

Os propagadores de férmions e escalares nós já conhecemos:

$$\overbrace{\psi(x)_\alpha \psi(y)_\beta} \Rightarrow \text{diagrama} = \frac{i(\not{p} + m)_{\alpha\beta}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

(importante atentar para índices espinoriais e direção do momento)

$$\overbrace{\phi(x)\phi(y)} \Rightarrow \text{diagrama} = \frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon}$$

(eq. 49.1)

e o vértice ficou bastante óbvio no cálculo acima:

$$\text{diagrama} = -i\gamma$$

(eq. 49.2)

As linhas externas são dadas pelas equações 47.1 e 47.2 e, uma vez que as exponenciais são integradas para obter a conservação de momento, resta apenas:

Linhas externas escalares

$$\overbrace{\langle \eta | \eta \rangle} \Rightarrow \text{diagrama} = 1 \quad \overbrace{\langle \eta | \phi \rangle} \Rightarrow \text{diagrama} = 1$$

(eq. 49.3)

Linhas externas fermiônicas

$$\overbrace{\psi_\alpha | \vec{p}, s \rangle} \Rightarrow \text{diagrama} = u^\alpha(p)$$

$$\overbrace{\langle \vec{p}, s | \bar{\psi}} \Rightarrow \text{diagrama} = \bar{u}^\alpha(p)$$

$$\overbrace{\bar{\psi} | \vec{p}, s \rangle} \Rightarrow \text{diagrama} = \bar{v}^\alpha(p)$$

$$\overbrace{\langle \vec{p}, s | \psi} \Rightarrow \text{diagrama} = v^\alpha(p)$$

antipartícula

(eq. 49.4)

Diversos detalhes merecem atenção:

(que não foram evidenciados no diagrama que escolhemos para essa primeira olhada nas regras de Feynman para férmions)

O primeiro ponto é notar como as contrações dos índices espinoriais ocorre, ao longo das linhas fermiônicas:

$$\sim \bar{u}(p_3)_\alpha \frac{i(\not{p}_2 + m)_{\alpha\beta}}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i(\not{p}_1 + m)_{\beta\kappa}}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} u(p_0)_\alpha = \bar{u}(p_3)_\alpha \frac{i(\not{p}_2 + m)_{\alpha\beta}}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i(\not{p}_1 + m)_{\beta\kappa}}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} u(p_0)_\alpha$$

$$\sim \bar{v}(p_3)_\alpha \frac{i(\not{p}_2 + m)_{\alpha\beta}}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i(\not{p}_1 + m)_{\beta\kappa}}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} u(p_0)_\alpha = \bar{v}(p_3)_\alpha \frac{i(\not{p}_2 + m)_{\alpha\beta}}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i(\not{p}_1 + m)_{\beta\kappa}}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} u(p_0)_\alpha$$

$$\sim \left[\bar{v}(p_2) \cdot \frac{i(-\not{k}_1 + m)}{k_1^2 - m^2 + i\epsilon} \cdot v(p_3) \right] \left[\bar{u}(p_4) \cdot \frac{i(\not{k}_3 + m)}{k_3^2 - m^2 + i\epsilon} \cdot u(p_1) \right]$$

O segundo diz respeito ao sinal que ignoramos na pg 47. Além dos sinais proveniente do teorema de Wick, temos que adotar uma convenção para o sinal dos estados finais e iniciais:

$$|\vec{p}; \vec{k}\rangle \sim a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{k}}^{\dagger} |0\rangle$$

↳ (a menos da normalização, só estamos aqui interessados na ordem dos operadores de criação)

então:

$$(|\vec{p}; \vec{k}\rangle)^{\dagger} = \langle \vec{p}; \vec{k} | = \langle 0 | a_{\vec{k}} a_{\vec{p}} = - \langle 0 | a_{\vec{p}} a_{\vec{k}}$$

