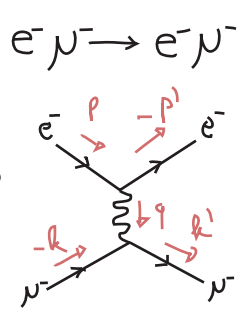


$$\begin{aligned} \bar{s} &= (p+p')^2 \\ \bar{t} &= (k-p)^2 \\ \bar{u} &= (p-k')^2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} s &= (p-k)^2 = \bar{t} \\ t &= (-p'-p)^2 = \bar{s} \\ u &= (-p'+k)^2 = \bar{u} \end{aligned}$$

⇒

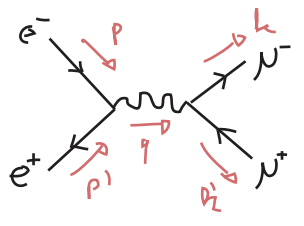
Logo podemos fazer o crossing direto nas variáveis de Mandelstam e obter:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)|^2 = \frac{8e^4}{s^2} \left[\left(\frac{t}{2}\right)^2 + \left(\frac{u}{2}\right)^2 \right]$$

$$\begin{matrix} s \rightarrow t \\ t \rightarrow s \\ u \rightarrow u \end{matrix} \Rightarrow \frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}(e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-)|^2 = \frac{8e^4}{t^2} \left[\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{u}{2}\right)^2 \right]$$

Estrutura de Helicidade em um referencial específico

Façamos novamente o cálculo da seção de choque polarizada de uma forma mais explícita e mais esclarecedora (ainda que mais trabalhosa). Voltamos à amplitude:



$$\mathcal{M} = \frac{e^2}{q^2} (\bar{v}^{s'}(p') \gamma^\mu u^s(p)) (\bar{u}^r(k) \gamma_\mu v^{r'}(k'))$$

No limite: $E_{cm} \gg m_e$

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma^1} \xi \\ \sqrt{p \cdot \sigma^3} \xi \end{pmatrix} \xrightarrow{E \rightarrow \infty} \sqrt{2E} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (1 - \hat{p} \cdot \vec{\sigma}) \xi \\ \frac{1}{2} (1 + \hat{p} \cdot \vec{\sigma}) \xi \end{pmatrix}$$

$$p = (E, E\hat{p}) \Rightarrow \begin{aligned} p \cdot \sigma &= E(1 - \hat{p} \cdot \vec{\sigma}) \\ p \cdot \bar{\sigma} &= E(1 + \hat{p} \cdot \vec{\sigma}) \end{aligned} \quad \left(\frac{\sqrt{2E}}{2} (1 - \hat{p} \cdot \vec{\sigma}) \right)^2 = \frac{E}{2} (1 - 2\hat{p} \cdot \sigma + \hat{p} \cdot \sigma \hat{p} \cdot \sigma) = E(1 - \hat{p} \cdot \vec{\sigma})$$

(Peskin eqs. 3.49 a 3.54)

$$v^r(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma^1} \xi \\ -\sqrt{p \cdot \sigma^3} \xi \end{pmatrix} \xrightarrow{E \rightarrow \infty} \sqrt{2E} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (1 - \hat{p} \cdot \vec{\sigma}) \xi \\ -\frac{1}{2} (1 + \hat{p} \cdot \vec{\sigma}) \xi \end{pmatrix}$$

Dada uma direção para o momento:

"mão direita" $\rightarrow (\hat{p} \cdot \vec{\sigma}) \xi^R = +\xi^R$

"mão esquerda" $\rightarrow (\hat{p} \cdot \vec{\sigma}) \xi^L = -\xi^L$

$\hat{p} = \hat{z} \Rightarrow \hat{p} \cdot \sigma = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
 "mão direita" $\rightarrow \xi^R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
 "mão esquerda" $\rightarrow \xi^L = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lembrando que para anti-partículas a quiralidade do spinor é o oposto da partícula (uma vez que o operador de criação associado produz uma partícula com todos números quânticos invertidos):

anti-partícula de "mão direita" $\rightarrow (\hat{p}' \cdot \vec{\sigma}) \xi^{L'} = -\xi^{L'}$
 espinor de esquerda

anti-partícula de "mão esquerda" $\rightarrow (\hat{p}' \cdot \vec{\sigma}) \xi^{R'} = +\xi^{R'}$
 espinor de direita

mas que também temos que tomar cuidado com o sentido oposto do momento (no ref. do CM):

$\vec{p}' = -\vec{p} \Rightarrow$
 $(\hat{p}' \cdot \vec{\sigma}) \xi^{R'} = \xi^{R'}$ $(\hat{p}' \cdot \vec{\sigma}) \xi^{L'} = -\xi^{L'}$
 $(\hat{p} \cdot \vec{\sigma}) \xi^R = -\xi^R$ $(\hat{p} \cdot \vec{\sigma}) \xi^L = \xi^L$
 $\xi^{R'} = \xi^L$ $\xi^{L'} = \xi^R$

Logo a linha do elétron:

$\bar{v}^{s'}(p') \gamma^\mu u^s(p) = \bar{v}^{s'}(p') \gamma^\mu \gamma^5 u^s(p) =$
 $= 2E \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 - \hat{p}' \cdot \vec{\sigma}) \xi^{s'} & -\frac{1}{2}(1 + \hat{p}' \cdot \vec{\sigma}) \xi^{s'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\sigma}^\mu & 0 \\ 0 & \sigma^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 - \hat{p} \cdot \vec{\sigma}) \xi^s \\ \frac{1}{2}(1 + \hat{p} \cdot \vec{\sigma}) \xi^s \end{pmatrix}$

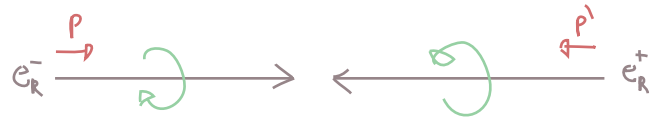
Vai ser zero se um dos espinores for de mão esquerda e outro de direita:

(equivalendo a um par de partícula - anti-partícula de mesma quiralidade)

$\left. \begin{matrix} s' = R' \\ s = L \end{matrix} \right\} \Rightarrow 2E \begin{pmatrix} 0 & -\xi^{R'} \\ 0 & \sigma^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\sigma}^\mu & 0 \\ 0 & \sigma^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^L \\ 0 \end{pmatrix} = 0$



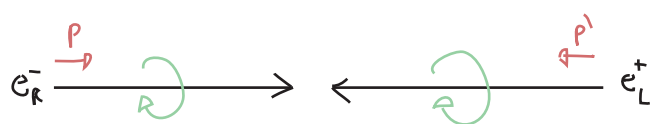
$\left. \begin{matrix} s' = L' \\ s = R \end{matrix} \right\} \Rightarrow 2E \begin{pmatrix} \xi^{L'} & 0 \\ 0 & \sigma^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\sigma}^\mu & 0 \\ 0 & \sigma^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi^R \end{pmatrix} = 0$



Tomemos a direção inicial no eixo z: $\hat{p} = \hat{z}$

e consideremos um elétron de mão direita ($s = R$) e um positron de mão esquerda ($s' = R' = L$):

$\xi^S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (\hat{p} \cdot \vec{\sigma}) \xi^S = \sigma_3 \xi^S = \xi^S$



$$\xi^{s'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (\hat{p}' \cdot \vec{\sigma}) \xi^{s'} = \underbrace{-\sigma_3}_{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \xi^{s'} = \xi^{s'}$$

