

$$\bar{u}^{s'}(p_f) \gamma^0 u^s(p_i) = 2m \delta^{ss'}$$

$$\bar{u}^{s'}(p_f) \gamma^0 u^s(p_i) = \bar{u}^{s'}(p_f) \gamma^0 (\gamma^0)^\dagger u^s(p_i) = \bar{u}^{s'}(p_f) \gamma^0 (\gamma^0) u^s(p_i) = \bar{u}^{s'}(p_f) \delta^0 u^s(p_i)$$

$$\therefore |iM|^2 = Z^2 e^4 \frac{4m^2 \delta^{ss'} \delta^{s's'}}{|\vec{p}_f - \vec{p}_i|^4} = Z^2 e^4 \frac{\bar{u}^{s'}(p_f) \gamma^0 u^s(p_i) \bar{u}^s(p_i) \gamma^0 u^{s'}(p_f)}{|\vec{p}_f - \vec{p}_i|^4}$$

Temos que tirar a média sobre spins iniciais e somar sobre os finais (já que não estamos considerando feixes polarizados nem observando a polarização final, veremos uma justificativa para isso em seguida):

$$\frac{1}{2} \sum_{ss'} |M|^2 = \frac{Z^2 e^4 m^2}{|\vec{p}_f - \vec{p}_i|^4}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{ss'} \delta^{ss'} \delta^{s's'} = 1$$

$$|\vec{p}_f + \vec{p}_i - 2p_i \cos\theta| = \sqrt{2p_i^2 - 2p_i^2 \cos\theta} = 2p_i \sin(\theta/2)$$

(eq. 64.1)

$$\delta(p_f - p_i) \Rightarrow |\vec{p}_f| = |\vec{p}_i| \Rightarrow |\vec{p}_f - \vec{p}_i| = 2p_i \sin(\theta/2) \simeq 2m v_i \sin(\theta/2)$$

Enfim:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{v_i E_i} \frac{m v_i}{Z^2 e^4 m^2} \frac{Z^2 e^4 m^2}{(2m v_i \sin(\theta/2))^4} = \frac{Z^2 \alpha^2}{4m^2 v_i^4 \sin^4(\theta/2)} \quad \text{(eq. 65.1)}$$

que é o resultado obtido por Rutherford em 1911.

Espalhamento $e^+e^- \rightarrow \ell\bar{\ell}$ despolarizado

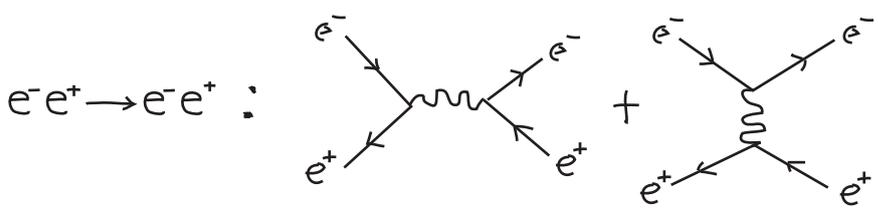
(Nastase 24; Peskin 5.1)

Agora que já reproduzimos alguns resultados clássicos conhecidos vamos atacar um espalhamento novo, a aniquilação elétron-pósitron em léptons, que é intrinsecamente quântica e relativística.

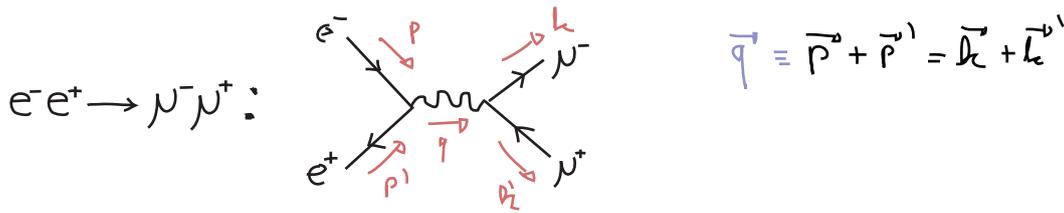
$$\text{Lépton: } \ell \equiv e^-, \mu^-, \tau^-, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$$

$$\bar{\ell} \equiv e^+, \mu^+, \tau^+, \bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\mu, \bar{\nu}_\tau \quad \text{(eq. 65.2)}$$

Se consideramos apenas a QED podemos esquecer dos neutrinos (já que não tem carga elétrica nenhum vértice nesta teoria os envolve). O caso em que $\ell = e^-$ é chamado de Espalhamento Bhabha e tem dois diagramas (ordem e^2):



No caso em que $l = \mu, \tau$ temos apenas o primeiro diagrama. Realizaremos o cálculo para o muon, mas a única coisa que muda para o τ é a massa.