De forma que:

$$\begin{aligned} \overbrace{\Psi} |\vec{p}; \vec{k}\rangle &= e^{-i p x} \omega^s(p) |\vec{k}\rangle & \overbrace{\Psi} |\vec{p}; \vec{k}\rangle &= - e^{-i k x} \omega^s(k) |\vec{p}\rangle \\ \langle \vec{p}; \vec{k} | \overbrace{\Psi} &= e^{i p x} \overline{\omega^s(p)} \langle \vec{k} | & \langle \vec{p}; \vec{k} | \overbrace{\Psi} &= - e^{i k x} \overline{\omega^s(k)} \langle \vec{p} | \end{aligned}$$

voltando então às contrações das pgs 47-48:

$$\langle \vec{p}', \vec{k}' | (\overline{\Psi}_I \Psi_I)(x) (\overline{\Psi}_I \Psi_I)(y) | \vec{p}, \vec{k} \rangle_0 \sim \langle 0 | a_{\vec{k}'}^{\dagger} a_{\vec{p}'}^{\dagger} (\overline{\Psi}_I \Psi_I)(x) (\overline{\Psi}_I \Psi_I)(y) a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{k}}^{\dagger} | 0 \rangle \sim +$$

a segunda contração (trocando x ↔ y)

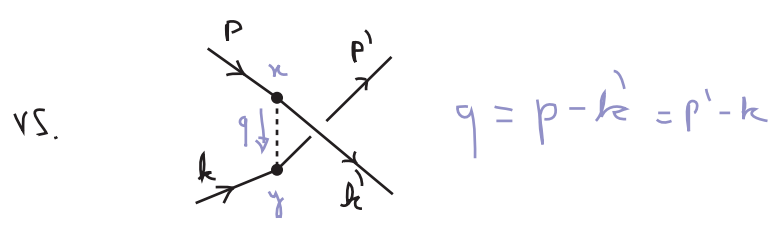
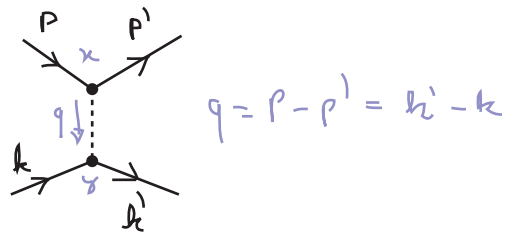
$$\langle \vec{p}', \vec{k}' | N [(\overline{\Psi}_I \Psi_I)(x) (\overline{\Psi}_I \Psi_I)(y)] | \vec{p}, \vec{k} \rangle_0 \sim \langle 0 | a_{\vec{k}'}^{\dagger} a_{\vec{p}'}^{\dagger} (\overline{\Psi}_I \Psi_I)(x) (\overline{\Psi}_I \Psi_I)(y) a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{k}}^{\dagger} | 0 \rangle \sim +$$

Mas há também mais duas contrações, uma delas é:

$$\langle \vec{p}', \vec{k}' | (\overline{\Psi}_I \Psi_I)(x) (\overline{\Psi}_I \Psi_I)(y) | \vec{p}, \vec{k} \rangle_0 \sim \langle 0 | a_{\vec{k}'}^{\dagger} a_{\vec{p}'}^{\dagger} (\overline{\Psi}_I \Psi_I)(x) (\overline{\Psi}_I \Psi_I)(y) a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{k}}^{\dagger} | 0 \rangle \sim -$$

e a outra é a troca x ↔ y desta.

Em termos de diagramas: \rightarrow (os termos que fazem x ↔ y já estão incluídos nestes diagramas, cancelando o fator 1/2 que vem da expansão da exponencial)

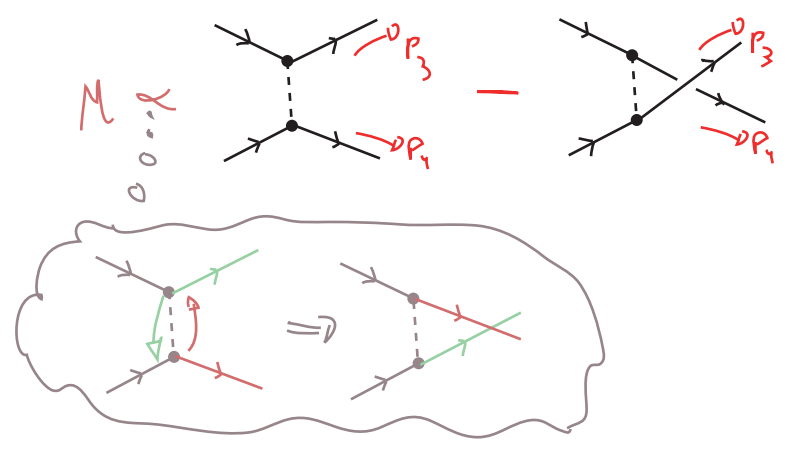


então, finalmente:

$$i\mathcal{M}(\vec{p}, \vec{k} \rightarrow \vec{p}', \vec{k}') = (-ig^2) \times \left(\bar{u}(p') \cdot u(p) \frac{1}{(p-p')^2 - m^2} \bar{u}(k') \cdot u(k) - \bar{u}(p') \cdot u(k) \frac{1}{(p'-k)^2 - m^2} \bar{u}(k') \cdot u(p) \right)$$

O que levará a uma interferência destrutiva entre os dois diagramas quando calculamos $|\mathcal{M}|^2$

Note que o sinal global não importa, mas sim o relativo entre diagramas, por isso raramente nos preocupamos com esta análise, nos limitando a notar que diagramas que difiram apenas pela troca de dois férmions finais vão ter um sinal relativo negativo. Exemplo:

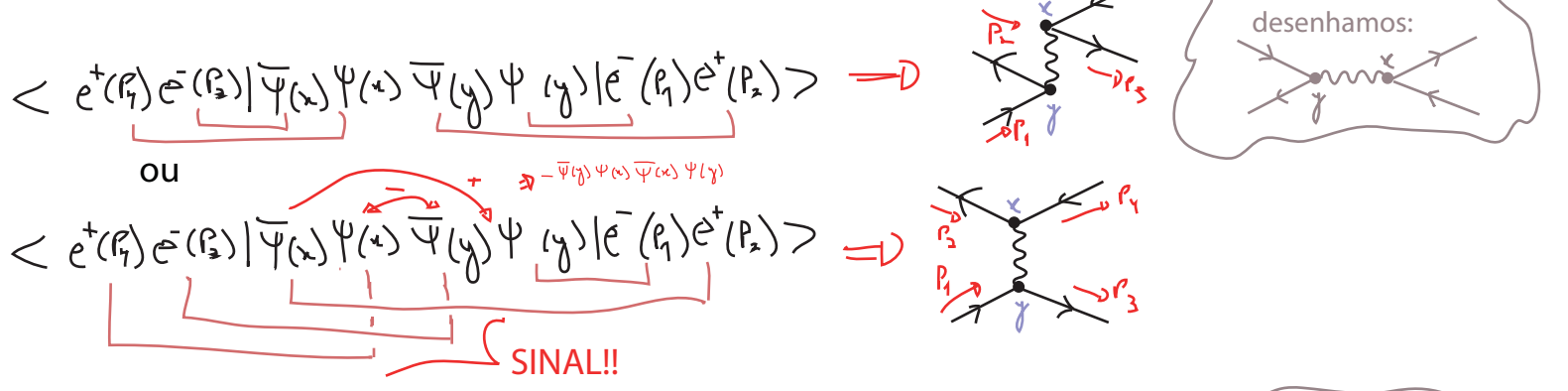


Isto fale também se trocamos linhas de férmions e anti-férmions, uma vez que são criados/aniquilados pelo mesmo campo. Note que (espalhamento Bhabha):

