4\} = (-1)^3 \psi_3 \psi_1 \psi_2 \psi_4$$

\uparrow $x_3^0 > x_1^0 > x_4^0 > x_2^0$

(Handwritten arrows and signs: (-1) for each swap between adjacent operators in the sequence to reach the time-ordered sequence.)

E usamos exatamente a mesma lógica para definir o ordenamento normal, o que deixa todas as formas de escrever o produto normal equivalentes:

$$N(a_p a_q a_r^\dagger) = (-1)^1 a_r^\dagger a_p a_q = (-1)^3 a_r^\dagger a_q a_p$$

(Handwritten arrows and signs: (-1) for each swap to reach the normal ordered sequence.)

ou:

$$N(a_p a_q a_r^\dagger) = (-1)^1 a_r^\dagger a_p a_q = (-1)^3 a_r^\dagger a_q a_p$$

Vamos ver como fica o teorema de Wick para dois campos fermiônicos.

$$T\{\psi(x) \bar{\psi}(y)\} = \psi^+(x) \bar{\psi}^+(y) + \psi^-(x) \bar{\psi}^-(y) + \psi^-(x) \bar{\psi}^+(y) + \psi^+(x) \bar{\psi}^-(y) =$$

$$= \psi^+(x) \bar{\psi}^+(y) + \{\psi^+(x), \bar{\psi}^-(y)\} - \bar{\psi}^-(y) \psi^+(x) + \psi^-(x) \bar{\psi}^+(y) + \psi^-(x) \bar{\psi}^-(y) = N[\psi(x) \bar{\psi}(y)] + \{\psi^+(x), \bar{\psi}^-(y)\}$$

$$T\{\psi(x) \bar{\psi}(y)\}_{x^0 < y^0} = -\bar{\psi}^+(y) \psi^+(x) - \bar{\psi}^-(y) \psi^-(x) - \bar{\psi}^+(y) \psi^-(x) - \bar{\psi}^-(y) \psi^+(x) = N[\psi(x) \bar{\psi}(y)] - \{\bar{\psi}^+(y), \psi^-(x)\} + \psi^-(x) \bar{\psi}^-(y)$$

$$\left. \begin{aligned} \{\psi(x), \psi(y)\} &= 0 \\ \{\bar{\psi}(x), \bar{\psi}(y)\} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} T\{\psi(x) \psi(y)\} = N[\psi(x) \psi(y)] \\ T\{\bar{\psi}(x) \bar{\psi}(y)\} = N[\bar{\psi}(x) \bar{\psi}(y)] \end{cases}$$

Definimos então a contração:

$$\overbrace{\psi(x) \bar{\psi}(y)} \equiv \left\{ \begin{array}{l} \{\psi^+(x), \bar{\psi}^-(y)\} \quad x^0 > y^0 \\ -\{\bar{\psi}^+(y), \psi^-(x)\} \quad x^0 < y^0 \end{array} \right\} = S_F(x-y)$$

$$\overbrace{\psi(x) \psi(y)} = \overbrace{\bar{\psi}(x) \bar{\psi}(y)} = 0$$

$$\mathcal{T}[\psi(x) \bar{\psi}(y)] = N[\psi(x) \bar{\psi}(y)] + \overbrace{\psi(x) \bar{\psi}(y)} \quad (\text{eq. 46.1})$$

Se incluímos também um sinal para permutações de operadores necessárias para contrações dentro do produto normal:

$$N[\psi_1 \overset{(-1)}{\psi_2} \bar{\psi}_3 \bar{\psi}_4] = -\overbrace{\psi_1 \bar{\psi}_3} N[\psi_2 \bar{\psi}_4] = -S_F(x_1 - x_3) N[\psi_2 \bar{\psi}_4]$$

conseguimos escrever o teorema de Wick exatamente como fizemos para os escalares:

$$\mathcal{T}[\psi_1 \bar{\psi}_2 \psi_3 \dots] = N[\psi_1 \bar{\psi}_2 \psi_3 \dots + \text{todas as contrações possíveis}] \quad (\text{eq. 46.2})$$

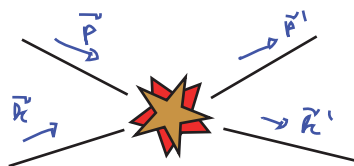
Teoria de Yukawa

Para deduzir as regras de Feynman, vamos usar a interação de Yukawa:

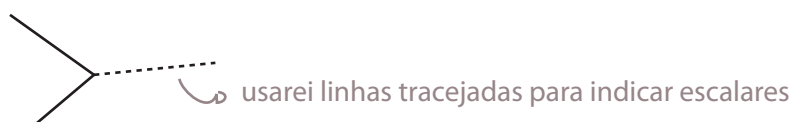
$$H = H_{\text{Dirac}} + H_{\text{K-G}} + \int d^3x \, g \bar{\psi}(x) \psi(x) \phi(x)$$

considere o seguinte espalhamento:

férmion (p) + férmion (k) \longrightarrow férmion (p') + férmion (k')