Note que para criar o par de léptons final eu preciso ter uma energia mínima inicial:

$$E_{cm} > 2m_l \quad (\text{eq. 66.1})$$

o que significa:

{	energia inicial	estados finais possíveis (ignorando a produção de quarks)
	$E_{cm} < 2m_\mu$	e^-e^+
	$2m_\mu \leq E_{cm} < 2m_\tau$	$e^-e^+; \mu^-\mu^+$
	$E_{cm} \geq 2m_\tau$	$e^-e^+; \mu^-\mu^+; \tau^-\tau^+$

Usando as regras de Feynman para o diagrama acima obtemos:

$$i\mathcal{M} = \bar{v}^{s'}(p')(-ie\gamma^\mu) u^s(p) \left(\frac{-i\eta^{\mu\nu}}{q^2 - i\epsilon} \right) \bar{u}^r(k) (-ie\gamma^\nu) v^{r'}(k') =$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$ não importa aqui porque não estamos integrando em q e, por conservação de momento, $q^2 \neq 0$

$$= +\frac{ie^2}{q^2} (\bar{v}^{s'}(p')\gamma^\mu u^s(p)) (\bar{u}^r(k)\gamma_\mu v^{r'}(k'))$$

$$(\bar{v} \gamma^\mu u)^* = (\bar{v} \gamma^\mu u)^\dagger = u^\dagger \gamma^{\mu\dagger} (v^\dagger \gamma^0)^\dagger = u^\dagger \gamma^{\mu\dagger} \underbrace{\gamma^0}_{\gamma^{0\dagger} = \gamma^0} \underbrace{v}_{\gamma^{0\dagger} \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^0} = \bar{u} \gamma^\mu v$$

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{q^4} (\bar{v}^{s'}(p')\gamma^\mu u^s(p)) (\bar{u}^r(k)\gamma_\mu v^{r'}(k')) (\bar{v}^{r'}(k')\gamma_\nu u^r(k)) (\bar{u}^s(p)\gamma^\nu v^{s'}(p'))$$

(eq. 66.2)

Somas de Spin e Polarização

Frequentemente estaremos calculando espalhamentos entre onde:

- (1) Temos partículas sem qualquer polarização definida no início
- (2) Queremos saber a probabilidade de espalhamento, independentemente da direção do momento angular final

Para dar conta de um estado inicial totalmente “despolarizado” o que podemos fazer é escrever (estamos pensando em uma única partícula sendo espalhada por alguma coisa “externa”):

$$P(|N_i = \uparrow\rangle) = P(|N_i = \downarrow\rangle) = \frac{1}{2}$$

E queremos obter uma probabilidade total que é:

$$P(|N_i \rightarrow \uparrow\rangle) + P(|N_i \rightarrow \downarrow\rangle)$$

Acontece que, para o estado inicial despolarizado acima:

$$P(|N_i \rightarrow \uparrow\rangle) = \frac{1}{2} P(\uparrow \rightarrow \uparrow) + \frac{1}{2} P(\downarrow \rightarrow \uparrow)$$

De forma que enfim:

$$\begin{aligned} P_{\text{TOTAL}} &= \frac{1}{2} P(\uparrow \rightarrow \uparrow) + \frac{1}{2} P(\downarrow \rightarrow \uparrow) + \frac{1}{2} P(\uparrow \rightarrow \downarrow) + \frac{1}{2} P(\downarrow \rightarrow \downarrow) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{s, r = \uparrow, \downarrow} P(s \rightarrow r) \end{aligned}$$

Na (densidade de) probabilidade final, somamos sobre os spins finais e tiramos uma média sobre os iniciais (o mesmo acontece com qualquer outro número quântico que não observamos, por exemplo a “cor” da QCD)

Na prática, estas somas sobre spins externos, haja visto as regras 146.1, vão nos levar a calcular expressões do tipo:

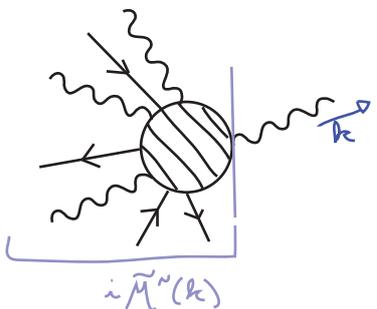
$$\begin{aligned} \sum_{s=1,2} u^s(p) \bar{u}^s(p) &= \sum_s \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi^s \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^{s\dagger} \sqrt{p \cdot \sigma} & \xi^{s\dagger} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \end{pmatrix} \underbrace{\gamma^0}_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} = \\ &= \sum_s \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi^s \xi^{s\dagger} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} & \sqrt{p \cdot \sigma} \xi^s \xi^{s\dagger} \sqrt{p \cdot \sigma} \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^s \xi^{s\dagger} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} & \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^s \xi^{s\dagger} \sqrt{p \cdot \sigma} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} m & p \cdot \sigma \\ p \cdot \bar{\sigma} & m \end{pmatrix} = \not{p} + m \hat{1} \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\sum_s u^s(p) \bar{u}^s(p) = \not{p} + m} \quad (\text{eq. 67.1})$$

Analogamente:

$$\boxed{\sum_s v^s(p) \bar{v}^s(p) = \not{p} - m} \quad (\text{eq. 67.2})$$

No caso dos fótons, o momento angular intrínseco carregado é codificado nos vetor de polarização, então conforme o espalhamento estudado é preciso somar ou tirar a média sobre as polarizações. O caso do fóton é um pouco mais complicado que o dos férmions, pois em geral temos polarizações não-físicas em ϵ_μ . Notemos, no entanto que cada fóton externo vai estar ligado em um diagrama mais geral da seguinte forma:



$$= i \mathcal{M}(k) \equiv i \tilde{\mathcal{M}}^\nu(k) \epsilon_\nu^*(k)$$

então, se estivermos somando sobre as polarizações a seção de choque incluirá:

$$\sum_{\epsilon} |\mathcal{M}|^2 = \sum_{\epsilon} |\epsilon_\nu^*(k) \tilde{\mathcal{M}}^\nu(k)|^2 = \sum_{\epsilon} \epsilon_\nu^* \epsilon_\nu \tilde{\mathcal{M}}^\nu(k) \mathcal{M}^{\nu*}(k)$$

podemos escolher uma direção para k e somar só sobre as polarizações físicas:

$$k^\mu = (k, 0, 0, k) \quad \sum_{\epsilon} \rightarrow \sum_{\epsilon=1,2} \leftrightarrow \begin{aligned} \epsilon_1^\nu &= (0, 1, 0, 0) \\ \epsilon_2^\nu &= (0, 0, 1, 0) \end{aligned}$$

$$\sum_{\epsilon} |\mathcal{M}|^2 = |\tilde{\mathcal{M}}^1(k)|^2 + |\tilde{\mathcal{M}}^2(k)|^2 \quad (\text{eq. 68.1})$$

mas seria mais conveniente manter a invariância relativística explícita. Isso é possível lembrando da identidade de Ward (que será provada com mais rigor em campos II, veja Peskin sec 7.4):

$$k_\nu \tilde{\mathcal{M}}^\nu(k) = 0$$

no referencial acima esta equação fica: $k \tilde{\mathcal{M}}^0(k) - k \tilde{\mathcal{M}}^3(k) = 0 \Rightarrow \tilde{\mathcal{M}}^0(k) = \tilde{\mathcal{M}}^3(k)$ (eq. 68.2)

logo:

$$\sum_{\epsilon} |\mathcal{M}|^2 = |\tilde{\mathcal{M}}^1(k)|^2 + |\tilde{\mathcal{M}}^2(k)|^2 + \overbrace{|\tilde{\mathcal{M}}^3(k)|^2 - |\tilde{\mathcal{M}}^0(k)|^2}^0$$

$$\sum_{\epsilon} \epsilon_\nu^* \epsilon_\nu \tilde{\mathcal{M}}^\nu(k) \tilde{\mathcal{M}}^{\nu*}(k) = -g_{\nu\nu} \tilde{\mathcal{M}}^\nu(k) \tilde{\mathcal{M}}^{\nu*}(k) \quad (\text{eq. 68.3})$$

que vale em qualquer referencial. Como não especificamos $\tilde{\mathcal{M}}$ a conclusão é que em geral podemos fazer a soma através da substituição:

$$\sum_{\epsilon} \epsilon_\nu^* \epsilon_\nu \rightarrow -g_{\nu\nu} \quad (\text{eq. 68.4})$$