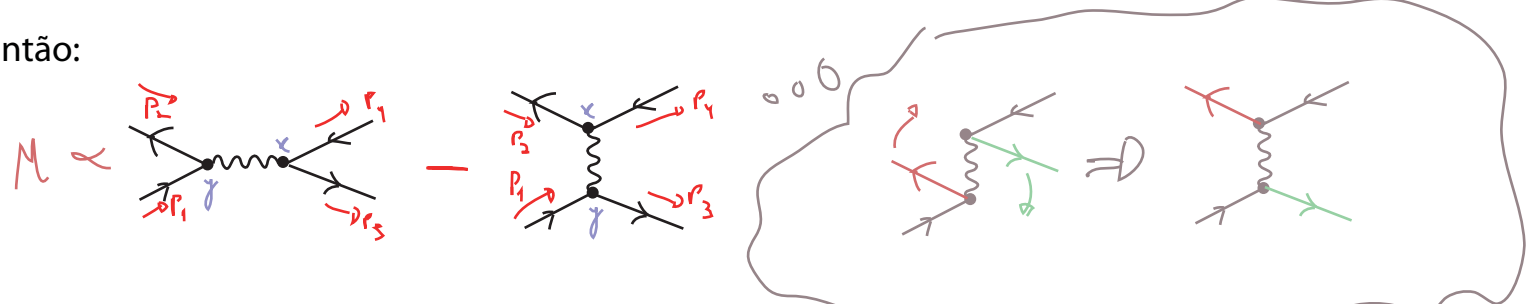
$$\sigma(e^+e^- \rightarrow e^+e^-) \Rightarrow \langle e^-(p_2) e^+(p_1) | \underbrace{(\bar{\Psi} A_\mu \Psi)(x)}_{\text{aniquila } e^+, \text{ cria } e^-} (\bar{\Psi} A_\mu \Psi)(y) | e^-(p_1) e^+(p_2) \rangle$$

\swarrow aniquila e^+ , cria e^-
 \searrow aniquila e^- , cria e^+

este espalhamento pode ser obtido de dois jeitos:



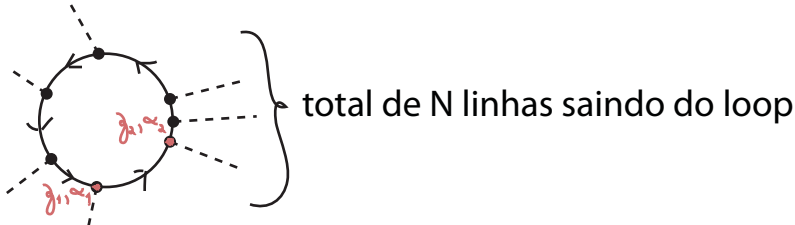
Então:



Finalmente, levando em conta que as contrações dos índices espinoriais acontece ao longo da linha fermiônica:

$$\dots (\bar{\Psi} \Psi)_u (\bar{\Psi} \Psi)_y (\bar{\Psi} \Psi)_z (\bar{\Psi} \Psi)_v \dots = \dots (+1) (\bar{\Psi} \Psi)_u (\bar{\Psi} \Psi)_z (\bar{\Psi} \Psi)_y (\bar{\Psi} \Psi)_v \dots = \dots S_F(u-z) S_F(y-v) S_F(z-v) \dots$$

O que acontece quando fechamos um loop com férmions?



$$\sim (\bar{\Psi} \Psi)_{j_1} (\bar{\Psi} \Psi)_{j_2} \dots (\bar{\Psi} \Psi)_{j_N} (\bar{\Psi} \Psi)_{j_1} = (-1) (\bar{\Psi} \Psi)_{j_1} (\bar{\Psi} \Psi)_{j_2} \dots (\bar{\Psi} \Psi)_{j_N} (\bar{\Psi} \Psi)_{j_1} = (-1) S_F(j_1 - j_N) S_F(j_N - j_{N-1}) \dots S_F(j_3 - j_2) S_F(j_2 - j_1) = (-1) \text{Tr} [S_F S_F \dots S_F S_F]$$

Em suma:

(52.1)

Regras de Feynman para Yukawa

- (1) desenhar todos os diagramas conectados e amputados que contribuem para o espalhamento
- (2) escreva as funções dos propagadores (somente as linhas internas), conforme eqs. 49.1

(3) para cada vértice: = $-i g$ (49.2)

(4) para as linhas externas: eqs 49.3 e 49.4 (com atenção do sinal relativo entre diagramas iguais sob a troca de ponto de inserção de linhas fermiônicas externas)

(5) imponha conservação de momento em cada vértice (re-escrevendo os momentos internos)

(6) integre sobre cada momento não determinado: $\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}$

(7) divida pelo fator de simetria

(8) multiplique por (-1) para cada loop fermiônico e faça a contração das linhas fermiônicas

