

Logo:  $S = (E + \omega)^2 \approx 4\omega^2$

$$\frac{1}{4} \sum |M|^2 \approx \frac{4e^4}{1 + \cos\theta + \frac{m^2}{2\omega^2}}$$

A seção de choque neste referencial fica:

(eq. 38.4)

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \frac{1}{2E \cdot 2\omega} \frac{1}{|v_A - v_B|} \frac{\omega}{16\pi^2 (E + \omega)} \left(\frac{1}{4} \sum |M|^2\right)$$

$v_A = \frac{\omega}{E}$      $v_B = -\frac{\omega}{E}$      $v_A - v_B = \frac{E + \omega}{E} \approx 2$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\cos\theta}\right) \approx 2\pi \frac{1}{16\omega^2} \frac{1}{16\pi^2} \frac{4e^4}{1 + \cos\theta + \frac{m^2}{2\omega^2}} = \frac{2\pi\alpha^2}{2m^2 + S(1 + \cos\theta)} \quad (\text{eq. 98.1})$$

Onde vemos que sem a massa do elétron teríamos uma divergência para  $\theta = \pi$ . Fazendo o integral angular:

$$\int_{-1}^1 d(\cos\theta) \frac{d\sigma}{d\cos\theta} \approx \frac{2\pi\alpha^2}{S} \int_{-1}^1 d(\cos\theta) \frac{1}{\frac{2m^2}{S} + (1 + \cos\theta)} \approx \frac{2\pi\alpha^2}{S} \text{Log} \left( \frac{m^2 + S}{m^2} \right)$$

Fazendo o limite sem massa na eq. 94.1:

(94.1)

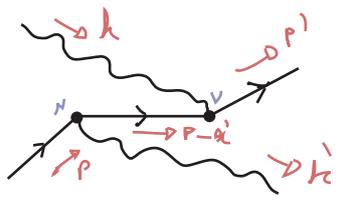
$$\frac{1}{4} \sum |M|^2 = -2e^4 \left[ \frac{u}{S} + \frac{S}{u} \right] \quad (\text{eq. 98.2})$$

$m=0$   
 $S = 2p \cdot k$   
 $u = -2p \cdot k'$

e lembrando que:  $S \approx 4\omega^2$

$$u = (E - \omega)^2 - 2\omega^2(1 + \cos\theta) \approx -2\omega^2(\cos\theta + 1)$$

vemos que esta divergência vem do segundo termo de 98.2, da troca de fótons no "canal u". Isto não é muito surpreendente, uma vez que na amplitude da pg 91 tínhamos:



$$= \bar{u}(p') \cdot (ie\gamma^\nu) \cdot \frac{i(p - k + m)}{(p - k)^2 - m^2} \cdot (ie\gamma^\mu) \cdot v(p) \epsilon_\mu^*(k') \epsilon_\nu(k) \quad (\text{eq. 98.3})$$

$u$

Logo era de se esperar uma divergência no caso em que  $u \approx m^2 \ll S$

O que é um pouco inesperado é que temos apenas  $1/u$ , ao invés de  $1/u^2$  (lembre-se que  $\sigma \sim |M|^2$ )

Vamos definir  $\chi \equiv \pi - \theta$

e olhar valores  $\chi \gg \frac{m}{\omega}$  mas que ainda:  $\cos \chi \simeq 1 - \frac{\chi^2}{2}$

$$\cos(\theta) = \cos(\chi + \pi) = -\cos(\chi)$$

$$(p - k')^2 - m^2 = -2p \cdot k' = -2\omega(E + \omega \cos \theta) \simeq -2\omega^2 \left( 1 + \frac{m^2}{2\omega^2} - \cos(\chi) \right) \simeq -(m^2 + \omega^2 \chi^2)$$

Isto é pequeno comparado com  $s$  para diversos valores de  $\chi$ , de fato sempre que  $\frac{m}{\omega} \ll \chi \ll 1$  este denominador será dominado por  $\chi^2$  e era de se esperar que a seção de choque fosse dominada por  $\chi^4$ . Deve haver algo introduzindo um fator  $\chi$  no numerador do elemento de matriz. Olhemos a seção de choque polarizada.

