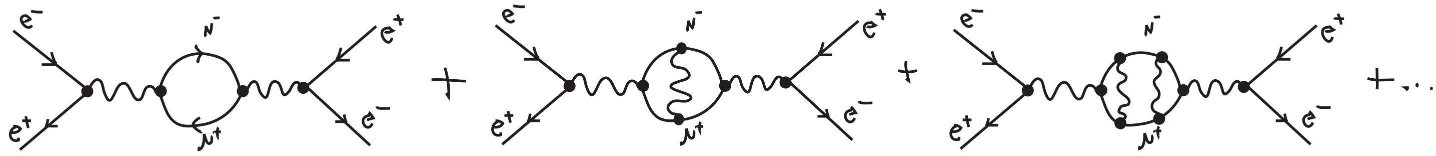
As próximas contribuições incluem:



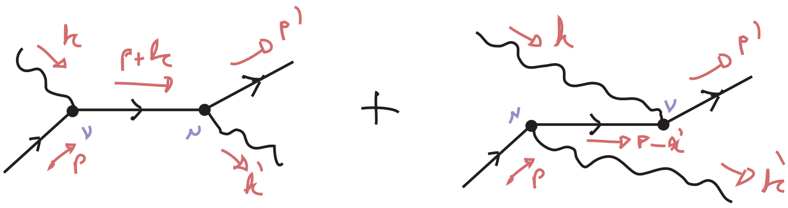
Para a maior parte dos valores de ECM esta série de diagramas dá uma pequena correção ao espalhamento em nível árvore, mas quando ECM ~ 2mm a contribuição destes fica bem grande. É possível mostrar que somar todos os diagramas desta série equivale a resolver a eq. de Schrödinger (neste caso, em que a aproximação relativística é boa). A previsão é que o propagador do fóton desenvolverá um novo polo e a seção de choque terá um pico cuja área será dada por 89.2 e a largura por 89.3

Espalhamento Compton

(Peskin 5.5)

Agora nos concentraremos no espalhamento Compton:

$e^-\gamma \longrightarrow e^-\gamma$:



a relação entre os dois diagramas é uma troca entre linhas bosônicas, logo não há sinal relativo:

$$i\mathcal{M} = \bar{u}(p')\cdot(ie\gamma^\mu)\cdot\frac{i(\not{p}+\not{k}+m)}{(p+k)^2-m^2}\cdot(ie\gamma^\nu)\cdot u(p)\,\epsilon^*_\mu(k')\,\epsilon_\nu(k)\; +$$

$$+\,\bar{u}(p')\cdot(ie\gamma^\nu)\cdot\frac{i(\not{p}-\not{k}'+m)}{(p-k')^2-m^2}\cdot(ie\gamma^\mu)\cdot u(p)\,\epsilon^*_\mu(k')\,\epsilon_\nu(k) =$$

$$= -ie^2\,\epsilon^*_\mu(k')\,\epsilon_\nu(k)\;\bar{u}(p')\cdot\left[\gamma^\mu\frac{(\not{p}+\not{k}+m)}{\underbrace{(p+k)^2-m^2}_{2p\cdot k}}\gamma^\nu + \gamma^\nu\frac{(\not{p}-\not{k}'+m)}{\underbrace{(p-k')^2-m^2}_{-2p\cdot k'}}\gamma^\mu\right]u(p)$$

$$\left.\begin{array}{l} p^2=m^2 \\ k^2=0 \end{array}\right\}\; \begin{array}{l} (p+k)^2 = m^2+2p\cdot k \\ (p-k')^2 = m^2-2p\cdot k' \end{array}$$

Para simplificar os numeradores usamos uma técnica muito útil, que consiste em usar a equação de Dirac para *u* e *v*:

$$(\not{p}+m)\gamma^\nu u(p) = (p_\alpha\gamma^\alpha + m)\gamma^\nu\,u(p) = (2p^\nu - \gamma^\nu\not{p} + \gamma^\nu m)\,u(p) =$$

$$p_\alpha\gamma^\alpha\gamma^\nu = 2p^\nu - p_\alpha\gamma^\nu\gamma^\alpha$$

$$= 2p^\nu u(p) - \gamma^\nu\underbrace{(\not{p}-m)u(p)}_{0}$$ (eq. de Dirac)