(9) rigorosamente deveríamos multiplicar por $(2\pi)^4 \delta^4(\sum p_\alpha)$ mas se estivermos em busca de

$$i \mathcal{M} (2\pi)^4 \delta^4(\sum p_\alpha) = \left(\sum \text{diagramas conectados e amputados} \right) \times (\sqrt{Z})^{n+2} \quad (\text{eq. 194.1})$$

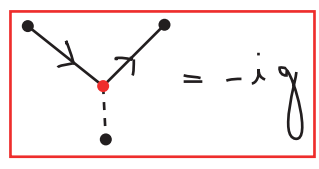
basta dividir o resultado do passo (8) por i para obter \mathcal{M} (veremos o que fazer com Z em TQCII, mas a nível árvore $Z = 1$)

Potencial de Yukawa

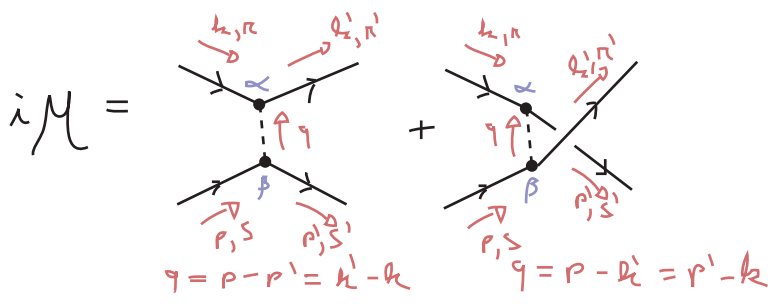
(Peskin 4.8)

Queremos ver se o potencial de Yukawa entre dois férmions é mesmo dado pela troca de um escalar, conforme a interação da pg 46 (teoria de Yukawa):

$$\mathcal{L}_Y^{(m)} = g \bar{\psi} \psi \phi$$



Para dois férmions idênticos interagindo, os dois diagramas em menor ordem de g que contribuem são:



Se não fossem idênticos poderíamos pegar só o primeiro, pois o momento estaria ligado a identidade do férmion, de fato é este caso que consideraremos. No limite não relativístico temos:

$$p \simeq (m, \vec{p}) \quad p' \simeq (m, \vec{p}') \quad k \simeq (m, \vec{k}) \quad k' \simeq (m, \vec{k}')$$

$$(p - p')^2 \simeq -|\vec{p} - \vec{p}'|^2 \ll 0 \quad (p^0 - p'^0 \simeq m - m)$$

$$u^s(p) \simeq \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix} \quad \xi^s = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{u}^{s'}(p') u^s(p) = u^{s'} \gamma^0 u^s = m \begin{pmatrix} \xi^{s'+} & \xi^{s'+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix} = 2m \xi^{s'+} \xi^s$$

Isso nos permite escrever ambos os diagramas (lembre-se que só usaremos o primeiro):

$$i\mathcal{M} = (-ig) \bar{u}^{s'}(p')_\beta u^s(p)_\beta \frac{i}{(p-p')^2 - m_\phi^2} (-ig) \bar{u}^{s'}(k')_\alpha u^s(k)_\alpha$$

$$- (-ig) \bar{u}^{s'}(p')_\alpha u^s(k)_\alpha \frac{i}{(p-k')^2 - m_\phi^2} (-ig) \bar{u}^{s'}(k') u^s(p)$$

↑ sinal da troca de férmions no estado final

(eq. 53.1)

O que quer dizer que, para férmions distinguíveis no limite não relativístico:

$$i\mathcal{M} \simeq \frac{ig^2}{|\vec{p} - \vec{p}'|^2 + m_\phi^2} (2m \delta^{s's}) (2m \delta^{r'r})$$

(eq. 53.2)

Podemos comparar este resultado com a aproximação de Born para espalhamentos em mecânica quântica:

$$\langle \vec{p}' | i T | \vec{p} \rangle = -i V(\vec{q}) 2\pi \delta(E_{p'} - E_p) \quad (\text{eq. 54.1})$$

$$\vec{q} = \vec{p}' - \vec{p} \quad \text{momento transferido}$$

que é válido para potenciais fracos (o que condiz com nossa aproximação perturbativa - estamos pegando só os diagramas em ordem mais baixa [LO]) e espalhamentos onde o estado final é parecido com o inicial (espalhamento com ângulo pequeno, energia trocada bem menor que a energia incidente). Nosso resultado é mais geral que isso (vale para qualquer ângulo), mas deve valer neste limite em particular.