A interação envolve três campos aplicados no mesmo ponto (sendo dois deles fermiônicos), logo o vértice será algo do tipo:



Um espalhamento de 2 férmions para 2 férmions deve, portanto, envolver pelo menos duas inserções da interação, o termo dominante é de ordem g^2 :

$$\langle \vec{p}', \vec{k}' | T \left\{ \frac{1}{2!} (-i g) \int d^4x (\bar{\Psi}_I \Psi_I \phi_I)(x) (-i g) \int d^4y (\bar{\Psi}_I \Psi_I \phi_I)(y) \right\} | \vec{p}, \vec{k} \rangle_0 \equiv \langle \vec{p}', \vec{k}' | \vec{p}, \vec{k} \rangle_{g^2}$$

Devemos aplicar o teorema de Wick. Como não temos escalares no estado inicial nem no final todos os termos em que não fizermos a contração $\phi_x \phi_y$ serão iguais a zero.

Analogamente, se contraírmos $\bar{\Psi}_x \Psi_y$ ou $\Psi_x \bar{\Psi}_y$ faltarão operadores fermiônicos para agir nos estados iniciais ou finais, levando a elementos de matriz do tipo:

$$\langle \vec{p}', \vec{k}' | \vec{p}, \vec{k} \rangle_0, \langle \vec{p}' | \vec{p} \rangle_0, \langle \vec{p}' | \vec{k} \rangle_0, \dots$$

que não nos interessam (não houve troca de momento entre os estados iniciais). Assim sendo, só nos preocuparemos com contrações do tipo (há duas possibilidades de contração, estamos mostrando apenas uma delas):

$$\langle \vec{p}', \vec{k}' | T \left\{ \frac{1}{2!} (-i g) \int d^4x (\bar{\Psi}_I \Psi_I \phi_I)(x) (-i g) \int d^4y (\bar{\Psi}_I \Psi_I \phi_I)(y) \right\} | \vec{p}, \vec{k} \rangle_0$$

Onde as linhas verdes representam a aplicação do operador no estado:

$$\bar{\Psi}_I(x) | \vec{p}, s \rangle \equiv \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{p'}}} \sum_{s'} a_{\vec{p}'}^{s'} \omega^{s'}(p') e^{-ip'x} \sqrt{2E_p} a_p^{s+} | 0 \rangle =$$

$$\bar{\Psi}_I(x) | \vec{p}, s \rangle = e^{-ipx} \omega^s(p) | \sigma \rangle \quad (\text{eq. 47.1})$$

e analogamente:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_I(x) | \vec{p}, s \rangle &= e^{-ipx} \omega^s(p) | \sigma \rangle \\ \langle \vec{p}, s | \bar{\Psi}_I(x) &= e^{ipx} \omega^s(p) \langle \sigma | \\ \langle \vec{p}, s | \Psi_I(x) &= e^{-ipx} \omega^s(p) \langle \sigma | \end{aligned} \quad (\text{eq. 47.2})$$

outras contrações na parte fermiônica

$$\langle \vec{p}', \vec{k}' | \vec{p}, \vec{k} \rangle_{g^2} = \frac{(-i g)^2}{2} \int d^4x d^4y D_F(x-y) \langle \vec{p}', \vec{k}' | N \left[(\bar{\Psi}_I \Psi_I)(x) (\bar{\Psi}_I \Psi_I)(y) \right] | \vec{p}, \vec{k} \rangle_0 + \dots$$

onde as contrações em verde indicam que de todos os termos possíveis estamos escolhendo o seguinte:

deixemos este sinal em aberto por enquanto

$$N \left[(\bar{\Psi}_I \Psi_I)(x) (\bar{\Psi}_I \Psi_I)(y) \right] = \dots \pm \bar{\Psi}_I^-(x) \Psi_I^-(y) \Psi_I^+(x) \Psi_I^+(y)$$

índices espinoriais

De fato, muitos termos dão zero:

Qualquer termo envolvendo $\psi(x)$ ou $\bar{\psi}^+(x)$ dá zero pois não temos anti-férmions no estado inicial nem final

Qualquer termo com um número ímpar de "+" ou "-" também dá zero.