Obtemos:

$$i\mathcal{M} = -ie^2\, \epsilon_\mu^{\lambda'*}(k')\,\epsilon_\nu^{\lambda}(k)\; \bar u_i^{s'}(p')\cdot\left[\frac{\gamma^\mu \not k\gamma^\nu + \gamma^\mu 2p^\nu}{2p\cdot k} + \frac{+\gamma^\nu \not k'\gamma^\mu - \gamma^\nu 2p^\mu}{+2p\cdot k'}\right]_{ij} u_j^s(p)$$

$$-i\mathcal{M}^* = ie^2\, \epsilon_\rho^{\lambda'}(k')\,\epsilon_\sigma^{\lambda*}(k)\; u^{s\dagger}(p)\left[\frac{\gamma^\rho \not k\gamma^\sigma + \gamma^\rho 2p^\sigma}{2p\cdot k} + \frac{\gamma^\sigma \not k'\gamma^\rho - \gamma^\sigma 2p^\rho}{2p\cdot k'}\right]^\dagger \gamma^0\, u^{s'}(p') =$$

$$\gamma^\dagger\gamma^\dagger\gamma^\dagger\,\gamma^0 = \gamma^0\,\gamma\gamma\gamma$$

$$= ie^2\, \epsilon_\rho^{\lambda'}(k')\,\epsilon_\sigma^{\lambda*}(k)\; \bar u_{i'}^{s}(p)\cdot\left[\frac{\gamma^\sigma \not k\gamma^\rho + \gamma^\rho 2p^\sigma}{2p\cdot k} + \frac{\gamma^\rho \not k'\gamma^\sigma - \gamma^\sigma 2p^\rho}{2p\cdot k'}\right]_{i'j'} u^{s'}(p')_{j'}$$

Fazendo a média e soma sobre polarizações:

$$\sum_s u_j^s(p)\,\bar u_{i'}^s(p) = (\not p + m)_{ji'} \qquad \sum_{s'} u^{s'}(p')_{j'}\,\bar u_i^{s'}(p') = (\not p' + m)_{j'i}$$

$$\sum_\lambda \epsilon_\sigma^{\lambda*}(k)\,\epsilon_\nu^{\lambda}(k) \to -g_{\sigma\nu} \qquad \sum_{\lambda'} \epsilon_\rho^{\lambda'}(k')\,\epsilon_\mu^{\lambda'*}(k') \to -g_{\rho\mu}$$

obtemos:

$$\underbrace{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}_{\text{médias}}\sum_{s,s',\lambda,\lambda'}|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4}\, g_{\mu\rho}\, g_{\nu\sigma}\,\mathrm{Tr}\left\{(\not p + m)\left[\frac{\gamma^\sigma \not k\gamma^\rho + \gamma^\rho 2p^\sigma}{2p\cdot k} + \frac{\gamma^\rho \not k'\gamma^\sigma - \gamma^\sigma 2p^\rho}{2p\cdot k'}\right]\times\right.$$

$$\left.\times(\not p' + m)\cdot\left[\frac{\gamma^\mu \not k\gamma^\nu + \gamma^\mu 2p^\nu}{2p\cdot k} + \frac{\gamma^\nu \not k'\gamma^\mu - \gamma^\nu 2p^\mu}{+2p\cdot k'}\right]\right\} =$$

$$= \frac{e^4}{4}\left\{\overbrace{\frac{1}{(2p\cdot k)^2}\mathrm{Tr}\left[(\not p+m)(\gamma_\nu\not k\gamma_\mu+\gamma_\mu 2p_\nu)(\not p'+m)(\gamma^\mu\not k\gamma^\nu+\gamma^\mu 2p^\nu)\right]}^{\mathrm{I}} + \right.$$