A comparação é delicada, pois usamos normalizações diferentes do que usualmente se faz em mecânica quântica (para obter objetos relativisticamente invariantes). O fator de $2m$ acompanhando cada linha fermiônica vem desta diferença de normalização, então devemos ignorá-lo na comparação.

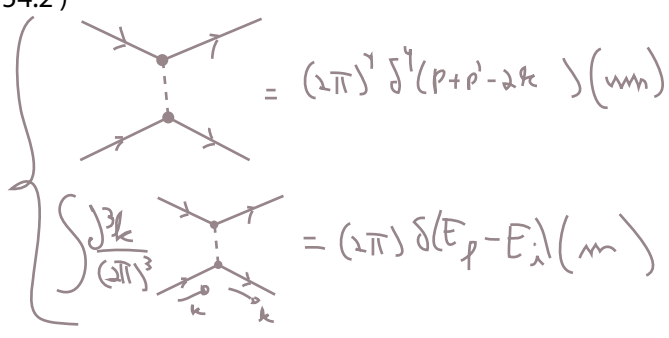
Outra sutileza vem do fato de que, na aproximação de Born, estamos assumindo que o momento do "centro espalhador" (o alvo), não muda, e temos só uma partícula inicial e uma final ($1 \rightarrow 1$). Isso quer dizer que: $\vec{p}^0 \neq \vec{p}^1$ ao passo que $E_{p'} = E_p$ ($|\vec{p}'| = |\vec{p}|$)

Nesse caso, definimos:

$$\langle \vec{p}' | i T | \vec{p} \rangle = i \mathcal{M} (2\pi) \delta(E_{p'} - E_p) \quad (\text{eq. 54.2})$$

(outra forma de ver isso é notar que, como não estamos observando o momento inicial ou final do alvo, temos que integrar sobre ambos, com a condição $k' = k$ temos apenas uma integral:

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} + \vec{p}' - 2\vec{k})$$



que absorve a delta nos momentos, deixando apenas a delta na energia:

Comparando 54.2 com 54.1 obtemos: $V(\vec{q}) = -\mathcal{M}$

e como (de novo, por conta da aproximação de Born), não há inversões de spin ($s' = s, r' = r$):

$$V(\vec{q}) = \frac{-g^2}{|\vec{q}|^2 + m_\phi^2} \quad (\text{eq. 54.3})$$

Para obter este potencial no espaço das posições fazemos:

$$V(\vec{x}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{-g^2}{|\vec{q}|^2 + m_\phi^2} e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} = \frac{-g^2}{(2\pi)^3} 2\pi \int_0^\infty q^2 dq \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{iqr} \frac{1}{q^2 + m_\phi^2} =$$

$$= \frac{-g^2}{4\pi^2 i r} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \frac{q e^{iqr}}{q^2 + m_\phi^2}$$

$r \equiv |\vec{x}|$
 $q \equiv |\vec{q}|$

$$\int_0^\pi \sin(\theta) d\theta e^{iqr \cos \theta} = \int_0^1 d(\cos \theta) e^{iqr \cos \theta} = \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{iqr}$$

$$V(\vec{x}) = \frac{-g^2}{4\pi^2 i r} (2\pi i) \left(\frac{i m e^{-m_\phi r}}{2 i m} \right) = \frac{-g^2}{4\pi r} e^{-m_\phi r} \quad (\text{eq. 54.4})$$

que é o potencial atrativo de Yukawa.