Voltando a nosso calculo, queremos obter a chamada **seção de choque despolarizada** para produção de muons. Usando as somas de spins (eqs. 67.1 e 67.2):

$$\sum_S u_i^S(p) \bar{u}_j^S(p) = \not{p}_{ij} + m \hat{1}_{ij} \quad \sum_S v_i^S(p) \bar{v}_j^S(p) = \not{p}_{ij} - m \hat{1}_{ij}$$

Explicitando os índices spinoriais em 66.2 temos:

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4^4} (\bar{u}_i^{s'}(p') \gamma_{ij}^\mu u_j^s(p)) (\bar{u}_k^\pi(k) \gamma_{kl}^\nu u_l^{\pi'}(k')) (\bar{u}_m^{\pi'}(k') \gamma_{mn}^\rho u_n^\pi(k)) (\bar{u}_o^s(p) \gamma_{op}^\nu u_p^{s'}(p'))$$

$$\frac{1}{2} \sum_s \frac{1}{2} \sum_{s'} \sum_\pi \sum_{\pi'} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4^4} \gamma_{ij}^\mu \gamma_{kl}^\nu \gamma_{mn}^\rho \gamma_{op}^\nu (\not{k}' - m_\mu)_{lm} (\not{k} + m_\nu)_{nk} (\not{k} + m_\rho)_{jo} (\not{k}' - m_\rho)_{pi}$$

$\text{Tr}[\gamma_\mu (\not{k}' - m_\mu) \gamma_\nu (\not{k} + m_\nu)]$ $\text{Tr}[\gamma^\mu (\not{k} + m_\mu) \gamma^\nu (\not{k}' - m_\nu)]$

estes traços não são coincidência, notem que aparece um deles por linha fermiônica e isto vai sempre acontecer.

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{SPINS}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4^4} \text{Tr}[\gamma_\mu (\not{k}' - m_\mu) \gamma_\nu (\not{k} + m_\nu)] \text{Tr}[\gamma^\mu (\not{k} + m_\mu) \gamma^\nu (\not{k}' - m_\nu)] \quad (\text{eq. 69.1})$$

Para calcular os traços acima precisamos desenvolver um certo arsenal de identidades envolvendo matrizes de Dirac (note que há até quatro delas em cada traço). Fazemos uma pausa no presente cálculo para desenvolver este arsenal.

Identidades com Matrizes de Dirac

Dado que: $(\gamma^5)^2 = 1$
 $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$ } propriedades independentes de representação

$$\text{Tr}[\gamma^\mu] = \text{Tr}[(\gamma^5)^2 \gamma^\mu] = -\text{Tr}[\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^5] = -\text{Tr}[\gamma^\mu] = 0$$

CICLIZAR DE

$$\text{Tr}[\gamma^5] = \text{Tr}[\pm (\gamma^\mu)^2 \gamma^5] = \text{Tr}[\pm \gamma^\mu \gamma^5 \gamma^\mu] = -\text{Tr}[\gamma^5] = 0$$

depende de repr. e de $\mu \rightarrow (\gamma^\mu)^2 = \pm 1$

$$\text{Tr}[\gamma^\mu] = \text{Tr}[\gamma^5] = 0 \quad (\text{eq. 69.2})$$

Note que o mesmo que fizemos para provar as identidades acima poderia ser usado para provar:

$$\text{Tr}[\underbrace{\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \dots \gamma^p}_{\text{ímpar}}] = 0 \quad (\text{eq. 69.3})$$

$$\text{Tr}[\gamma^5 \gamma^5 \dots \gamma^5] = \text{Tr}[\gamma^5] = 0 \quad (\text{eq. 69.4})$$

$$\boxed{\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu]} = \text{Tr} \left[\frac{1}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu + \frac{1}{2} \overset{\text{CICL.}}{\gamma^\nu \gamma^\mu} \right] = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\underbrace{\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}}_{2g^{\mu\nu} \cdot \hat{1}_{4 \times 4}} \right] = 4g^{\mu\nu} \quad (\text{eq. 70.1})$$