Além do termo acima temos a seguinte contração:

$$\langle \vec{p}', \vec{k}' | N [(\bar{\Psi}_1 \Psi_1)(x) (\bar{\Psi}_1 \Psi_1)(y)] | \vec{p}, \vec{k} \rangle_0 \quad (\text{note que os dois tem o mesmo sinal})$$

que equivale somente a uma troca de x por y, então:
(há mais duas contrações possíveis, que veremos depois)

$$\langle \vec{p}' \vec{k}' | \vec{p} \vec{k} \rangle_{\vec{q}} = \pm \frac{(-ig)^2}{2} \int d^4x d^4y P_F(x-y) \times$$

$$\times \left\{ e^{i p' y} e^{-i k' x} e^{-i p x} e^{-i k x} \underbrace{\bar{u}(p') \bar{u}(k)}_{\bar{u}(p') u(p) \bar{u}(k') u(k)} + (x \rightleftharpoons y) \right\}$$

$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-i q(x-y)}$

O termo $(x \rightleftharpoons y)$ é portanto idêntico ao primeiro, dando apenas um fator 2.

$$\langle \vec{p}' \vec{k}' | \vec{p} \vec{k} \rangle_{\vec{q}} = \pm (-ig)^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon} (2\pi)^8 \delta^4(-q + k' - k) \delta^4(q + p' - p) \bar{u}(p') u(p) \bar{u}(k') u(k) =$$

$$= (2\pi)^4 \delta^4(p' - p + k' - k) \frac{\pm i g^2}{q^2 - m^2} \bar{u}(p') u(p) \bar{u}(k') u(k)$$

$\rightarrow q$ não é mais a variável de integração, mas sim: $q = p - p' = k' - k$
 \rightarrow como $q^2 \neq m^2$ posso suprimir o "iε"

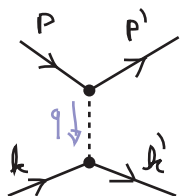
$$\langle \vec{p}' \vec{k}' \dots | \vec{p}, \vec{k} \rangle \equiv (2\pi)^4 \delta^4(k_A + k_B - \sum p_k) i \mathcal{M}(k_A, k_B \rightarrow p_k)$$

Comparando esta expressão com a equação 34.2, vemos que:

$$i \mathcal{M}(\vec{p} \vec{k} \rightarrow \vec{p}' \vec{k}') = \frac{\pm i g^2}{q^2 - m^2} \bar{u}(p') u(p) \bar{u}(k') u(k)$$

(eq. 48.1)

Queremos ver como obter esta mesma expressão a partir do diagrama abaixo:



Os propagadores de férmions e escalares nós já conhecemos:

$$\overbrace{\psi(x)_\alpha \psi(y)_\beta} \Rightarrow \text{diagrama} = \frac{i(\not{p} + m)_{\alpha\beta}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

(importante atentar para índices espinoriais e direção do momento)

$$\overbrace{\phi(x)\phi(y)} \Rightarrow \text{diagrama} = \frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon}$$

(eq. 49.1)

e o vértice ficou bastante óbvio no cálculo acima:

$$\text{diagrama} = -i\gamma$$

(eq. 49.2)

As linhas externas são dadas pelas equações 47.1 e 47.2 e, uma vez que as exponenciais são integradas para obter a conservação de momento, resta apenas:

Linhas externas escalares

$$\overbrace{\phi|q\rangle} \Rightarrow \text{diagrama} = 1 \quad \langle q|\phi \rangle \Rightarrow \text{diagrama} = 1$$

(eq. 49.3)

Linhas externas fermiônicas

$$\overbrace{\psi_\alpha|\vec{p},s\rangle} \Rightarrow \text{diagrama} = u^s(p)_\alpha \quad \langle \vec{p},s|\bar{\psi} \rangle \Rightarrow \text{diagrama} = \bar{u}^s(p)_\alpha$$

$$\overbrace{\bar{\psi}|\vec{p},s\rangle} \Rightarrow \text{diagrama} = \bar{v}^s(p)_\alpha \quad \langle \vec{p},s|\psi \rangle \Rightarrow \text{diagrama} = v^s(p)_\alpha$$

antipartícula

(eq. 49.4)

Diversos detalhes merecem atenção:

(que não foram evidenciados no diagrama que escolhemos para essa primeira olhada nas regras de Feynman para férmions)

O primeiro ponto é notar como as contrações dos índices espinoriais ocorre, ao longo das linhas fermiônicas:

$$\sim \bar{u}(p_3)_\alpha \frac{i(\not{p}_2 + m)_{\alpha\beta}}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i(\not{p}_1 + m)_{\beta\kappa}}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} u(p_0)_\alpha = \bar{u}(p_3)_\alpha \frac{i(\not{p}_2 + m)_{\alpha\beta}}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i(\not{p}_1 + m)_{\beta\kappa}}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} u(p_0)_\alpha$$

$$\sim \bar{v}(p_3)_\alpha \frac{i(\not{p}_2 + m)_{\alpha\beta}}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i(\not{p}_1 + m)_{\beta\kappa}}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} u(p_0)_\alpha = \bar{v}(p_3)_\alpha \frac{i(\not{p}_2 + m)_{\alpha\beta}}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i(\not{p}_1 + m)_{\beta\kappa}}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} u(p_0)_\alpha$$