Regras de Feynman para QED

(Nastase 16, Peskin 4.8 e 9.4, Ryder 7.1)

Queremos agora abordar a versão quântica do eletromagnetismo e, para tanto, precisamos quantizar o campo do fóton. Começemos a discussão escolhendo qual fixação de Gauge será mais conveniente para a quantização da teoria. A equação de movimento clássica:

$$\square A^\nu - \partial^\nu (\partial^\mu A_\mu) = 0$$

é bastante difícil de resolver, no **Gauge de Lorenz** (proposta por Ludvig Lorenz que não é o Hendrik Lorentz) ou **Gauge Covariante** a solução é bem mais simples:

Gauge Covariante

$$\partial^\mu A_\mu = 0$$

(eq. 55.1)

$$\square A_\mu = 0$$

(Klein-Gordon, para $m = 0$)

$$A_\mu \sim \epsilon_\mu(k) e^{\pm i k \cdot x}$$

o coeficiente carrega o índice vetorial e a informação sobre o momento angular (spin / polarização)

$$k^2 = 0 \quad (\text{pois a massa é zero na eq. KG})$$

$$\partial^\mu A_\mu(x) = 0 \Rightarrow \int d^4x e^{-i p \cdot x} \partial^\mu A_\mu(x) = 0$$

$$\int d^4x e^{-i p \cdot x} \int \frac{d^4k}{N_k} \epsilon_\mu(k) e^{\pm i k \cdot x} = 0$$

$$\int \frac{d^4k}{N_k} k^\nu \cdot \epsilon_\mu(k) \delta^4(p \pm k) = 0 \Rightarrow \boxed{\pm p^\mu \epsilon_\mu(\pm p) = 0} \quad (\text{eq. 55.2})$$

esta fixação, no entanto, não fixa completamente o Gauge. Note que, dadas duas configurações de campo fisicamente equivalentes, ligadas pela transformação de Gauge a seguir:

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \lambda \quad \text{com} \quad \square \lambda = 0$$

ambas podem satisfazer a condição de fixação (sem exigir $A = A'$): $\partial^\mu A'_\mu = \partial^\mu A_\mu = 0$

Poderíamos aprimorar a nossa fixação exigindo também

$$\boxed{A_0 = 0} \quad (\text{eq. 55.3})$$

(ainda mantendo a condição 55.1)

$$\text{o que equivale a: } \partial_0 \lambda = -A_0$$

E não causa nenhum problema com a condição 55.1, uma vez que:

$$\square A_0 = 0 \Rightarrow \square \partial_0 \lambda = 0 \Rightarrow \partial_0 \square \lambda = 0$$

↳ $\square \lambda = 0$ já era permitido

A combinação de 55.1 e 55.3 nos leva a:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0} \quad (\text{eq. 55.4})$$

Note que esta condição não é condizente com a presença de correntes (fontes) externas, que produziriam um $A_0 \neq 0$, portanto este formalismo só é útil para radiação no vácuo. Em suma, usaremos:

$$A_0 = 0 \quad \& \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (\text{eq. 56.1})$$

Gauge de Radiação ou de Coulomb

$$\dots \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_0(p) = 0 \\ 55.2 \rightarrow \vec{p} \cdot \vec{\epsilon}^{(\lambda)}(p) = 0 \end{array} \right.$$

Sabemos do eletromagnetismo que, neste Gauge, só temos dois modos que se propagam no campo, correspondendo a duas polarizações transversais. Por isso ele é um **Gauge Físico**.

A solução clássica é:

$$\vec{A}(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_k}} \sum_{\lambda=1,2} \vec{\epsilon}^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \left[a^{(\lambda)}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + a^{(\lambda)\dagger}(\mathbf{k}) e^{+i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right] \quad (\text{eq. 56.2})$$

$$k^2 = 0 \quad \vec{k} \cdot \vec{\epsilon}^{(\lambda)}(\mathbf{k}) = 0$$

É também conveniente escolher os dois **vetores de polarização** $\vec{\epsilon}^{(\lambda)}$ de forma que sejam ortogonais:

$$\vec{\epsilon}^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \cdot \vec{\epsilon}^{(\lambda')}(\mathbf{k}) = \delta^{\lambda\lambda'} \quad (\text{eq. 56.3})$$

Quantização no Gauge Físico:

(não explicitaremos todos os detalhes, ver: Bjorken & Drell, "Relativistic Quantum Fields", cap 14)

Queremos agora impor as condições 56.1 uma vez que o campo tenha se tornado um operador. A condição para o componente zero é trivial, estamos de fato removendo um grau de liberdade do sistema, já a condição $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ deve ser vista como uma condição para operadores. Ou seja:

$$\vec{\nabla} \cdot \langle \vec{A} \rangle = 0 \quad \& \quad \vec{\nabla} \cdot [\vec{A}, \hat{\phi}] = 0$$