$$+\overbrace{\frac{1}{(2p\cdot k)(2p\cdot k')}\mathrm{Tr}\left[(\not p+m)(\gamma_\nu\not k\gamma_\mu+\gamma_\mu 2p_\nu)(\not p'+m)(\gamma^\nu\not k'\gamma^\mu-\gamma^\nu 2p^\mu)\right]}^{\mathrm{II}} +$$

$$+\overbrace{\frac{1}{(2p\cdot k')(2p\cdot k)}\mathrm{Tr}\left[(\not p+m)(\gamma_\mu\not k'\gamma_\nu-\gamma_\nu 2p_\mu)(\not p'+m)(\gamma^\mu\not k\gamma^\nu+\gamma^\mu 2p^\nu)\right]}^{\mathrm{III}} +$$

$$\left.+\overbrace{\frac{1}{(2p\cdot k')^2}\mathrm{Tr}\left[(\not p+m)(\gamma_\mu\not k'\gamma_\nu-\gamma_\nu 2p_\mu)(\not p'+m)(\gamma^\nu\not k'\gamma^\mu-\gamma^\nu 2p^\mu)\right]}^{\mathrm{IV}}\right\}$$

notando que:

$$\mathrm{I}(k\to -k') = \mathrm{Tr}\left[(\not p+m)(-\gamma_\nu\not k'\gamma_\mu+\gamma_\mu 2p_\nu)(\not p'+m)(-\gamma^\mu\not k'\gamma^\nu+\gamma^\mu 2p^\nu)\right] = \mathrm{IV}$$

$$\mathrm{II} = \mathrm{Tr}\left[\left(\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu - \gamma^\nu 2p^\mu\right)\left(\not{p}' + m\right)\left(\gamma_\nu \not{k} \gamma_\mu + \gamma_\mu 2 p_\nu\right)\left(\not{p} + m\right)\right] = \mathrm{III}$$

revertendo a ordem das matrizes, conforme eq 71.3

vemos que só é necessário calcular I e II

$$\mathrm{I} = \mathrm{Tr}\left[\left(\not{p} + m\right)\left(\gamma_\nu \not{k} \gamma_\mu + \gamma_\mu 2 p_\nu\right)\left(\not{p}' + m\right)\left(\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu + \gamma^\mu 2p^\nu\right)\right]$$

que podemos resolver usando a tecnologia de traços mostrada nas páginas 69 a 72, por exemplo:

$$\mathrm{Tr}\left[\not{p}\, \gamma_\nu \not{k} \underbrace{\gamma_\mu \not{p}' \gamma^\mu}_{\gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\mu p'_\alpha = -2\gamma^\alpha p'_\alpha} \not{k} \gamma^\nu\right] = -2\,\mathrm{Tr}\left[\not{p} \underbrace{\gamma_\nu \not{k} \not{p}' \not{k} \gamma^\nu}_{\gamma_\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\delta \gamma^\nu k_\alpha p'_\beta k_\delta = -2 \gamma^\delta \gamma^\beta \gamma^\alpha k_\alpha p'_\beta k_\delta} \right] = 4\,\mathrm{Tr}\left[\not{p} \not{k} \not{p}' \not{k}\right] = 32\,(p\cdot k)(p'\cdot k)$$

eq. 71.5

eq. 72.2

Ou usamos uma implementação mais moderna desta tecnologia:

```
<< FeynCalc`
ScalarProduct[k, k] = 0;
(GS[p]).(GA[\[Nu]].GS[k].GA[\[Mu]]).(GS[p\[Prime]]).(GA[\[Mu]].GS[k].GA[\[Nu]]) // TR
```

No caso do traço completo:

```
ScalarProduct[k, k] = 0; ScalarProduct[p, p] = m^2;
ScalarProduct[p\[Prime], p\[Prime]] = m^2;
(GS[p] + m).(GA[\[Nu]].GS[k].GA[\[Mu]] +
    2 GA[\[Mu]] FV[p, \[Nu]]).(GS[p\[Prime]] +
    m).(GA[\[Mu]].GS[k].GA[\[Nu]] + 2 FV[p, \[Nu]] GA[\[Mu]]) // TR
```

$$\mathrm{I} = 32\left(2 m^2 (\overline{k}\cdot\overline{p}) - m^2 (\overline{k}\cdot\overline{p\prime}) + (\overline{k}\cdot\overline{p})(\overline{k}\cdot\overline{p\prime}) - m^2 (\overline{p}\cdot\overline{p\prime}) + 2 m^4\right)$$