Suponha:  $e_{\text{INICIAL}}^- = e_R^-$

pode ser desprezado na região em questão

o elemento de matriz em questão:  $\bar{u}(p') \cdot (i e \gamma^\nu) \cdot \cancel{\lambda(p - k + m)} \cdot (i e \gamma^\mu) \cdot u(p)$

há sempre três matrizes  $\gamma$  aqui

logo:  $\bar{u}(p') \cancel{\gamma^\nu \gamma^\mu} P_R u_R(p) = \bar{u}(p') P_L \cancel{\gamma^\mu \gamma^\nu} u_R^c(p) = \bar{u}_R(p') \cancel{\gamma^\mu \gamma^\nu} u_R^c(p)$

ou seja:  $e_{\text{INICIAL}}^- = e_R^- \rightarrow e_{\text{FINAL}}^- = e_R^-$

agora:  $u_R(p) = P_R \sqrt{2E} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 - \hat{p} \cdot \vec{\sigma}) \xi \\ \frac{1}{2}(1 + \hat{p} \cdot \vec{\sigma}) \xi \end{pmatrix} = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}(1 + \hat{p} \cdot \vec{\sigma}) \xi \end{pmatrix} = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi \end{pmatrix} = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$        $(\hat{p} \cdot \vec{\sigma}) \xi = \xi$        $\hat{p} = -\hat{z}$        $\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\hat{p}' \simeq \hat{z} \rightarrow \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\bar{u}_R(p') = u_R^c(p') \gamma^0 = \sqrt{2E'} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2E'} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

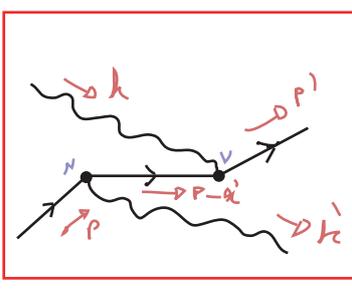
$$\gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\mu P_R = \gamma^\nu \gamma^\alpha P_L \gamma^\mu = P_L \gamma^\nu P_R \gamma^\alpha P_L \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\nu \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \bar{\sigma}^\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}$        $P_L \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
 $P_R \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\nu \bar{\sigma}^\alpha \sigma^\mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{u}_R(p') \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\mu u_R(p) = 2E (1 \ 0) \cdot \sigma^\nu \cdot \bar{\sigma}^\alpha \cdot \sigma^\mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

logo:



$$= -ie^2 \epsilon_\mu^*(k') \epsilon_\nu(k) 2E (1 \ 0) \cdot \sigma^\nu \frac{\bar{v} \cdot (p - k')}{-(m^2 + \omega^2 \chi^2)} \sigma^\mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

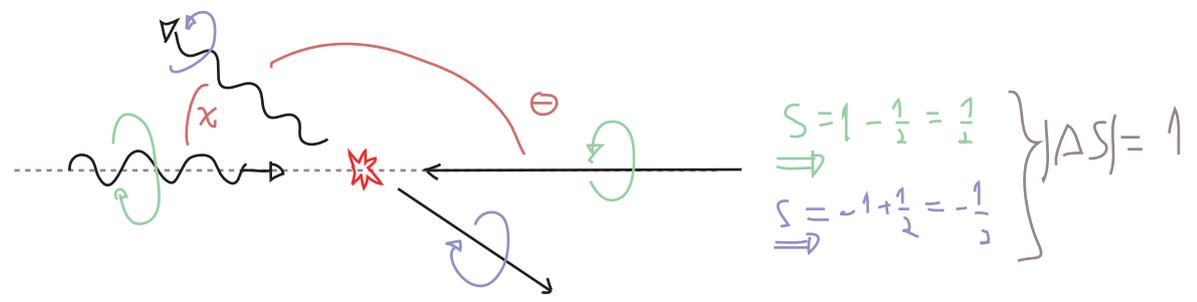
se o fóton inicial for de mão esquerda:  $\epsilon_\nu^-(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, -i, 0)$  (eq. 100.1)

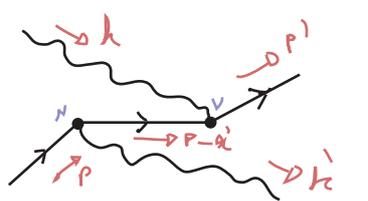
$$\sigma^\nu \epsilon_\nu^-(k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} = 0$$

portanto o fóton deve ser de mão direita:  $\epsilon_\nu^+(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, i, 0) \Rightarrow (1 \ 0) \cdot (\epsilon_\nu^+(k) \sigma^\nu) = (0 \ \sqrt{2})$

no caso do foton final vale o mesmo (deve ser de mão direita, mas neste caso se propagando na direção -z):

$$\epsilon_\mu^+(k') = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, -i, 0) \rightarrow \epsilon_\mu^*(k') \sigma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$





$$\approx -ie^2 2E (1 \ 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \frac{\bar{v} \cdot (p - k')}{-(m^2 + \omega^2 \chi^2)} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\approx -ie^2 2E (0 \ \sqrt{2}) \frac{\bar{v} \cdot (p - k')}{-(m^2 + \omega^2 \chi^2)} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$(0 \ \sqrt{2}) \sigma^1 (0 \ \sqrt{2}) = 2$   
 $(0 \ \sqrt{2}) \sigma^3 (0 \ \sqrt{2}) = 0$   
 $\sigma^2 (p - k')_2 = 0$