Note então que, definindo o momento conjugado: $\pi^i = F^{0i} = E^i$

Poderíamos, inocentemente, impor:

$$[A^i(\vec{x}, t), E^j(\vec{x}', t)] = i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \delta^{ij} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} = i \delta^{ij} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$$

Mas veja que, se aplicamos $\vec{\nabla}_{x_i}$ neste comutador NÃO temos: $\vec{\nabla} \cdot [A(\vec{x}, t), E^j(\vec{x}', t)] = 0$

$$\vec{\nabla}_{x_i} [A^i(\vec{x}, t), E^j(\vec{x}', t)] = i \frac{\partial}{\partial x^i} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \delta^{ij} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} = - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} k_j e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}$$

A lição aqui é que vínculos (e a fixação de Gauge é um vínculo sobre as variáveis dinâmicas do sistema) tornam a prescrição de quantizar simplesmente trocando os brackets de Poisson por comutadores (ou anticomutadores) inválida. Dirac achou uma forma de generalizar a prescrição para sistemas com vínculo mas não exploraremos isto aqui (veja as notas do prof. Nastase lec 15 e a referência lá dada para o original de Dirac), para nossos fins basta notar que a generalização:

$$\delta^{ij} \rightarrow \Delta^{ij} = \left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{k^2} \right) \quad (\text{eq. 56.4})$$

Fornece a seguinte relação de comutação:

$$\begin{aligned}
 [A^i(\vec{x}, t), E^j(\vec{x}', t)] &= i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Delta^{ij} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} = i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\delta^{ij} - \underbrace{\frac{k^i k^j}{k^2}}_{\frac{\partial^i \partial^j}{(\nabla^2)^2}} \right) e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} \\
 &= i \left(\delta^{ij} - \frac{\partial^i \partial^j}{(\nabla^2)^2} \right) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')
 \end{aligned}$$

que, por sua vez, satisfaz $\vec{\nabla} \cdot [\vec{A}, E^i] = 0$ uma vez que

$$[A, A] = [E, E] = 0$$

$$k_i \Delta^{ij} = k_j - k_i \frac{k^i k^j}{k^2} = 0$$

Substituindo a decomposição de A no comutador acima obtemos a relação usual:

$$[a^{(\lambda)}(k), a^{(\lambda')\dagger}(k')] = (2\pi)^3 \delta_{\lambda\lambda'} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \quad (\text{eq. 57.1})$$

$$[a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0$$

$$H = \frac{1}{2} \int d^3k (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k^0}{2} [a^{(\lambda)\dagger}(k) a^{(\lambda)}(k) + a^{(\lambda)}(k) a^{(\lambda)\dagger}(k)]$$

$$:H: = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} k^0 a^{(\lambda)\dagger}(k) a^{(\lambda)}(k) \quad (\text{eq. 57.2})$$

Esta escolha de Gauge é conveniente pois só temos dois graus de liberdade, que coincidem com os graus físicos. No entanto a invariância de Lorentz explícita está perdida, e para ter certeza de que correções quânticas (loops) não a quebram seria necessário testá-la explicitamente a cada passo da teoria de perturbação. Uma alternativa a isto seria escolher o Gauge Covariante (que mantém a estrutura de Lorentz explícita) e pagar o preço de ter polarizações não físicas na teoria, é o que faremos a seguir.

Quantização no Gauge Covariante

(mais detalhes: Mandl e Shaw, secs 5.1 e 5.2)

Neste caso, a única condição de fixação é: $\partial_\mu A^\mu = 0$

$$\text{A solução clássica é: } A_\mu = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_k}} \sum_{\lambda=0}^3 \underbrace{\epsilon_\mu^{(\lambda)}(k)}_{\substack{\text{4 polarizações} \\ k^2=0}} \left[a^{(\lambda)}(k) e^{-ikx} + a^{(\lambda)\dagger}(k) e^{+ikx} \right] \quad \begin{matrix} \text{F}_k = k \end{matrix}$$

Podemos escolher um sistema de coordenadas tomando o 3 eixo na direção de k : $k^\mu = (k, 0, 0, k)$