Isso fica mais simples em termos de variáveis de Mandelstam:

$$s = (p+k)^2 = 2p\cdot k + m^2 = 2p'\cdot k' + m^2$$
$$t = (p'-p)^2 = -2p\cdot p' + 2m^2 = -2k\cdot k'$$
$$u = (k'-p)^2 = -2k'\cdot p + m^2 = -2k\cdot p' + m^2$$

podemos sempre escrever a resposta em termos de apenas duas usando

$$s + t + u = 2m^2$$

```
SetMandelstam[s, t, u, p, k, -p\[Prime], -k\[Prime], m, 0, m, 0];
TrickMandelstam[TrI, {s, t, u, 2 m^2}]
```

$$\mathrm{I} = 8\left(m^4 + m^2 (3s + u) - s\,u\right) =$$
$$= 16\left(2m^4 + m^2(s - m^2) - \tfrac{1}{2}(s-m^2)(u-m^2)\right)$$

Podemos obter IV fazendo as mudanças:

$$k \to -k' \Rightarrow \begin{array}{l} s = (p+k)^2 \to (p-k')^2 = u \\ u = (k'-p)^2 \to (-k-p)^2 = s \end{array}$$

$$\mathrm{IV} = 16\left(2m^4 + m^2(u-m^2) - \frac{1}{2}(u-m^2)(s-m^2)\right)$$

Obtemos os outros dois da mesma forma:

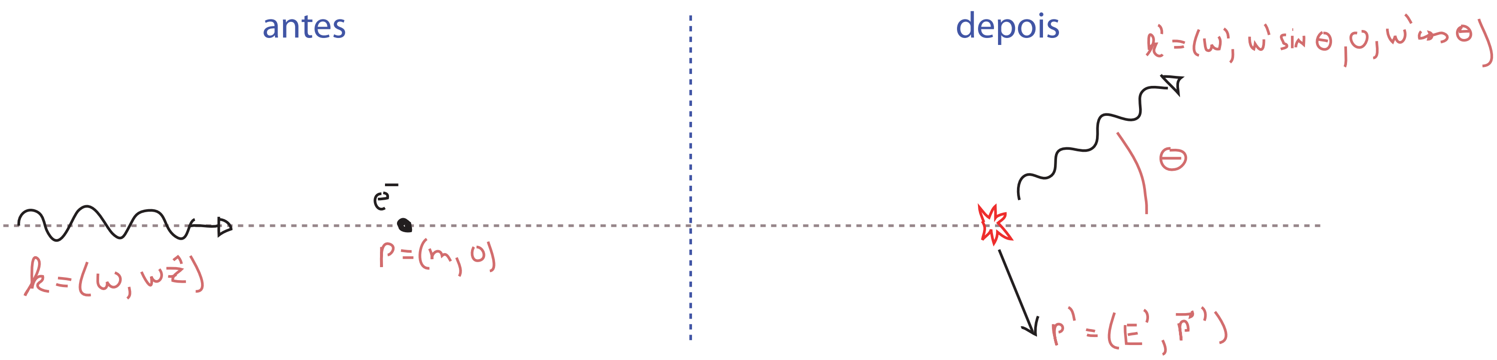
$$\mathrm{II} = \mathrm{III} = -8\left(4m^4 + m^2(s-m^2) + m^2(u-m^2)\right)$$

Juntando tudo e voltando para as variáveis $(p\cdot k)$ e $(p\cdot k')$ temos:

$$\boxed{\frac{1}{4}\sum |M|^2 = 2e^4\left[\frac{p\cdot k'}{p\cdot k} + \frac{p\cdot k}{p\cdot k'} + 2m^2\left(\frac{1}{p\cdot k} - \frac{1}{p\cdot k'}\right) + m^4\left(\frac{1}{p\cdot k} - \frac{1}{p\cdot k'}\right)^2\right]}$$