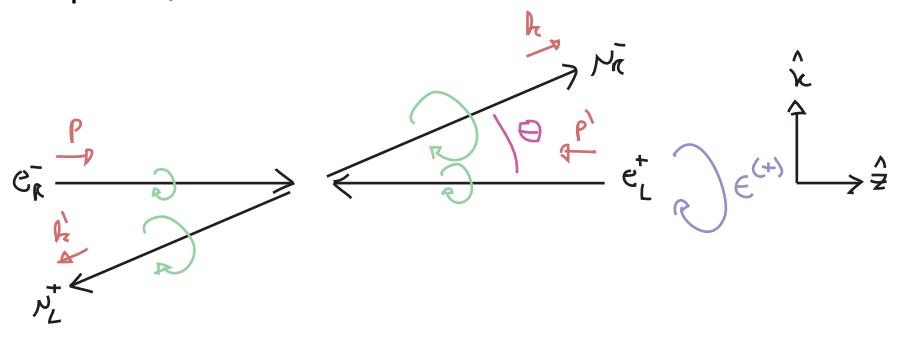
$$u(p) = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v(p') = \sqrt{2E'} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{v}(p') \gamma^\mu u(p) = 2E \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma^0 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix}}_{\text{vetores de Dirac}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2E \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & i & 0 \end{pmatrix}}_{\text{vetor de Lorentz}} \quad (\text{eq. 84.1})$$

o que nos leva a interpretação de que o fóton virtual **emitido** vai ter uma polarização circular:

$$\epsilon^{(+)\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} + i\hat{y})$$

Resta fazer o mesmo para a linha do muon, consideremos o muon da mão direita (e anti-muon de mão esquerda):



Poderíamos refazer toda a conta para o muon, mas isto iria ser complicado por conta da direção do momento, é bem mais fácil fazer uma rotação no resultado 84.1 (que se comporta como um vetor):

$$\bar{u}(k) \gamma^\mu v(k') = (\bar{u}(k') \gamma^\mu u(k))^* = [-2E \langle 0, \cos \theta, i, -\sin \theta \rangle]^* = -2E \langle 0, \cos \theta, -i, -\sin \theta \rangle \quad (\text{eq. 84.2})$$

que pode ser vista como a polarização do foton virtual **absorvido**. Se a projeção desta em 84.1 for zero a amplitude será zero. Nossa amplitude ficou:

$$\mathcal{M}(e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+) = \frac{e^2 (2E)^2}{q^2} (-\cos \theta - 1) = -e^2 (1 + \cos \theta) \quad (\text{eq. 84.3})$$

o que concorda com o resultado obtido na página 79. Podemos fazer a mesma conta invertendo as helicidades:

$$e^- e^+ \rightarrow \bar{v}(p') \gamma^\mu u(p) = -2E \langle 0, 1, -i, 0 \rangle = -2E \sqrt{2} \epsilon^{(-)\mu} \quad (\text{eq. 84.4})$$

$$\bar{\nu}_L^- \nu_R^+ \rightarrow \bar{u}(k) \gamma^\mu \nu(k') = -2E (0, \cos\theta, i, -\sin\theta) \quad (\text{eq. 85.1})$$

e combinando 84.1, 84.2, 84.4 e 85.1 obtemos as amplitudes que faltam:

$$\mathcal{M}(\bar{e}_L^- e_R^+ \rightarrow N_L^- N_R^+) = -e^2 (1 + \cos\theta) \quad (\text{eq. 85.2})$$

$$\mathcal{M}(\bar{e}_R^- e_L^+ \rightarrow N_L^- N_R^+) = \mathcal{M}(\bar{e}_L^- e_R^+ \rightarrow N_R^- N_L^+) = -e^2 (1 - \cos\theta) \quad (\text{eq. 85.3})$$

Limite não relativístico (para o muon)