$\sigma^1 = -\sigma^2$   
 $\Rightarrow +ie^2 \frac{4E (p - k')_1}{-(m^2 + \omega^2 \chi^2)} \Rightarrow (p - k')_1 = +\omega \text{sen}(\theta) = -\omega \text{sen}(\chi)$   
 $\approx -\omega \chi$

Que era o fator que procurávamos e indica que o estado final carrega momento angular (em onda p)

$$M(e_R^- \gamma_R \rightarrow e_R^- \gamma_R) \approx \frac{4e^2 \chi}{\chi^2 + \frac{m^2}{\omega^2}}$$

(eq. 101.1)

$$\approx M(e_L^- \gamma_L \rightarrow e_L^- \gamma_L)$$

seguinto basicamente os mesmos passos acima

Note que para  $\chi = 0 \rightarrow M(e_R^- \gamma_R \rightarrow e_R^- \gamma_R) = 0$

o que nos força a levar em conta o termo de massa também no numerador:

$$\bar{u}(p') (i e \gamma^\nu) i (\not{p} - \not{k}' + m) (i e \gamma^\nu) u(p)$$

hávamos desprezado esta parte

este termo contém uma matriz de Dirac a menos do que a parte com  $\not{p} - \not{k}'$ , e portanto converterá um elétron de mão direita em um de mão esquerda:

$$e_{INICIAL}^- = e_R^- \rightarrow e_{FINAL}^- = e_L^-$$

$$\vec{p}' \approx \hat{z} \rightarrow \xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_R(p) = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \bar{u}_L(p') = \sqrt{2E'} \left( \frac{1}{2} \xi^\dagger (1 - \vec{p}' \cdot \vec{\sigma}) \quad 0 \quad 0 \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2E'} (0 \ 0 \ 0 \ 1)$$

$$\bar{u}_L(p') \gamma^\nu \gamma^\nu u_R(p) = 2E (0 \ 0 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2E (0 \ 1) \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$iM = -ie^2 \epsilon_\mu^*(k') \epsilon_\nu(k) 2E (0 \ 1) \cdot \frac{m \vec{\sigma}^\nu \sigma^\mu}{-(m^2 + \omega^2 \chi^2)} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

essa diferença nos espinores muda também a polarização do fóton inicial:

$$(0 \ 1) \cdot \epsilon_\nu(k) \vec{\sigma}^\nu = \begin{cases} (\sqrt{2}) \ 0 & \leftrightarrow E_V^{(-)}(k) \text{ (mão esquerda)} \\ 0 & \leftrightarrow E_V^{(+)}(k) \end{cases}$$

(o fóton final não muda pois continua contraído com eletron de mão direita)

$$M(e_R^- \gamma_L \rightarrow e_L^- \gamma_R) \approx \frac{E 4e^2 m}{(m^2 + \omega^2 \chi^2)} \approx \frac{4e^2 \frac{m}{\omega}}{\chi^2 + \frac{m^2}{\omega^2}} \approx M(e_L^- \gamma_R \rightarrow e_R^- \gamma_L)$$

(eq. 101.2)

Somando todos os espalhamentos em 101.1 e 101.2 e lembrando do fator 1/4 da média sobre as polarizações iniciais, podemos escrever (usando a eq. 38.4):

$$\frac{d\sigma}{d(\omega d\theta)} \approx \underbrace{2\pi}_{\int d\phi} \underbrace{\frac{1}{2\omega 2\omega \cdot 2}}_{\frac{1}{4 E_\mu E_\nu |\omega_2 - \omega_1|}} \underbrace{\frac{\omega}{16 \pi^2 2\omega}}_{\frac{1}{16 \pi^2 E_{cm}}} \underbrace{\frac{1}{4}}_{\frac{1}{4} \sum |M|^2} \left[ \frac{32e^4 \chi^2}{(\chi^2 + \frac{m^2}{\omega^2})^2} + \frac{32e^4 \frac{m}{\omega}}{(\chi^2 + \frac{m^2}{\omega^2})^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2\omega \cdot 2\omega \cdot 2} \frac{e^4}{2\pi} \frac{1}{\left(\chi^2 + \frac{m^2}{\omega^2}\right)^2} \left[ \chi^2 + \frac{m^2}{\omega^2} \right] = \frac{4\pi\alpha^2}{s\left(\chi^2 + \frac{m^2}{\omega^2}\right)}$$