(eq. 94.1)

Escolhemos agora um referencial (que é o de repouso do elétron incial):



$$p\cdot k = m\omega \qquad s = 2p\cdot k + m^2 = 2m\omega + m^2$$

$$p\cdot k' = m\omega' \qquad u = -2k'\cdot p + m^2 = -2m\omega' + m^2$$

esta seção de choque pode ser expressa apenas em termos de ω e θ, para eliminar ω':

$$m^2 = (p')^2 = (p+k-k')^2 = p^2 + 2p\cdot(k-k') - 2k\cdot k' =$$
$$= m^2 + 2m(\omega-\omega') - 2\omega\cdot\omega'(1-\cos\theta)$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega} = \frac{1}{m}(1-\cos\theta)}$$

(eq. 94.2)

que é justamente a fórmula de Compton para a mudança no comprimento de onda do fóton espalhado. Usaremos a na seguinte forma:

$$\boxed{\omega' = \frac{\omega}{1+\frac{\omega}{m}(1-\cos\theta)}}$$

(eq. 94.3)

o elemento de matriz fica:

$$\boxed{\frac{1}{4}\sum |M|^2 = \frac{2e^4}{\omega^2\omega'^2}\left[m^2(\omega-\omega')^2 + 2m\omega\omega'(\omega'-\omega) + \omega\omega'(\omega^2+\omega'^2)\right]}$$ (eq. 95.1)

O espaço de fase 2 ⟶ 2 fica:

$$\int d\Pi_2 = \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega'}\frac{d^3p'}{\cancel{(2\pi)^3}}\frac{1}{2E'}(2\pi)^{\cancel{4}}\delta^{(4)}(k'+p'-k-p) =$$

$$(\vec{p}\,' = \vec{k}+\vec{p}-\vec{k}\,')$$

$$= \int \frac{(\omega')^2\, d\omega'\, d\Omega}{(2\pi)^3}\frac{1}{4\omega' E'}(2\pi)\,\delta(\omega'+E'-\omega-m) =$$

$$E' = \sqrt{p'^2+m^2} = \left(k^2 - 2\vec{k}\cdot\vec{k}' + 2\vec{k}\cdot\vec{p} + k'^2 - 2\vec{k}'\cdot\vec{p} + \vec{p}^{\,2} + m^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\omega^2 - 2\omega\omega'\cos\theta + 0 + \omega'^2 - 0 + 0 + m^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\int d\Omega = 2\pi\int_{-1}^{1} d(\cos\theta)$$

$$= \int_0^\infty \frac{(\omega'^{\cancel{2}})\, d\omega'}{2\pi}\int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\frac{1}{4\cancel{\omega'}E'}\,\underbrace{\delta\left(\omega' + \sqrt{\omega^2-2\omega\omega'\cos\theta+\omega'^2+m^2}-\omega-m\right)}_{\text{impõe justamente a eq. 94.3}} =$$

$$\omega' = \frac{\omega}{1+\frac{\omega}{m}(1-\cos\theta)} = \frac{m\omega}{m+\omega-\omega\cos\theta}$$

$$\delta(g(x)) = \frac{1}{|g'(x_0)|}\delta(x-x_0) \Rightarrow g'(\omega') = 1 + \frac{2\omega' - 2\omega\cos\theta}{2\underbrace{\sqrt{\cdots}}_{E'}} = 1 + \frac{\omega'-\omega\cos\theta}{E'}$$

$$= \int_{-1}^{1}\frac{d(\cos\theta)}{2\pi}\frac{\omega'}{4E'}\frac{1}{\left|1+\frac{\omega'-\omega\cos\theta}{E'}\right|} = \frac{1}{8\pi}\int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\frac{\omega'}{\left|\underbrace{E'+\omega'}_{m+\omega}-\omega\cos\theta\right|} =$$

$$= \frac{1}{8\pi}\int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\frac{\omega'}{m+\omega(1-\cos\theta)} = \boxed{\frac{1}{8\pi}\int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\frac{(\omega')^2}{\omega m}}$$ (eq. 95.2)

$$\omega' = \frac{m\omega}{m+\omega-\omega\cos\theta} \to \frac{1}{m+\omega-\omega\cos\theta} = \frac{\omega'}{m\omega}$$