Estudemos agora o regime em que $E_{cm} \simeq 2 m_\mu$ $E \simeq m_\mu$

da equação 74.1 temos:

$$\left. \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{cm} = \frac{\alpha^2}{4E_{cm}^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \left[\underbrace{1 + \frac{m_\mu^2}{E^2}}_{\simeq 2} + \underbrace{\left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right)}_{\simeq 0} \cos^2\theta \right] = \right.$$

$$\left. \simeq \frac{\alpha^2}{2E_{cm}^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} = \frac{\alpha^2}{2E_{cm}^2} \frac{|\vec{k}|}{E} \quad (\text{eq. 85.4}) \right.$$

Tratemos os espinores explicitamente, como na seção anterior, para os eletrons nada muda (ainda são ultra relativísticos), da eq. 84.1:

$$\bar{\nu}(p') \gamma^\mu u(p) = -2E (0, 1, i, 0) \simeq -2 m_\mu (0, 1, i, 0)$$

Já no caso dos muons, temos que usar as expressões não relativísticas:

$$u(k) = \sqrt{m_\mu} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix} \quad \nu(k') = \sqrt{m_\mu} \begin{pmatrix} \xi' \\ -\xi' \end{pmatrix}$$

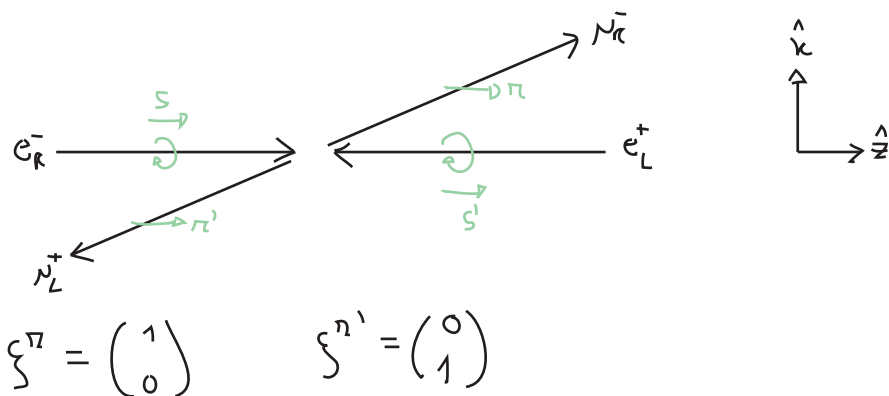
$$\bar{u}(k) \gamma^\mu \nu(k') = m_\mu (\xi^\dagger, \xi^\dagger) \begin{pmatrix} \bar{\sigma}^\mu & 0 \\ 0 & \sigma^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi' \\ -\xi' \end{pmatrix} = \underbrace{\left(0, -2m_\mu \xi^\dagger \vec{\sigma} \xi' \right)}_{\text{vetor de Lorentz}}$$

assim:

$$\mathcal{M}(\bar{e}_R^- e_L^+ \rightarrow N^+ \nu^-) = \frac{e^2}{q^2} \bar{\nu}(p') \gamma^\mu u(p) \bar{u}(k) \gamma_\mu \nu(k') = \frac{e^2}{4m_\mu^2} \cancel{(-2m_\mu)} \xi^\dagger \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\sigma_1 & -i\sigma_2 \end{pmatrix} \xi' =$$

$$= -2e^2 \xi^\dagger \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xi' \quad (\text{eq. 85.5})$$

Não há dependência angular, portanto a distribuição dos muons emitidos é esfericamente simétrica, ou seja, estão sendo emitidos em onda s , com momento angular orbital zero. A conservação do momento angular exige que a soma de spins do estado final seja 1. De fato, o elemento de matriz está dando zero a não ser que tanto o spin do muon quanto do anti-muon estejam alinhados ao longo do eixo z positivo:



Somando sobre os spins dos muons:

$$\sum_{\pi, \pi'} |\mathcal{M}|^2 = 4e^2$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} (e_r^- e_L^+ \rightarrow \mu_r^- \mu_L^+) \right)_{cm} = \frac{1}{2E_{cm}^2} \frac{|\vec{k}|}{16\pi^2 2E} \overbrace{\sum_{\pi, \pi'} |\mathcal{M}|^2}^{4e^2} = \frac{\alpha^2}{E_{cm}^2} \frac{|\vec{k}|}{E}$$

pg 74

O mesmo resultado se aplica se iniciarmos com helicidades invertidas para o elétron e o pósitron. Então:

$$\frac{1}{4} \sum_{\substack{\pi, \pi' \\ s, s'}} |\mathcal{M}|^2 = 2e^2$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} (e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+) \right)_{cm} = \frac{\alpha^2}{2E_{cm}^2} \frac{|\vec{k}|}{E}$$

reproduzindo o resultado de 85.4

Estados Ligados

O que acontece se levarmos em conta que, perto do limiar de produção do par muon - anti-muon, as duas partículas são produzidas quase paradas e a atração coulombiana entre eles se torna importante? De fato, o estado ligado ("muonium") deve ter energia menor do que os dois muons livres, e poderia aparecer abaixo deste limiar. Vejamos como tratar estados ligados no limite não relativístico.

Baseado na discussão acima, sabemos que:

$$\mathcal{M}(\uparrow\uparrow \rightarrow k_1\uparrow, k_2\uparrow) = -2e^2$$

spins na direção z , de forma que o estado ligado tem spin 1 neste sentido

Definimos as coordenadas do centro de massa e relativa:

$$\vec{R} \equiv \frac{1}{2} (\vec{r}_1 + \vec{r}_2) \quad \vec{r} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

e seus momentos conjugados:

$$\vec{K} \equiv \vec{k}_1 + \vec{k}_2 \quad \vec{k} \equiv \frac{1}{2} (\vec{k}_1 - \vec{k}_2)$$

$$\vec{K}_{cm} = 0$$

queremos encontrar

$$\tilde{\Psi}(\vec{k}) = \int d^3x e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \psi(\vec{r})$$

↳ pode ser obtido resolvendo a eq. de Schrödinger para um potencial de Coulomb

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |\tilde{\Psi}(\vec{k})|^2 = 1$$

dada a normalização correta para $\psi(\vec{r})$, $\tilde{\Psi}(\vec{k})$ dá a amplitude de probabilidade de medirmos \vec{k} . Considere o estado ligado B:

$$B \left\{ \begin{array}{l} \text{massa: } M \approx 2m_e \\ \vec{K} = 0 \\ \text{spin: } \uparrow\uparrow \end{array} \right. \quad \text{↳ vou suprimir esta notação}$$

Podemos escrever explicitamente:

$$|B\rangle = \sqrt{2M} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{\Psi}(\vec{k}) \frac{1}{\sqrt{2m}} \frac{1}{\sqrt{2m}} |\vec{k}\uparrow, -\vec{k}\uparrow\rangle$$

(volta para a normalização relativística que usamos na seção de choque)

(compensam a normalização relativística dos estados livres)

$$|B\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{\Psi}(\vec{k}) \frac{1}{2m} |\vec{k}\uparrow, -\vec{k}\uparrow\rangle \Rightarrow \langle B|B\rangle = 1$$

$$|B\rangle \rightarrow \langle B|B\rangle = 2M$$

Com isso podemos imediatamente escrever a amplitude de produção:

$$\langle B|\uparrow\uparrow\rangle \sim \mathcal{M}(\uparrow\uparrow \rightarrow B) = \sqrt{2M} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\tilde{\Psi}^*(\vec{k})}{2m} \underbrace{\mathcal{M}(\uparrow\uparrow \rightarrow \vec{k}\uparrow, -\vec{k}\uparrow)}_{-2e^2} = (-2e^2) \sqrt{\frac{2}{M}} \underbrace{\psi^*(\vec{x}=0)}_{\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{\Psi}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}$$

$$\mathcal{M}(\uparrow\uparrow \rightarrow B) = \sqrt{\frac{2}{M}} (-2e^2) \psi^*(0)$$

