

$$\begin{aligned}
 [A^i(\vec{x}, t), E^j(\vec{x}', t)] &= i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Delta^{ij} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} = i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{k^2} \right) e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} \\
 &= i \left(\delta^{ij} - \frac{\partial^i \partial^j}{(\nabla^2)} \right) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')
 \end{aligned}$$

que, por sua vez, satisfaz $\vec{\nabla} \cdot [\vec{A}, E^i] = 0$ uma vez que $[A, A] = [E, E] = 0$

$$k_i \Delta^{ij} = k_j - k_i \frac{k^i k^j}{k^2} = 0$$

Substituindo a decomposição de A no comutador acima obtemos a relação usual:

$$[a^{(\lambda)}(k), a^{(\lambda')\dagger}(k')] = (2\pi)^3 \delta_{\lambda\lambda'} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \quad (\text{eq. 57.1})$$

$$[a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0$$

$$H = \frac{1}{2} \int d^3k (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k^0}{2} [a^{(\lambda)\dagger}(k) a^{(\lambda)}(k) + a^{(\lambda)}(k) a^{(\lambda)\dagger}(k)]$$

$$:H: = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} k^0 a^{(\lambda)\dagger}(k) a^{(\lambda)}(k) \quad (\text{eq. 57.2})$$

Esta escolha de Gauge é conveniente pois só temos dois graus de liberdade, que coincidem com os graus físicos. No entanto a invariância de Lorentz explícita está perdida, e para ter certeza de que correções quânticas (loops) não a quebram seria necessário testá-la explicitamente a cada passo da teoria de perturbação. Uma alternativa a isto seria escolher o Gauge Covariante (que mantém a estrutura de Lorentz explícita) e pagar o preço de ter polarizações não físicas na teoria, é o que faremos a seguir.

Quantização no Gauge Covariante

(mais detalhes: Mandl e Shaw, secs 5.1 e 5.2)

Neste caso, a única condição de fixação é: $\partial_\mu A^\mu = 0$

A solução clássica é:
$$A_\mu = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_k}} \sum_{\lambda=0}^3 \epsilon_\mu^{(\lambda)}(k) \left[a^{(\lambda)}(k) e^{-ikx} + a^{(\lambda)\dagger}(k) e^{+ikx} \right]$$

$\underbrace{\lambda=0, 1, 2, 3}_{4 \text{ polarizações}}$
 $k^2 = 0 \rightarrow E_k = k$

Podemos escolher um sistema de coordenadas tomando o 3 eixo na direção de k: $k^\mu = (k, 0, 0, k)$

e mais uma vez construir polarizações ortogonais:

$$E_{\mu}^{(0)} = (1, 0, 0, 0) \quad E_{\mu}^{(1)} = (0, 1, 0, 0) \quad E_{\mu}^{(2)} = (0, 0, 1, 0) \quad E_{\mu}^{(3)} = (0, 0, 0, 1)$$

$$\therefore E_{\mu}^{(\lambda)} = \delta_{\mu}^{\lambda} \quad E^{(\lambda)} \cdot E^{(\lambda')} = E_{\mu}^{(\lambda)} E_{\nu}^{(\lambda')} g^{\mu\nu} = g^{\lambda\lambda'} \rightarrow E_{\mu}^{(\lambda)} E_{\nu}^{(\lambda')} g^{\lambda\lambda'} = g^{\mu\nu}$$

$$\lambda = 1, 2 \rightarrow k^{\mu} E_{\mu}^{(\lambda)} = 0 \quad \checkmark \text{ Polarizações transversas são físicas}$$

$$\lambda = 0, 3 \rightarrow k^{\mu} E_{\mu}^{(\lambda)} = E_{\mu} \quad \times \text{ Polarizações tipo-tempo } (\lambda = 0) \text{ e longitudinal } (\lambda = 3) \text{ não são físicas}$$

isso quer dizer que, quando forçarmos a condição $\partial^{\mu} A_{\mu} = 0$ em termos de observáveis, os modos tipo-tempo e longitudinal devem se cancelar.