$$\frac{d\sigma}{d(\omega \theta)} \approx \frac{4\pi\alpha^2}{s\left(\chi^2 + \frac{m^2}{\omega^2}\right)^2} \left[ \chi^2 + \frac{m^2}{\omega^2} \right] = \frac{4\pi\alpha^2}{s\left(\chi^2 + \frac{m^2}{\omega^2}\right)} \quad (\text{eq. 102.1})$$

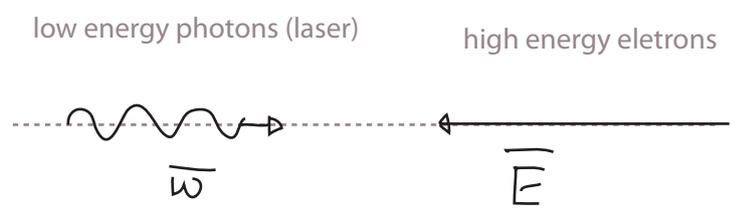
(que concorda com 98.1)

↪ helicity flip part

Esta separação entre a parte que inverte a polarização e a que não inverte nos permite diversas aplicações, imagine a situação:

### Espalhamento Compton reverso

Lab Frame



Definimos:  $\omega' \equiv \gamma \bar{E}$   
 ↪ energia do fóton espalhado

No limite em que  $s = 4\bar{E}\omega \gg m^2$  é possível mostrar que:  $\gamma \approx \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) \approx 1 - \frac{\chi^2}{4}$  (eq. 102.2)

↪ para  $\theta \sim \pi$   
 ↪ ângulo no referencial do CM

e podemos colocar a equação 102.1 na forma:

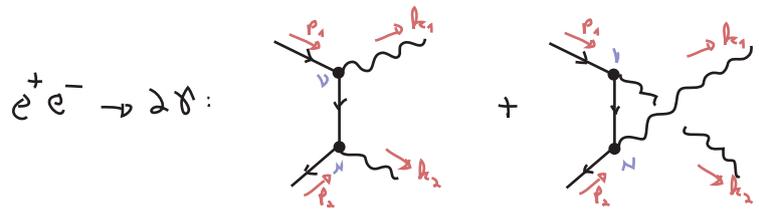
$$\frac{d\sigma}{d\gamma} \approx \frac{2\pi\alpha^2}{s\left((1-\gamma) + \frac{m^2}{s}\right)^2} \left[ \underbrace{(1-\gamma)}_{\text{helicidade preservada}} + \underbrace{\frac{m^2}{s}}_{\text{"helicity flip"}} \right] \quad (\text{eq. 102.3})$$

Suponha que o laser seja polarizado em fótons de mão direita, e os eletrons não são polarizados (logo temos eletrons de ambas as helicidades para espalhar o foton nos canais que preservam helicidade e a invertem). Podemos concluir algumas coisas:

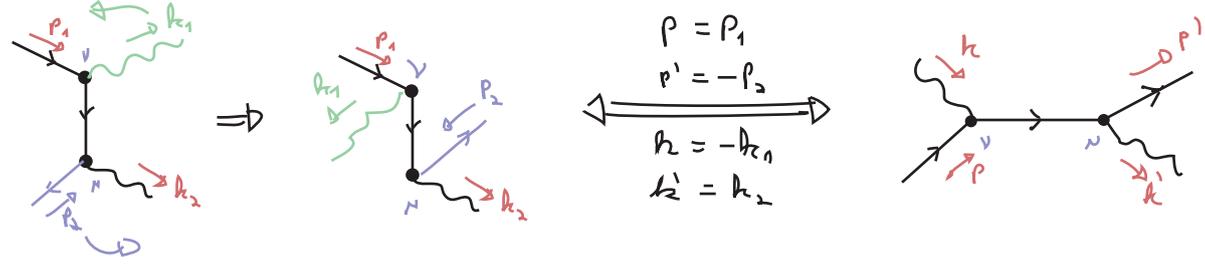
- (1) os fótons com maior energia ( $\gamma \sim 1$ ) sairão na direção  $\theta \sim \pi$  (no ref. do CM) e terão polarização de mão esquerda pois a parte que preserva helicidade é praticamente zero.