(eq. 87.1)

Antes de seguir adiante, vamos generalizar isto para configurações de spin quaisquer. O raciocínio da pg 85 (até a eq. 85.5) vai colocar qualquer elemento da matriz S para produção de férmions não-relativísticos com momentos \vec{k} e $-\vec{k}$ na forma:

$$i\mathcal{M}(\text{ALGO} \rightarrow \vec{k}, \vec{k}') = \xi^\dagger \left[\Gamma(\vec{k}') \right] \xi \quad (\text{eq. 88.1})$$

Onde $\Gamma(\vec{k}')$ é uma matriz 2×2 . Podemos ver a passagem:

$$\mathcal{M}(\uparrow\uparrow \rightarrow k, \vec{k}') = -2e^2 \xi^\dagger \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xi$$



$$\mathcal{M}(\uparrow\uparrow \rightarrow D B) = -2e^2 \sqrt{\frac{2}{M}} \psi^*(0)$$

como uma substituição dos espinores de Weyl por uma função de onda para os spins, feita da seguinte forma:

$$i\mathcal{M}(\text{ALGO} \rightarrow \vec{k}, \vec{k}') = \xi^\dagger \left[\Gamma(\vec{k}') \right] \xi$$



$$i\mathcal{M}(\text{ALGO} \rightarrow \vec{k}, \vec{k}') = \sqrt{\frac{2}{M}} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{\psi}^*(\vec{k}) \text{Tr} \left[\xi \xi^\dagger \Gamma(\vec{k}) \right] \quad (\text{eq. 88.2})$$

Onde $\xi \xi^\dagger$ carregam a informação sobre o estado de spin final, de fato:

$$\xi \xi^\dagger \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{n}^* \cdot \vec{\sigma} \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} + i\hat{y}) \leftrightarrow \uparrow\uparrow \\ \hat{n} = \hat{z} \leftrightarrow (\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow)/\sqrt{2} \\ \hat{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} - i\hat{y}) \leftrightarrow \downarrow\downarrow \end{array} \right\} \text{SPIN } 1$$

$$\xi \xi^\dagger \rightarrow \frac{1_{2 \times 2}}{\sqrt{2}} \leftrightarrow \frac{\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow}{\sqrt{2}} \quad (\text{SPIN } 0)$$

Podemos checar que para $\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} + i\hat{y})$ $\Gamma(\vec{k}') = -2e^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2e^2 (\hat{x} + i\hat{y}) \cdot \vec{\sigma}$

$$\xi \xi^\dagger \rightarrow \frac{1}{2} (\hat{x} - i\hat{y}) \cdot \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Tr} \left[\xi \xi^\dagger \Gamma(\vec{k}') \right] = -2e^2 \Rightarrow \mathcal{M}(\uparrow\uparrow \rightarrow D B) = -2e^2 \sqrt{\frac{2}{M}} \psi^*(0)$$

Produção e decaimento de mésons vetoriais

Podemos re-escrever a eq. 87.1 em uma forma que deixa mais claro o alinhamento entre o vetor de polarização para o spin inicial ϵ_+ e o do estado ligado \hat{n}

$$\epsilon_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} + i\hat{y}) \quad \hat{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} + i\hat{y}) \quad \hat{n}^* \cdot \epsilon_+ = 1$$

$$\mathcal{M}(e^+e^- \rightarrow B) = \sqrt{\frac{2}{M}} (-2e^2) \Psi^*(0) = \sqrt{\frac{2}{M}} (-2e^2) \underbrace{(\hat{n}^* \cdot \epsilon_+)}_{\text{L0 que podemos generalizar para outros n}} \Psi^*(0) \quad (\text{eq. 89.1})$$