De uma forma geral, o que fazemos com um produto de matrizes de Dirac é expandir na base:

$$\mathcal{V}_{\mathbb{F}} = \{ \hat{1}, \gamma^5, \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma^5, \gamma^{\mu\nu} \}$$

e vale: $\boxed{\mathcal{V}_{\mathbb{F}} \neq \hat{1} \leftrightarrow \text{Tr}[\mathcal{V}_{\mathbb{F}}] = 0}$ (eq. 70.2)

Já provamos isso para o segundo e o terceiro e: $\text{Tr}[\underbrace{\gamma^\mu \gamma^5}_{(-1)}] = -\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^5] = 0$

$$\text{Tr}[\gamma^{\mu\nu}] \leftarrow \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu] = 4g^{\mu\nu} - 4g^{\nu\mu} = 0$$

Produtos mais complicados podem ser expandidos na base usando:

$$\begin{aligned} \gamma^{\mu\nu} \gamma^5 &= -\frac{i}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_{\rho\sigma} \\ \gamma^{\mu\nu\rho} &= -i \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_\sigma \\ \gamma^{\mu\nu\rho} \gamma_5 &= -i \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_\sigma \\ \gamma^{\mu\nu\rho\sigma} &= i \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_5 \end{aligned} \quad (\text{eq. 70.3})$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\underbrace{\gamma^\mu \gamma^\nu}_{2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu} \gamma^\rho \gamma^\sigma] &= \text{Tr}[(2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu) \underbrace{\gamma^\rho \gamma^\sigma}_{g^{\rho\sigma} - \gamma^\sigma \gamma^\rho}] = \\ &= \text{Tr}[2g^{\mu\nu} \underbrace{\gamma^\rho \gamma^\sigma}_{\text{Tr}[\gamma^\rho \gamma^\sigma] = 4g^{\rho\sigma}} - 2g^{\mu\rho} \gamma^\nu \gamma^\sigma + 2g^{\mu\sigma} \gamma^\nu \gamma^\rho] - \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] \\ 2\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] &= 2[4g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - 4g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + 4g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}] \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma]} = 4[g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}] \quad (\text{eq. 70.4})$$

Como $\gamma^5 = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$

$$\boxed{\text{Tr}[\underbrace{\gamma^\mu \dots \gamma^\nu}_{\text{ÍMPAR}} \gamma^5]} = 0 \quad (\text{eq. 70.4})$$

Já o produto com 2 γ_s :

$$\text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5] = \text{Tr} [\underbrace{\pm (\gamma^\alpha)^2}_{\substack{\text{cicl} \\ \alpha \neq \mu; \alpha \neq \nu}} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5] = -\text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5] = 0 \quad (\text{eq. 71.1})$$

o que não funciona para 4 γ_s , caso sejam as 4 diferentes, uma vez que já não existe uma quinta para inserir como identidade.

$$\text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^5]$$

$\{\mu, \nu, \alpha, \beta\} = \text{alguma perm. de } \{0, 1, 2, 3\}$ \Leftarrow antissim sobre a troca de quaisquer dois índices

$$\text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^5] \propto \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \left(\text{para achar a constante de proporcionalidade basta escolher uma das permutações, ex: } \{\mu, \nu, \alpha, \beta\} = \{0, 1, 2, 3\} \right)$$

$$\text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^5] = 4i \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \quad (\text{eq. 71.2})$$

Também é útil conhecer as contrações entre os ϵ_s :

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = 4! \epsilon^{0123} \epsilon_{0123} = -24$$

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\mu} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\nu} = 3! \delta_\nu^\mu \epsilon^{0123} \epsilon_{0123} = -6 \delta_\nu^\mu$$

$$\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \epsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} = 2! (\delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu - \delta_\sigma^\mu \delta_\rho^\nu) \epsilon^{0123} \epsilon_{0123} = -2 (\delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu - \delta_\sigma^\mu \delta_\rho^\nu)$$

e notar que é possível inverter a ordem das γ_s no traço:

$$\begin{aligned} \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \dots] &= \text{Tr} [\underbrace{C \gamma^\mu C^{-1}}_{\hat{1} = C^{-1}C} C \gamma^\nu C^{-1} \dots \gamma^\rho C^{-1}] = (-1)^n \text{Tr} [\gamma^{\mu T} \gamma^{\nu T} \dots] = \\ &= (-1)^n \text{Tr} [(\dots \gamma^\nu \gamma^\mu)^T] = (-1)^n \text{Tr} [\dots \gamma^\nu \gamma^\mu] \end{aligned}$$

\hookrightarrow se n é ímpar o traço é zero.