Lembrando que temos as condições que se aplicam sobre o integrando completo:

$$\omega' = \frac{m\omega}{m+\omega-\omega\cos\theta} \qquad\qquad \vec{p}\,' = \vec{k}+\vec{p}-\vec{k}\,'$$

Usando 95.1 e 95.2 na fórmula para seção de choque (eq. 37.2):

$$d\sigma = \frac{1}{\underbrace{2\omega 2m\,|v_k - v_p|}} \, \frac{1}{8\pi}\int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\, \frac{(\omega')^2}{\omega m} \left(\frac{1}{4}\sum |M|^2\right)$$

$$\rightarrow \left|\underbrace{\frac{k_z}{\omega}}_{1} - \frac{\overset{0}{\cancel{p_z}}}{m}\right| = 1$$

(eq. 95.1)

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\cancel{(\omega')^2}}{32\pi\,\omega^2 m^2}\,\frac{\overset{\pi\alpha^2}{2e^4}}{\omega^2 \cancel{\omega'^2}}\left[m^2(\omega-\omega')^2 + 2m\omega\omega'(\omega'-\omega) + \omega\omega'(\omega^2+\omega'^2)\right]$$

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{m^2}\,\frac{1}{\omega^4}\left[m^2(\omega-\omega')^2 + 2m\omega\omega'(\omega'-\omega) + \omega\omega'(\omega^2+\omega'^2)\right] =$$

$$= \frac{\pi\alpha^2}{m^2}\,\frac{1}{\omega^4}\left[m^2\omega^2 - 2m^2\omega\omega' + m^2\omega'^2 - 2m\omega^2\omega' + 2m\omega\omega'^2 + \omega^3\omega' + \omega\omega'^3\right] =$$

$$= \frac{\pi\alpha^2}{m^2}\,\frac{\omega'^2}{\omega^2}\Bigg[\underbrace{\frac{m^2}{\omega'^2} - \frac{2m^2}{\omega\omega'} + \frac{m^2}{\omega^2} - \frac{2m}{\omega'} + \frac{2m}{\omega}}_{} + \frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega}\Bigg]$$

$$\frac{m^2\omega^2 - 2m^2\omega\omega' + m^2\omega'^2 - 2m\omega^2\omega' + 2m\omega'^2\omega + \omega^2\omega'^2 - \omega^2\omega'^2}{\omega^2\omega'^2} = \overbrace{\cos^2\theta - 1}$$

$$\omega' = \frac{m\omega}{m+\omega-\omega\cos\theta} \rightarrow \cos\theta = \frac{-m\omega + m\omega' + \omega\omega'}{\omega\omega'}$$

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{m^2}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2\left[\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - \operatorname{sen}^2\theta\right]}$$

(eq. 96.1)

Fórmula de Klein-Nishina

No limite $\omega \rightarrow 0$ (grandes comprimentos de onda) vemos que:

$$\omega' = \frac{m\omega}{m+\omega-\omega\cos\theta} \Rightarrow \frac{\omega'}{\omega} = \frac{m}{m+\underbrace{\cancel{\omega(1-\cos\theta)}}_{\omega\sim 0}} \simeq 1$$

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{m^2}\left[1+\cos^2\theta\right]}$$

(eq. 96.2)

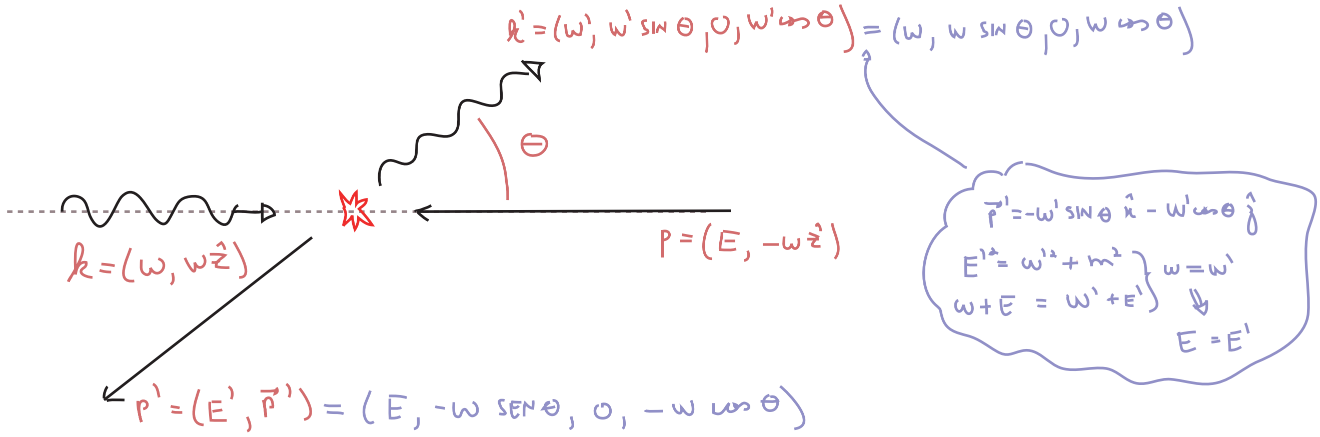
$$\boxed{\sigma_{TOT} = \frac{8\pi\alpha^2}{3m^2}}$$

(eq. 96.3)

Espalhamento Thomson

Comportamento em altas energias

Para analizar o comportamento em altas energias vamos adotar o referencial do CM:



$$p\cdot k = \omega(E+\omega)$$

$$p\cdot k' = \omega(E+\omega\cos\theta)$$

$$s = (p+k)^2 = (E+\omega)^2$$

$$u = (k'-p)^2 = (\omega-E)^2 - \omega^2\,\mathrm{sen}^2\theta - \omega^2(\cos\theta+1)^2 = (E-\omega)^2 - 2\omega^2(1+\cos\theta)$$

$$t = (k'-k)^2 = -2k\,k' = -2\omega^2(1-\cos\theta)$$

Tomemos o limite para altas energias e $\theta \simeq \pi$:

$$\frac{p\cdot k}{p\cdot k'} = \frac{E+\omega}{E+\omega\cos\theta} \underset{\theta\simeq\pi}{\simeq} \frac{E+\omega}{E-\omega} >> 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{p\cdot k'}{p\cdot k} << 1$$

$$E^2 - \omega^2 = m^2 \Rightarrow E - \omega = E - \sqrt{E^2 - m^2} \simeq 0$$

$$E >> m$$

$$\frac{1}{p\cdot k} - \frac{1}{p\cdot k'} = \frac{1}{\omega(E+\omega)} - \frac{1}{\omega(E+\omega\cos\theta)} \underset{\theta\simeq\pi}{\simeq} \frac{1}{\omega(E+\omega)} - \frac{1}{\omega(E-\omega)} = \frac{E-\omega-E-\omega}{\omega\underbrace{(E^2-\omega^2)}_{m^2}} = -\frac{2}{m^2}$$

logo o termo $\dfrac{p\cdot k}{p\cdot k'}$ domina a eq 94.1:

$$\frac{1}{4}\sum |M|^2 = 2e^4\left[\cancelto{0}{\frac{p\cdot k'}{p\cdot k}} + \frac{p\cdot k}{p\cdot k'} + \cancelto{0}{2m^2\left(\frac{1}{p\cdot k} - \frac{1}{p\cdot k'}\right)} + \cancelto{0}{m^4\left(\frac{1}{p\cdot k} - \frac{1}{p\cdot k'}\right)^2}\right] =$$

$$= 2e^4 \frac{E+\omega}{E+\omega\cos\theta}$$

Para altas energias podemos fazer a aproximação:

$$E = \sqrt{\omega^2+m^2} = \omega\sqrt{1+\frac{m^2}{\omega^2}} = \omega\left(1+\frac{m^2}{2\omega^2} + \mathcal{O}\left(\frac{m^3}{\omega^3}\right)\right) \longrightarrow E \simeq \omega >> m$$

$$E + \omega\cos\theta \simeq \omega\left(1 + \cos\theta + \underline{\frac{m^2}{2\omega^2}}\right)$$

manteremos este fator de m apenas aqui, quando $E + \omega\cos\theta$ aparecer no denominador, pois neste caso ele regulariza uma divergência em $\theta = \pi$. Em todos os outros lugares ele é desprezível

Logo: $s = (E+\omega)^2 \simeq 4\omega^2$

$$\frac{1}{4}\sum |M|^2 \simeq \frac{4e^4}{1+\cos\theta + \frac{m^2}{2\omega^2}}$$

A seção de choque neste referencial fica:

(eq. 38.4)

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \frac{1}{\underbrace{2E}_{\omega}\, 2\cancel{\omega}\, \underbrace{|v_A - v_B|}_{2}} \frac{\cancel{\omega}}{16\pi^2 \underbrace{(\omega+E)}_{\simeq 2\omega}}\left(\frac{1}{4}\sum |M|\right)$$

$$v_A = \frac{\omega}{\omega} \qquad v_B = -\frac{\omega}{E} \qquad v_A - v_B = \frac{E+\omega}{E} \simeq 2$$

$$\boxed{\left(\frac{d\sigma}{d\cos\theta}\right) \simeq 2\pi \frac{1}{\underbrace{\cancel{16}\,\omega^2}_{s}} \frac{1}{16\pi^2}\frac{\cancel{4}e^4}{1+\cos\theta+\underbrace{\frac{m^2}{2\omega^2}}_{\frac{2m^2}{s}}} = \frac{2\pi\alpha^2}{2m^2 + s(1+\cos\theta)}}$$ (eq. 98.1)

Onde vemos que sem a massa do elétron teríamos uma divergência para $\theta = \pi$. Fazendo a integral angular:

$$\int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\frac{d\sigma}{d\cos\theta} \simeq \frac{2\pi\alpha^2}{s}\int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\frac{1}{\frac{2m^2}{s}+(1+\cos\theta)} \simeq \frac{2\pi\alpha^2}{s}\,\mathrm{Log}\left(\frac{\overbrace{\cancel{m^2}}^{<<s}+s}{m^2}\right)$$

Fazendo o limite sem massa na eq. 94.1:

(94.1)

$m = 0$

$\to s = 2p\cdot k$

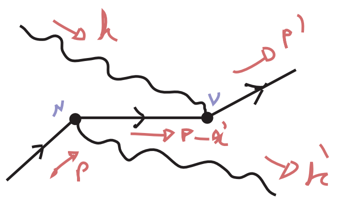
$\to u = -2p\cdot k'$

$$\boxed{\frac{1}{4}\sum |M|^2 = -2e^4\left[\frac{u}{s}+\frac{s}{u}\right]}$$ (eq. 98.2)

e lembrando que: $s \simeq 4\omega^2$

$$u = (E-\omega)^2 - 2\omega^2(1+\cos\theta) \simeq -2\omega^2(\cos\theta+1)$$

vemos que esta divergência vem do segundo termo de 98.2, da troca de fótons no "canal u". Isto não é muito surpreendente, uma vez que na amplitude da pg 91 tínhamos:



$$= \bar{u}(p')\cdot(ie\gamma^\nu)\cdot\frac{i(\not{p}-\not{k}'+m)}{\underbrace{(p-k')^2}_{u}-m^2}\cdot(ie\gamma^\mu)\cdot u(p)\,\epsilon^*_\mu(k')\epsilon_\nu(k)$$

Logo era de se esperar uma divergência no caso em que $u \simeq m^2 << s$

O que é um pouco inesperado é que temos apenas $1/u$, ao invés de $1/u^2$ (lembre se que $\sigma \sim |M|^2$)

Vamos definir $\chi \equiv \pi - \theta$