Se tivéssemos elétrons inicialmente despolarizados, apareceria a média sobre as polarizações:

$$\frac{1}{4} (|\hat{n}^* \cdot \epsilon_+|^2 + |\hat{n}^* \cdot \epsilon_-|^2) = \frac{1}{4} ((n_x)^2 + (n_y)^2)$$

Somando sobre todas as três direções possíveis de n (soma sobre a polarização final), temos:

$$\sum_{n=n_x, n_y, n_z} \frac{1}{4} [(n_x)^2 + (n_y)^2] = \frac{1}{2} \Rightarrow |\mathcal{M}(e^+e^- \rightarrow B)|^2 = \frac{2}{M} 4e^4 \frac{1}{2} |\Psi(0)|^2$$

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow B) = \underbrace{\frac{1}{2} \frac{1}{2m} \frac{1}{2m} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p+p'-k)}_{\text{espaço de fase 2} \rightarrow 1} \cdot \frac{4e^4}{M} |\Psi(0)|^2$$

A integrais são resolvidas usando as funções delta, mas sobra uma delta que escrevemos na forma:

$$\delta(p^0 - k^0) = 2k^0 \delta(p^2 - k^2) = 2E_k \delta(E_{cm}^2 - M^2)$$

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow B) = \frac{1}{2} \frac{1}{2m} \frac{1}{2m} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} (2\pi)^4 \cancel{2E_k} \delta(E_{cm}^2 - M^2) \frac{4e^4}{M} |\Psi(0)|^2$$

$\int p^0 e^1 = 16\pi^2 \alpha^2$

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow B) = 64 \pi^3 \alpha^2 \frac{|\Psi(0)|^2}{M^3} \delta(E_{cm}^2 - M^2) \quad (\text{eq. 89.2})$$

Se B pode ser produzido em choques elétron - pósitron, ele também pode decair de volta para elétron - pósitron (de fato para qualquer par de fermions suficientemente leve). O decaimento é dado por:

$$\Gamma(B \rightarrow e^+e^-) = \frac{1}{2M} \int d\Omega_2 |\mathcal{M}|^2$$

onde \mathcal{M} é o complexo conjugado de 89.1

$$\Gamma = \frac{1}{2M} \int \left(\frac{1}{2\pi} \frac{d\cos\theta}{2} \right) \frac{8e^4}{M} |\Psi(0)|^2 (|\hat{n} \cdot \epsilon|^2 + |\hat{n} \cdot \epsilon^*|^2)$$

lembrando que somamos sobre as polarizações do elétron e tiramos a média sobre os 3 valores de n:

$$\Gamma(B \rightarrow e^+e^-) = \frac{16\pi\alpha^2}{3} \frac{|\Psi(0)|^2}{M^2} \quad (\text{eq. 89.3})$$

a semelhança entre a seção de choque de produção e a largura de decaimento não é coincidência, afinal de contas as duas envolvem o mesmo elemento de matriz invariante, a diferença entre elas vem apenas de somas diferentes sobre as polarizações e espaço de fase (e não da teoria em si). Isso quer dizer que a relação:

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow B) = 4\pi^2 \frac{3\Gamma(B \rightarrow e^+e^-)}{M} \delta(E_{cm}^2 - M^2) \quad (\text{eq. 90.1})$$

é bastante geral e deve independe de teoria (ou detalhes de M). Podemos generalizar ainda mais substituindo o fator de soma sobre as orientações do spin 1:

$$\text{Spin } 1 \quad \longrightarrow \quad \text{Spin } J$$

$$3 \quad \longrightarrow \quad (2J+1)$$

Mais uma vez há uma aplicação importante em física de hadrons, que é a produção de quarkoniums. Devemos modificar as eqs. 89.2 e 89.3 multiplicando ambas por um fator 3 (por conta da cor) e corrigindo a carga:

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow H_{q\bar{q}}) = 3 \cdot 2 \cdot \pi^3 \alpha^2 Q^2 \frac{|\Psi(0)|^2}{M^3} \delta(E_{cm}^2 - M^2)$$

$$\Gamma(H_{q\bar{q}} \rightarrow e^+e^-) = 16\pi \alpha^2 Q^2 \frac{|\Psi(0)|^2}{M^2} \quad (\text{eq. 90.2})$$

Não conseguimos computar $\Psi(0)$ de primeiros princípios, mas podemos usar a expressão do decaimento acima para medi-lo. Por exemplo:

meson ϕ : $s\bar{s}$, $1S$, spin 1

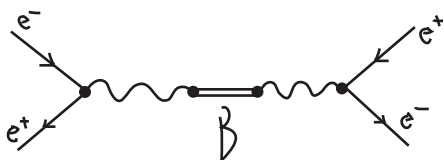
$$\Gamma_{\phi \rightarrow e^+e^-} = 1.4 \text{ keV}$$

$$M_\phi = 1.02 \text{ GeV}$$

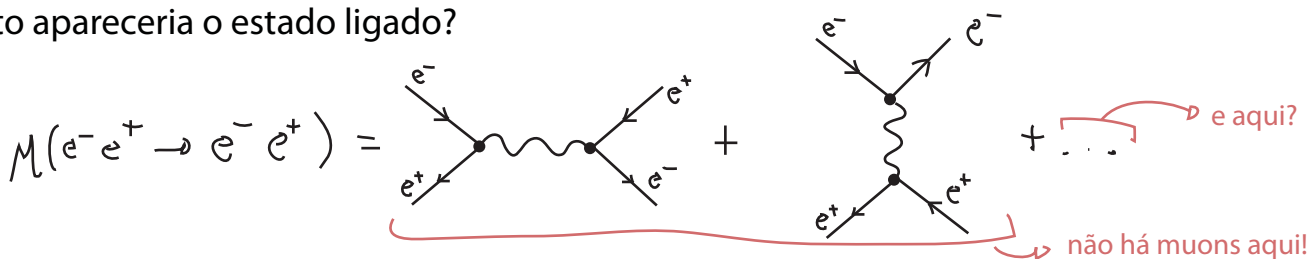
$$|\Psi(0)|^2 = (1.2 \text{ fm})^{-3}$$

↳ escala de tamanho típica de hadrons

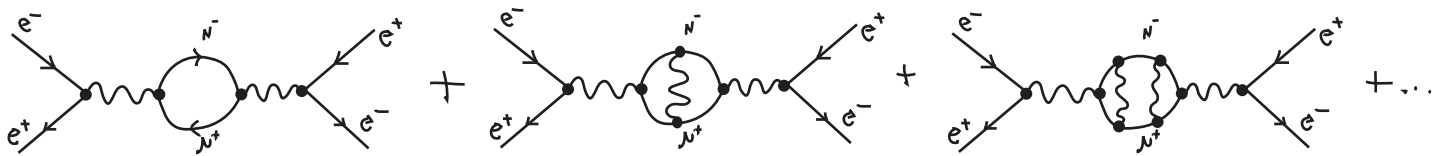
Como a presença deste estado muda o espalhamento Bhabha? O processo em que o estado é produzido e então decai certamente contribui para o espalhamento:



Mas, se ao invés de fazer este procedimento misto entre MQ e TQC que fizemos nas últimas páginas, tivéssemos simplesmente calculado o espalhamento Bhabha em teoria de perturbação, em que ponto apareceria o estado ligado?



As próximas contribuições incluem:



Para a maior parte dos valores de ECM esta série de diagramas dá uma pequena correção ao espalhamento em nível árvore, mas quando $ECM \sim 2\text{mm}$ a contribuição destes fica bem grande. É possível mostrar que somar todos os diagramas desta série equivale a resolver a eq. de Schrödinger (neste caso, em que a aproximação relativística é boa). A previsão é que o propagador do fóton desenvolverá um novo polo e a seção de choque terá um pico cuja área será dada por 89.2 e a largura por 89.3