$$\text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \dots] = \text{Tr} [\dots \gamma^\nu \gamma^\mu] \quad (\text{eq. 71.3})$$

Finalmente, listamos algumas contrações entre γ_s que nos permitem simplificar o argumento do traço antes de fazê-lo:

$$g_{\mu\nu} (\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}) \Rightarrow \gamma^\mu \gamma_\mu = \delta^\mu_\mu = 4 \quad (\text{eq. 71.4})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_\mu + 2g^{\mu\nu} \gamma_\mu = -2\gamma^\nu \quad (\text{eq. 71.5})$$

Seção de Choque no ref. do CM

Dado que: $2E_e > 2m_\mu \sim 400 m_e$ estamos falando de elétrons ultra-relativísticos e podemos desprezar sua massa, ou seja, no centro de massa:

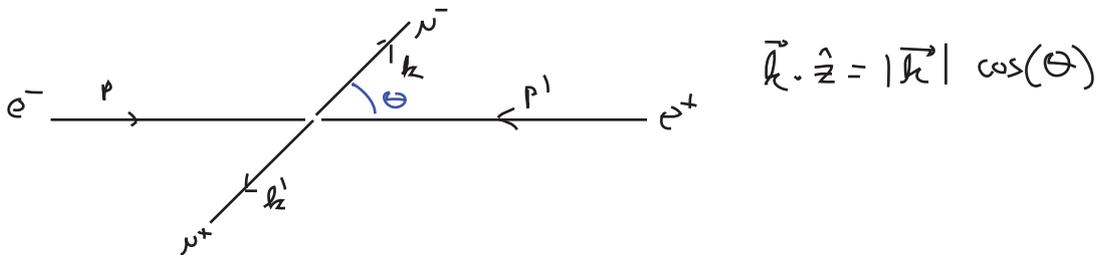
$$p = (E, E\hat{z}) \quad p' = (E, -E\hat{z})$$

Como a massa do muon e do anti-muon são iguais: $E_\mu = E_{\mu^+} = E$

(conserv. energia) $2E = E_{\mu^-} + E_{\mu^+}$ $m_\mu = m_{\mu^+}$
 (conserv. momento) $0 = \vec{k} + \vec{k}' \Rightarrow |\vec{k}| = |\vec{k}'| \Rightarrow E_{\mu^-} = E_{\mu^+}$ } $2E_\mu = 2E$

Então: $k = (E, \vec{k}) \quad k' = (E, -\vec{k})$
 $|\vec{k}| = \sqrt{E^2 - m_\mu^2}$

Definimos então o ângulo entre os elétrons e os muons:



$$q^2 = (p + p')^2 = \underbrace{p_\mu p^\mu}_0 + \underbrace{p'_\mu p'^\mu}_0 + 2 p_\mu p'^\mu = 4E^2 \quad (\text{eq. 73.1})$$

$0 \sim m_e \rightarrow 0$

$$p_\mu p'^\mu = (E^2 + E^2) = +2E^2 \quad (\text{eq. 73.2})$$

$$\begin{aligned} p \cdot k &= p' \cdot k' = +E^2 - \vec{k} \cdot (E\hat{z}) = +E^2 - E|\vec{k}|\cos\theta \\ p \cdot k' &= p' \cdot k = +E^2 + \vec{k} \cdot (E\hat{z}) = +E^2 + E|\vec{k}|\cos\theta \end{aligned} \quad (\text{eq. 73.3})$$

Voltando com estas identidades em 72.3, temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\text{SPINS}} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{8e^4}{(4E)^4} \left[\underbrace{(+E^2 + E|\vec{k}|\cos\theta)^2}_{E^2 (E + |\vec{k}|\cos\theta)^2} + \underbrace{(+E^2 - E|\vec{k}|\cos\theta)^2}_{E^2 (E - |\vec{k}|\cos\theta)^2} + m_\mu^2 (2E^2) \right] = \\ &= \frac{e^4}{4E^2} \left[\underbrace{(E + |\vec{k}|\cos\theta)^2 + (E - |\vec{k}|\cos\theta)^2}_{2E^2 + 2|\vec{k}|^2 \cos^2\theta} + 2m_\mu^2 \right] = \\ &= e^4 \left[1 + \frac{m_\mu^2}{E^2} + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) \cos^2\theta \right] \quad (\text{eq. 73.4}) \end{aligned}$$