Mais uma vez temos que modificar o jeito de quantizar para levar o vínculo da fixação de Gauge em conta, neste caso trocaremos a imposição forte de que:

$$[\partial_{\mu} A^{\mu}(x), A^{\nu}(x')] = 0$$

que é impossível de satisfazer com a expansão de A dada acima, por uma condição imposta apenas sobre a parte de aniquilação da expansão:

$$\boxed{\partial^{\mu} A_{\mu}^{(+)}(x) |\Psi\rangle = 0} \quad (\text{eq. 58.1})$$

Condição de Gupta-Bleuler

$$A_{\mu}^{(+)} \equiv \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_k}} \sum_{\lambda=0, \dots, 3} \vec{E}^{(\lambda)}(k) \alpha^{(\lambda)}(k) e^{-ik \cdot x}$$

Que também implica:

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \Psi | \partial^{\mu} A_{\mu}^{(-)}(x) = 0 \\ A_{\mu}^{(-)} \equiv \dots \alpha^{(\lambda)\dagger}(k) e^{+ik \cdot x} \\ \langle \Psi | \partial^{\mu} A_{\mu} | \Psi \rangle = \langle \Psi | \partial^{\mu} A_{\mu}^{(-)} + \partial^{\mu} A_{\mu}^{(+)} | \Psi \rangle = 0 \end{array} \right.$$

O que estamos fazendo na prática é colocar uma restrição nos estados iniciais e finais permitidos pela teoria. A quantização é dada por:

$$[A_{\mu}(\vec{x}, t), \tilde{\pi}_{\nu}(\vec{x}', t)] = i g_{\mu\nu} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \quad [A, A] = [\tilde{\pi}, \tilde{\pi}] = 0$$

Note que temos um problema aí, pois $\tilde{\pi}_0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^0} = \frac{\partial}{\partial \dot{A}^0} \left[-\frac{1}{4} (\partial_{\lambda} A_{\sigma} - \partial_{\sigma} A_{\lambda}) (\partial^{\lambda} A^{\sigma} - \partial^{\sigma} A^{\lambda}) \right] = 0$

Portanto não há como a relação de comutação acima valer para A_0 e π_0 , a não ser que modifiquemos a Lagrangeana - existe uma forma de fazer isso sem mudar as equações de movimento, que

não exploraremos aqui, uma vez que este procedimento é muito mais direto via integrais de trajetória, o que faremos mais tarde (veja Mandl e Shaw para a história completa). Assumindo que este problema foi resolvido, podemos obter relações de comutação para os operadores de criação e aniquilação:

$$\boxed{[\alpha^{(\lambda)}(k), \alpha^{(\lambda')\dagger}(k')] = -g^{\lambda\lambda'} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}')} \quad (\text{eq. 59.1})$$

$$[\alpha, \alpha] = [\alpha^\dagger, \alpha^\dagger] = 0$$

O que está bem para $\lambda = 1, 2$ e 3 , mas:

$$\lambda = 0 \Rightarrow [\alpha^{(0)}(k), \alpha^{(0)\dagger}(k')] = -(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}')$$

O que leva a uma norma negativa para $\alpha^\dagger|0\rangle$ pois:

$$\|\alpha^\dagger|0\rangle\|^2 \equiv \langle 0|\alpha\alpha^\dagger|0\rangle = -\langle 0|\alpha^\dagger\alpha|0\rangle = -\langle 0|0\rangle = -1$$

Reforçando o fato de que estes estados não podem ser físicos. A condição de Gupta-Bleuler diz que:

$$\partial^\mu A_\mu^{(+)}(x)|\psi\rangle = 0$$

$$\hookrightarrow \sum_{\lambda=0\dots 3} \int d^3k \epsilon_\mu^{(\lambda)}(k) \alpha^{(\lambda)}(k) |\psi\rangle = 0$$

$k^\mu \epsilon_\mu^{(1)} = k^\mu \epsilon_\mu^{(2)} = 0$
 $\rightarrow \left[\underbrace{k^\mu \epsilon_\mu^{(0)}(k)}_{E_k} \alpha^{(0)}(k) + \underbrace{k^\mu \epsilon_\mu^{(3)}(k)}_{E_k} \alpha^{(3)}(k) \right] |\psi\rangle = 0$

$$\boxed{[\alpha^{(0)}(k) + \alpha^{(3)}(k)] |\psi\rangle = 0} \quad (\text{eq. 59.2})$$

Esta equação deve ser verdade para qualquer estado ψ , e portanto é uma condição que restringe os estados físicos possíveis. Um exemplo de estado que satisfaz esta restrição é:

$$|\psi\rangle = (\alpha^{(0)\dagger}(k) + \alpha^{(3)\dagger}(k)) |0\rangle$$

$$[\alpha^{(0)}(k) + \alpha^{(3)}(k)] (\alpha^{(0)\dagger}(k) + \alpha^{(3)\dagger}(k)) |0\rangle = \left[\underbrace{[\alpha^{(0)}(k), \alpha^{(0)\dagger}(k)]}_{-(2\pi)^3 \delta} + \underbrace{[\alpha^{(3)}(k), \alpha^{(3)\dagger}(k)]}_{+(2\pi)^3 \delta} \right] |0\rangle = 0$$

Podemos mostrar que o mesmo é verdade para qualquer estado que tenha o mesmo número de excitações com as polarizações (0) e (3). O resultado final é que, neste Gauge, a contribuição destas duas polarizações não-físicas se cancelam no cálculo de todos os observáveis. A energia, por exemplo, é dada por:

$$\langle \psi | H | \psi \rangle = \int d^3k \, k^0 \sum_{\lambda=0,1,2,3} \xi_\lambda \langle \psi | \alpha^{(\lambda)\dagger} \alpha^{(\lambda)} | \psi \rangle$$

$$\boxed{\xi_0 = -1 \quad \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 1}$$

$$59.2 \rightarrow \langle \psi | [\alpha^{(0)\dagger}(k) + \alpha^{(3)\dagger}(k)] = 0$$

isso quer dizer que (simplificando a notação):

$$\alpha^{(0)\dagger}(k) \equiv 0^+ \quad \alpha^{(3)\dagger}(k) \equiv 3^+$$

$$\begin{aligned} \langle \psi | (0^+ + 3^+) 0 | \psi \rangle &= \langle \psi | (0^+ + 3^+) 3 | \psi \rangle = \langle \psi | 0^+ (0 + 3) | \psi \rangle = \langle \psi | 3^+ (0 + 3) | \psi \rangle = 0 \\ - \langle \psi | (0^+ + 3^+) 0 | \psi \rangle + \langle \psi | (0^+ + 3^+) 3 | \psi \rangle - \langle \psi | 0^+ (0 + 3) | \psi \rangle + \langle \psi | 3^+ (0 + 3) | \psi \rangle &= 0 \\ \langle \psi | -0^+ 0 - \cancel{3^+ 0} + \cancel{0^+ 3} + 3^+ 3 - 0^+ 0 - \cancel{0^+ 3} + \cancel{3^+ 0} + 3^+ 3 | \psi \rangle &= 0 \end{aligned}$$

$$\langle \psi | \alpha^{(3)\dagger}(k) \alpha^{(3)}(k) - \alpha^{(0)\dagger}(k) \alpha^{(0)}(k) | \psi \rangle = 0$$

Portanto a energia pode ser escrita como:

$$\langle \psi | H | \psi \rangle = \int d^3k \, k^0 \sum_{\lambda=1,2} \langle \psi | \alpha^{(\lambda)\dagger} \alpha^{(\lambda)} | \psi \rangle \quad (\text{eq. 60.1})$$

↳ só as polarizações transversais contribuem

O propagador do fóton

Com as definições acima, fica fácil calcular o propagador do fóton:

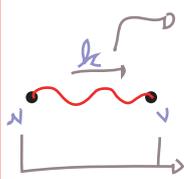
$$\begin{aligned} \langle 0 | A_\mu(x) A_\nu(y) | 0 \rangle &= \langle 0 | (A_\mu^+(x) + A_\mu^-(x)) (A_\nu^+(y) + A_\nu^-(y)) | 0 \rangle = \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2|\vec{p}|}} \sum_{\lambda=0}^3 \epsilon_\mu^\lambda e^{-ipx} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2|\vec{k}|}} \sum_{\lambda'=0}^3 \epsilon_\nu^{\lambda'} e^{iky} \underbrace{\langle 0 | \alpha_{\vec{p}}^\lambda \alpha_{\vec{k}}^{\lambda'} | 0 \rangle}_{-\eta^{\lambda\lambda'} \frac{1}{(2\pi)^3} \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{k})} = \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2|\vec{p}|} e^{-ip(x-y)} (-g_{\mu\nu}) \end{aligned}$$

De forma que:

$$G_{\mu\nu}(x-y) \equiv \langle 0 | T \{ A_\mu(x) A_\nu(y) \} | 0 \rangle = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} e^{-iq(x-y)} \quad (\text{eq. 60.2})$$

Assim, temos a nova regra:

o sentido do momento não importa (Gauge de Lorenz / Feynman)



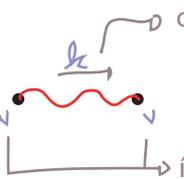
$$= \frac{-i g_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}$$

índices de Lorentz

(eq. 60.3)

Em um Gauge geral, ficaria:

o sentido do momento não importa



$$= \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} \left(g_{\mu\nu} - (1-\alpha) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + i\epsilon} \right)$$

índices de Lorentz

(eq. 60.4)

$\int d^4x \mathcal{L} \rightarrow \int d^4x \left[-\frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A^\mu)^2 \right]$
 Lorenz: $\partial_\mu A^\mu = 0$ \rightarrow Feynman: $\alpha = 1$
 \rightarrow Landau: $\alpha = 0$

No caso das linhas externas, temos que assumir que os estados iniciais tem apenas as polarizações físicas (mais tarde provaremos que é impossível produzir os estados não físicos):

$\lambda = 1 \text{ ou } 2$
(polarizações físicas)

$$A_\mu(x) |\vec{p}, \lambda\rangle = A_\mu(x) \frac{1}{\sqrt{2|\vec{p}|}} a_p^{\lambda\dagger} |0\rangle$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2|\vec{k}|}} \sum_{\lambda'=0}^3 \epsilon_{\mu}^{\lambda'} a_{\vec{k}}^{\lambda'} e^{-ikx} \frac{1}{\sqrt{2|\vec{p}|}} a_p^{\lambda\dagger} |0\rangle$$

$$= e^{-ipx} \sum_{\lambda'=1}^2 (-g^{\lambda\lambda'}) \epsilon_{\mu}^{\lambda'} |0\rangle = \epsilon_{\mu}^{\lambda} e^{-ipx} |0\rangle$$

$$\underbrace{A_\mu(\vec{p})} = \epsilon_{\mu}(\vec{p}) e^{-ipx} |0\rangle$$

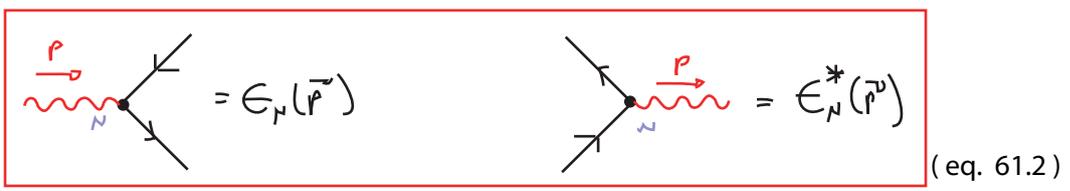
$$\underbrace{\langle \vec{p} | A_\mu} = \epsilon_{\mu}^*(\vec{p}) e^{ipx} \langle 0|$$

na pg 58 escolhemos ϵ real, que é útil para polariz. transversa. Para polarizações horárias ou anti-horárias seria mais conveniente tomar ϵ complexo

$$\epsilon^\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, \pm i, 0)$$

(eq. 61.1)

de forma que as regras para linhas externas ficam:

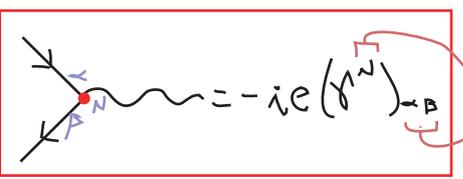


(eq. 61.2)

Do Hamiltoniano de interação podemos ler o vértice:

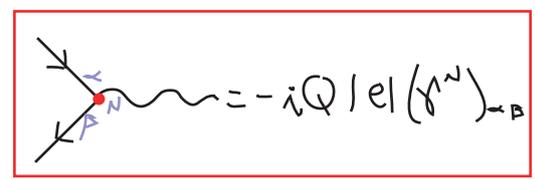
$$H_{int} = \int d^3x e \bar{\Psi}_\alpha \gamma^\mu_{\alpha\beta} \Psi_\beta A_\mu \rightarrow$$

(índices de Lorentz e Espinor contraídos)



(eq. 61.3)

note que os índices nos vértices tem que estar contraídos com os índices das linhas externas ou propagadores que entram neles



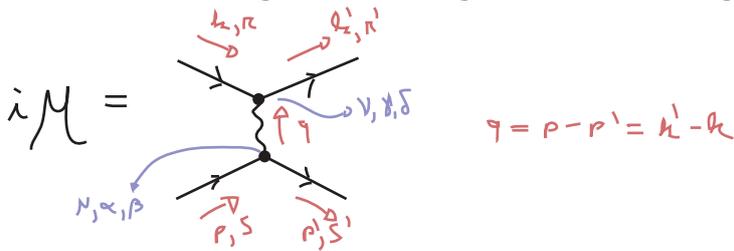
(eq. 61.4)

- para um férmion genérico de carga Q: elétron $\rightarrow Q = -1$
- quark u $\rightarrow Q = 2/3$
- quark d $\rightarrow Q = -1/3$

Podemos agora incluir as regras 60.3 (propagador do fóton), 61.2, 61.3 e 61.4 ao quadro 52.1 para descrever férmions que têm interação de Yukawa, eletromagnéticas ou ambas (porque não?)

Potencial de Coulomb

Seguimos a mesma lógica acima, agora temos o diagrama:



$$i\mathcal{M} = \bar{u}^s(p')_\alpha (-ie\gamma_{\alpha\mu}^N) u^r(p)_\beta \frac{-i\eta^{\mu\nu}}{(p-p')^2} \bar{u}^{r'}(k')_\gamma (-ie\gamma_{\gamma\delta}^N) u^s(k)_\delta$$

No limite não relativístico:

$$\bar{u}^s(p') \gamma^0 u^r(p) = m \begin{pmatrix} \xi^{s+} & \xi^{s-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^r \\ \xi^s \end{pmatrix} = 2m \delta^{sr}$$

$$\bar{u}^s(p') \gamma^i u^r(p) = m \begin{pmatrix} \xi^{s+} & \xi^{s-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^r \\ \xi^s \end{pmatrix} = 0$$

e obtemos:

$$i\mathcal{M} = \frac{-ie^2 \gamma_{00}}{|\vec{p}-\vec{p}'|^2} (2m \delta^{sr}) (2m \delta^{r's'}) = -\frac{ie^2}{|\vec{p}'-\vec{p}|^2} (2m \delta^{sr}) (2m \delta^{r's'})$$

$$V(q) = + \frac{e^2}{|\vec{q}|^2} \quad (\text{eq. 62.1})$$

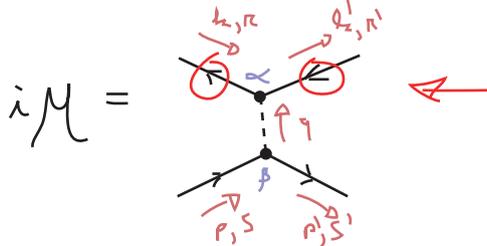
que é muito parecida com o potencial de Yukawa da eq. 54.3 (salvo o sinal e o fato de não termos massa). Portanto ao invés de fazer a transformada de Fourier de novo, basta inverter o sinal e fazer $m = 0$ em 54.4:

$$V(\lambda) = \frac{\pm e^2}{4\pi\lambda} \equiv \frac{\alpha}{\lambda} \quad (\text{eq. 62.2})$$

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137}$$

Potencial Partícula-Antipartícula

O que acontece se substituirmos um dos férmions por sua antipartícula? Começemos com a interação de Yukawa:



$$\bar{u}^{r'}(k') u^r(k) \rightarrow \bar{v}^{r'}(k') v^r(k) = m \begin{pmatrix} \xi^{r'+} & -\xi^{r'+-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^r \\ -\xi^{r-} \end{pmatrix} = -2m \delta^{r'r}$$

no entanto usando: $|p, k\rangle = a_p^+ b_k^+ |0\rangle$ $\langle p', k'| = \langle 0| b_k a_p$ mudança de sinal

$$\langle p', k' | \bar{\Psi} \Psi \bar{\Psi} \Psi | p, k \rangle = \langle 0 | b_k a_p (\bar{\Psi} \Psi)(z_2) (\bar{\Psi} \Psi)(z_1) a_p^+ b_k^+ | 0 \rangle$$

Para "desentrelaçar" as contrações preciso fazer um número ímpar de permutações, que não tínhamos no caso só com partículas:

$$\langle 0 | a_k a_{p'} (\bar{\psi} \psi)(y_+) (\bar{\psi} \psi)(y_1) a_p^+ a_k^+ | 0 \rangle$$

o que produz mais um sinal. A conclusão é que o potencial de Yukawa é atrativo mesmo neste caso.

No caso do potencial de Coulomb também temos este segundo fator (-1) advindo da ordem dos operadores fermiônicos, no entanto a troca de "u" por "v" resulta em:

$$\bar{u}^s(p') \not{\epsilon} u^s(p) = 2m \delta^{ss'} \Rightarrow \bar{v}^s(k) \not{\epsilon} v^{s'}(k) = m (\not{\epsilon}^+ - \not{\epsilon}^+) \underbrace{\begin{pmatrix} \not{\epsilon}^0 \\ 1 \\ -\not{\epsilon}^i \end{pmatrix}}_{\gamma^0} \begin{pmatrix} \not{\epsilon}^i \\ -\not{\epsilon}^i \end{pmatrix} = 2m \delta^{ss'}$$

ou seja, não há mudança aqui. Logo temos um sinal total de diferença, de forma que o potencial entre partícula e anti-partícula é atrativo.

Espalhamento Rutherford

Vamos calcular agora a seção de choque de espalhamento de um elétron por um campo elétrico gerado por um núcleo atômico (não estamos considerando o núcleo dinamicamente, assumimos que ele é infinitamente mais pesado que o elétron e seu único papel vai ser produzir o campo). A Hamiltoniana de interação é:

$$H_I = \int d^3x e \bar{\psi} \not{\epsilon} \psi A_\mu$$

A primeira contribuição perturbativa para a parte não trivial da matriz S, de ordem e, é dada por (eq. 40.2):

$$\langle p' | iT | p \rangle = \langle p' | T \left\{ e^{-i \int H_I dt} \right\} | p \rangle = \dots + \underbrace{\langle p' | T \left\{ -i \int d^4x \bar{\psi} e \not{\epsilon} \psi A_\mu \right\} | p \rangle}_{\text{primeira ordem}} + \dots =$$

Note que não tenho fótons no estado inicial nem no final, e não estou contraindo A_μ com nada (se tratasse A como operador isto daria zero) - estamos tratando A como um campo clássico

$$\stackrel{\mathcal{O}(e)}{=} -i e \bar{u}(p') \not{\epsilon} u(p) \int d^4x e^{-i p' x} e^{+i p x} A_\mu(x) = -i e \bar{u}(p') \not{\epsilon} u(p) A_\mu(p' - p) \quad \text{(eq. 63.1)}$$

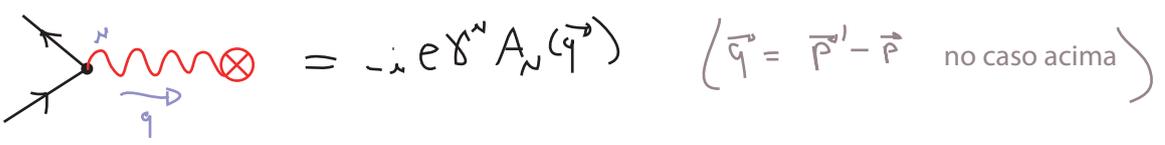
Se tomarmos a função $A_\mu(x)$ como independente do tempo, a sua transformada de Fourier vai ter uma delta de Dirac na energia:

$$A_\mu(p' - p) = A_\mu(\vec{p}' - \vec{p}) 2\pi \delta(\epsilon_{p'} - \epsilon_p)$$

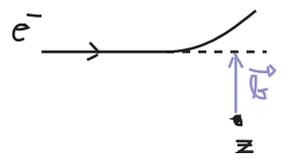
E, assim como na eq. 54.2, temos:

$$\langle p' | iT | p \rangle = i M(2\pi) \delta(\epsilon_{p'} - \epsilon_p)$$

Vemos que o efeito do campo externo pode ser codificado em uma nova regra de Feynman:



Queremos então calcular o espalhamento:



Que é um espalhamento 2 → 2 onde, no entanto, estamos olhando apenas uma das partículas. Assim como antes, temos:

$$dP(i \rightarrow f) = \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 2E_f} |\langle p_f | \phi_A \rangle_{in}|^2$$

$$d\sigma = \int d^3 \vec{k} dP(\vec{k}) = \int d^3 k \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 2E_f} \int \frac{d^3 k_i \phi(k_i)}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_i}} \int \frac{d^3 \bar{k}_i \phi(\bar{k}_i)}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_i}} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{k}_i - \bar{k}_i)} \times$$

$$(2\pi)^{-6} \times \langle p_f | k_i \rangle_{in} \langle p_f | \bar{k}_i \rangle_{in}^*$$

Dado que: $\langle p_f | k_i \rangle_{in} = i \mathcal{M} 2\pi \delta(E_f - E_i)$
 $\langle p_f | \bar{k}_i \rangle_{in}^* = -i \mathcal{M}^* 2\pi \delta(E_f - E_i)$

$$\int d^3 k e^{i\vec{k} \cdot (\vec{k}_i - \bar{k}_i)} = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k}_i - \bar{k}_i)$$

$$\delta(E_f - E_i) \delta(E_f - E_i) = \delta(E_f - E_i) \frac{\delta(\vec{k}_i^z - \bar{k}_i^z)}{|\frac{\vec{k}_i^z}{E_i}|}$$

× $\mathcal{M}(p_i \rightarrow p_f)$

$$\int \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 2E_f} 2\pi \delta(E_f - E_i) = d\Omega \int \frac{dp_r p_r^2}{8\pi^2 E_f} \frac{E_f}{p_r} \delta(p_f - p_i) = \frac{d\Omega}{8\pi} \int dp_r p_r \delta(p_f - p_i)$$

Mais uma vez assumimos que: $|\phi(k_i)|^2 = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k}_i - \vec{p}_i)$ → cancela o que ainda tinha de potência de 2π por aí

$$\therefore \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{v_i E_i} \int dp_r p_r \delta(p_f - p_i) |\mathcal{M}(p_i \rightarrow p_f)|^2$$

(eq. 64.1)

No caso de um núcleo de carga Z e teremos: $A_0(\vec{r}) = + \frac{Ze}{4\pi r} \longrightarrow A_0(\vec{q}) = \frac{Ze}{|\vec{q}|^2}$

$$i\mathcal{M} = -ie \bar{u}(p_f) \gamma^\mu u(p_i) A_\mu(\vec{p}_f - \vec{p}_i) = -ie^2 \frac{\bar{u}(p_f) \gamma^0 u(p_i)}{|\vec{p}_f - \vec{p}_i|^2}$$

No limite não relativístico, como já vimos:

$$\bar{u}^{s'}(p_f) \gamma^0 u^s(p_i) = 2m \delta^{ss'}$$

$$\bar{u}^{s'}(p_f) \gamma^0 u^s(p_i) = \bar{u}^{s'}(p_f) \gamma^0 (\gamma^0)^\dagger (\gamma^0) u^s(p_i) = \bar{u}^{s'}(p_f) \gamma^0 u^s(p_i)$$

$$\therefore |iM|^2 = Z^2 e^4 \frac{4m^2 \delta^{ss'} \delta^{s's'}}{|\vec{p}_f - \vec{p}_i|^4} = Z^2 e^4 \frac{\bar{u}^{s'}(p_f) \gamma^0 u^s(p_i) \bar{u}^{s'}(p_i) \gamma^0 u^s(p_f)}{|\vec{p}_f - \vec{p}_i|^4}$$

Temos que tirar a média sobre spins iniciais e somar sobre os finais (já que não estamos considerando feixes polarizados nem observando a polarização final, veremos uma justificativa para isso em seguida):

$$\frac{1}{2} \sum_{ss'} |M|^2 = \frac{Z^2 e^4 m^2}{|\vec{p}_f - \vec{p}_i|^4}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{ss'} \delta^{ss'} \delta^{s's'} = 1$$

$$|\vec{p}_f + \vec{p}_i - 2p_i \cos\theta| = \sqrt{2p_i^2 - 2p_i^2 \cos\theta} = 2p_i \sin(\theta/2)$$

(eq. 64.1)

$$\delta(p_f - p_i) \Rightarrow |\vec{p}_f| = |\vec{p}_i| \Rightarrow |\vec{p}_f - \vec{p}_i| = 2p_i \sin(\theta/2) \simeq 2m v_i \sin(\theta/2)$$

Enfim:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{v_i E_i} \frac{m v_i}{m v_i} \frac{Z^2 e^4 m^2}{(2m v_i \sin(\theta/2))^4} = \frac{Z^2 \alpha^2}{4m^2 v_i^4 \sin^4(\theta/2)} \quad (\text{eq. 65.1})$$

que é o resultado obtido por Rutherford em 1911.

Espalhamento $e^+e^- \rightarrow \ell\bar{\ell}$ despolarizado

(Nastase 24; Peskin 5.1)

Agora que já reproduzimos alguns resultados clássicos conhecidos vamos atacar um espalhamento novo, a aniquilação elétron-pósitron em léptons, que é intrinsecamente quântica e relativística.

$$\begin{aligned} \text{Lépton: } \ell &\equiv e^-, \mu^-, \tau^-, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau \\ \bar{\ell} &\equiv e^+, \mu^+, \tau^+, \bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\mu, \bar{\nu}_\tau \end{aligned} \quad (\text{eq. 65.2})$$

Se consideramos apenas a QED podemos esquecer dos neutrinos (já que não tem carga elétrica nenhum vértice nesta teoria os envolve). O caso em que $\ell = e^-$ é chamado de Espalhamento Bhabha e tem dois diagramas (ordem e^2):