(2) assim que saímos desta região  $\theta \sim \pi$  o canal que preserva a helicidade domina e a maioria dos fótons é de mão direita.

Aniquilação  $e^+ e^- \rightarrow 2\gamma$



Este processo está ligado ao espalhamento Compton por crossing symmetry:

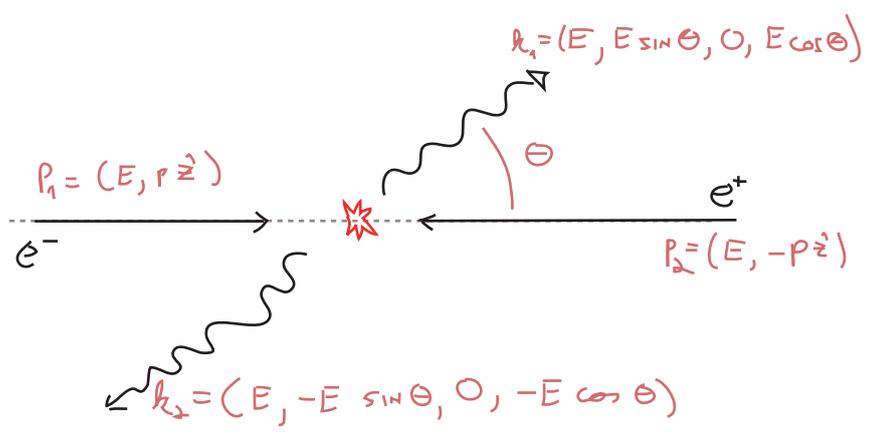


Fazendo estas substituições em 94.1, temos:

$$\frac{1}{4} \sum |M|^2 = -2e^4 \left[ \frac{p_1 \cdot k_2}{p_1 \cdot k_1} + \frac{p_1 \cdot k_1}{p_1 \cdot k_2} + 2m^2 \left( \frac{1}{p_1 \cdot k_1} + \frac{1}{p_1 \cdot k_2} \right)^2 - m^4 \left( \frac{1}{p_1 \cdot k_1} + \frac{1}{p_1 \cdot k_2} \right)^2 \right]$$

(eq. 103.1)

este sinal é errado, está aqui porque aplicamos a crossing sym. direto em  $|M|^2$  se tivéssemos aplicado isso em  $M$  e depois tomado o módulo ele não apareceria.



A seção de choque será:

$$\left( \frac{d\sigma}{d\cos\theta} \right)_{cm} = \frac{2\pi\alpha^2}{s} \left( \frac{E}{p} \right) \left[ \frac{E^2 + p^2 \cos^2\theta}{m^2 + p^2 \sin^2\theta} + \frac{2m^2}{m^2 + p^2 \sin^2\theta} - \frac{2m^4}{(m^2 + p^2 \sin^2\theta)^2} \right]$$

(eq. 103.2)

No limite de altas energias:  $p^2 \simeq E^2 \Rightarrow E^2 + p^2 \cos^2\theta \simeq E^2 (1 + \cos^2\theta)$

E, desde que evitemos a região de  $\theta$  em que:  $\sin \theta \approx \frac{m}{p}$

podemos escrever:  $m^2 + p^2 \sin^2 \theta \approx E^2 \sin^2 \theta$

$$\left( \frac{d\sigma}{d\cos\theta} \right)_{cm} = \frac{2\pi\alpha^2}{s} \left( \frac{E}{R} \right) \left[ \frac{E^2(1+\cos^2\theta)}{m^2 + p^2 \sin^2\theta} + \frac{2m^2}{m^2 + p^2 \sin^2\theta} - \frac{2m^4}{(m^2 + p^2 \sin^2\theta)^2} \right]$$

$$\left( \frac{d\sigma}{d\cos\theta} \right)_{cm} \approx \frac{2\pi\alpha^2}{s} \frac{(1 + \cos^2\theta)}{\sin^2\theta} \quad (\text{eq. 104.1})$$

Como os dois fótons são idênticos, temos um fator 1/2 a mais depois de integrar:

$$\sigma_{TOT+L} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d(\cos\theta) \frac{2\pi\alpha^2}{s} \frac{(1 + \cos^2\theta)}{(1 - \cos^2\theta)} \quad (\text{eq. 104.2})$$

O resultado da equação 104.1, apesar de ser uma aproximação de um cálculo em primeira ordem de perturbação, descreve bastante bem os dados:

