

Se fizermos o mesmo para a região III, veremos que

$$\int d^4x e^{iP \cdot x} \langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

$$\underbrace{P_0 \rightarrow -E_P}_{\substack{P_0 \rightarrow -E_P \\ P_0 \rightarrow -E_P}} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \sqrt{Z} \langle \Omega | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | -\vec{p} \rangle$$

A região II não possui polos em $P_0 \rightarrow E_P$ ou $P_0 \rightarrow -E_P$ se tentássemos o mesmo procedimento chegaríamos a algo na forma:

$$\int d^3k \frac{i}{P_0 - E_{k+p} + E_k}$$

Gostaríamos de continuar fazendo isso para todos os outros campos dentro do produto temporalmente ordenado, mas temos que ter cuidado com o isolamento das partículas externas. A forma de fazer isso é voltar na página 110 e, ao invés da transformada de Fourier, usamos um pacote de onda estreito:

$$\int d^4x e^{iP^0 x_0} e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \longrightarrow \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int d^4x e^{iP^0 x_0} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \psi(\vec{k})$$

$\psi(\vec{k})$: distribuição estreita centrada em \vec{p} (voltamos a transformada de Fourier se fizemos esta distribuição virar uma delta de Dirac)

Esta pequena indeterminação no momento da partícula associada faz com que ela fique com a posição contida em uma região do tamanho deste pacote. Retraçando todo o raciocínio acima teremos agora:

$$\sum_{\lambda} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \psi(\vec{k}) \frac{1}{2E_k(\lambda)} \frac{i}{p^0 - E_k(\lambda) + i\epsilon} \langle \Omega | \phi(x) | \lambda_0 \rangle \langle \lambda_k | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

$$\underbrace{\sim}_{P^0 \rightarrow E_P} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{i \psi(\vec{k})}{\tilde{p}^2 - m^2 + i\epsilon} \sqrt{Z} \langle \vec{k} | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

$$\tilde{p} = (P_0, \vec{k})$$

Na prática agora o polo "anda" conforme variamos \vec{k} , ou seja, o polo de uma partícula virou um pequeno corte cujo comprimento é a largura de $\psi(\vec{k})$. A volta ao caso anterior é bem definida conforme estreitamos $\psi(\vec{k})$ até que vire uma delta e o corte volta a ser um polo.

Se fizermos o mesmo para todos os pontos na função de $n+2$ pontos da página 110, obteremos:

$$\int \prod_{i=1}^{n+2} \left(\frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3} d^4 x_i e^{i \tilde{P}_i x_i} \varphi_i(\vec{k}_i) \right) \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle$$

De novo temos três regiões:



Se tomarmos os tempos que dividem as regiões suficientemente grandes (para o passado ou futuro) podemos assumir que nestas regiões já não há mais sobreposição alguma dos pacotes e dividir cada uma das integrais anteriores em três regiões, assim como fizemos antes. Mais uma vez, não precisamos nos preocupar com a região II, pois as integrais nessa região resultam em funções analíticas. Pensemos nas regiões I e III, e no caso em que só "empacotamos" dois campos:

$$x_1^0, x_2^0 \in I$$

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle = \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} T \{ \phi(x_3) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle$$

$$\sum_{\lambda} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} \int \prod_{i=1,2} \left(\frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3} d^4 x_i e^{i \tilde{P}_i x_i} \varphi_i(\vec{k}_i) \right)$$

$$\times \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} | \lambda_k \rangle \langle \lambda_k | T \{ \phi(x_3) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle$$

É aqui os pacotes de onda se tornam importantes. Como este estado tem que ser aniquilado por campos que sofrem a restrição de só serem diferentes de zero em locais isolados do espaço ele tem que ser composto de duas excitações distintas e isoladas espacialmente. Neste caso podemos fazer a aproximação:

$$\sum_{\lambda} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} | \lambda_k \rangle \langle \lambda_k | \Omega \rangle =$$

$$= \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{k_1}} \int \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{k_2}} \langle \Omega | \phi(x_1) | \lambda_{k_1} \rangle \langle \Omega | \phi(x_2) | \lambda_{k_2} \rangle \langle \lambda_{k_1} \lambda_{k_2} | \Omega \rangle$$

Agora podemos separar a contribuição dos "polos" de uma partícula (que na verdade agora são pequenos cortes):

$$\int \prod_{i=1}^2 \left(\frac{\int \vec{k}_i}{(2\pi)^3} \int d^4x_i e^{i\vec{p}_i \cdot x_i} \varphi_i(\vec{k}_i) \right) \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle \sim$$

$$\underset{\substack{P_1^0 \rightarrow E_{k_1} \\ P_2^0 \rightarrow E_{k_2}}}{\sim} \int \prod_{i=1}^2 \left(\frac{\int \vec{k}_i}{(2\pi)^3} \varphi_i(\vec{k}_i) \frac{i \sqrt{z^1}}{P_i^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \langle \vec{k}_1 \vec{k}_2 | T \{ \phi(x_3) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle$$

Para voltarmos em estados assintóticos de momento bem definido, basta tomar o limite em que os pacotes viram funções delta. A expressão acima se torna:

$$\prod_{i=1}^2 \left(\frac{i \sqrt{z^1}}{P_i^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \langle \vec{P}_1 \vec{P}_2 | T \{ \phi(x_3) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle$$

Finalmente, podemos fazer o mesmo para as funções que restam (colocando-as na região III - passado) e vemos que o termo mais singular de:

$$\int \prod_{i=1}^{n+2} \left(\frac{\int \vec{k}_i}{(2\pi)^3} \int d^4x_i e^{i\vec{p}_i \cdot x_i} \varphi_i(\vec{k}_i) \right) \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle$$

$$\sim \prod_{i=1}^{n+2} \left(\frac{i \sqrt{z^1}}{P_i^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \langle \vec{P}_1 \vec{P}_2 | (-\vec{P}_3) (-\vec{P}_4) \dots \rangle_{IN}$$

contém em si elementos de matriz de S

Resumindo

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle$$

pacotes de onda

$$\prod (\text{propagadores completos}) \langle S \rangle$$

* volta ao pacote estreito

$$\int \prod \frac{\int \vec{k}_i}{(2\pi)^3} \varphi_i(\vec{k}_i) \langle \phi_1 \dots \phi_{n+2} \rangle \xrightarrow[\text{termo mais singular}]{\text{polos}} \int \prod \int \vec{k}_i \frac{\varphi_i(\vec{k}_i) \sqrt{z^1}}{P_i^2 - \vec{k}_i^2 - m^2} \langle \vec{k}_1 \vec{k}_2 | \vec{k}_3 \dots \rangle$$

* se pudermos inverter a ordem das duas operações indicadas, fica bem fácil obter os elementos da matriz S. Na prática esquecemos todo o caminho que envolve os pacotes e calculamos o correlator da teoria interagente no espaço dos momentos:

$$\prod_{i=1}^n \int d^4x_i e^{i p_i x_i} \prod_{j=1}^m \int d^4y_j e^{-i k_j y_j} \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \phi(y_1) \dots \phi(y_m) \} | \Omega \rangle$$

$$\sim \left(\prod_{i=1}^n \frac{\sqrt{Z}^i}{p_i^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \left(\prod_{j=1}^m \frac{\sqrt{Z}^i}{k_j^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n | S | \vec{k}_1 \dots \vec{k}_m \rangle$$

(eq. 115.1)

ai basta olhar a função resultante na região em que todas as partículas externas estão "on-shell", perto de seus polos. O coeficiente do produto de todos os polos é o elemento de matriz S.

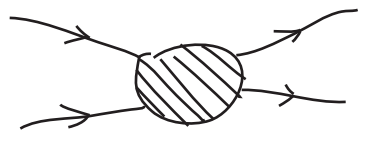
ps: no caso de partículas com spin, teremos fatores tais como $u^s(p)$ acompanhando os propagadores, neste caso temos também que separar estes fatores da matriz S, multiplicando por polarizações que projetem nos estados de spin finais e iniciais de espalhamento que queremos calcular

ps2: também temos que lidar com o fator \sqrt{Z} , podemos identificar quanto ele vale na função de dois pontos de cada partícula e "separá-lo" junto com os propagadores para obter a matriz S

Importante: note que o fator Z e a massa física apareceram neste desenvolvimento geral, mesmo sem termos identificado qualquer divergência nas correções radiativas. Suponha que estivessemos trabalhando em poucas dimensões e as integrais de loop convergissem. Teríamos que introduzir Z e uma massa m diferente daquela na lagrangeana (m_0)?

De fato, a possibilidade de fazer esta inversão foi provada por Lehmann, Symanzik, and Zimmermann e a equação 115.1 acima é conhecida como **Fórmula de Redução de LSZ**

Vamos tentar expressar esta fórmula por meio de diagramas de Feynman. Consideremos um caso simples:



Consideramos apenas os diagramas conectados, já que os desconectados não possuem a multiplicação de 4 polos que procuramos.

lembre-se, por exemplo, da teoria $\lambda\phi^4$ -

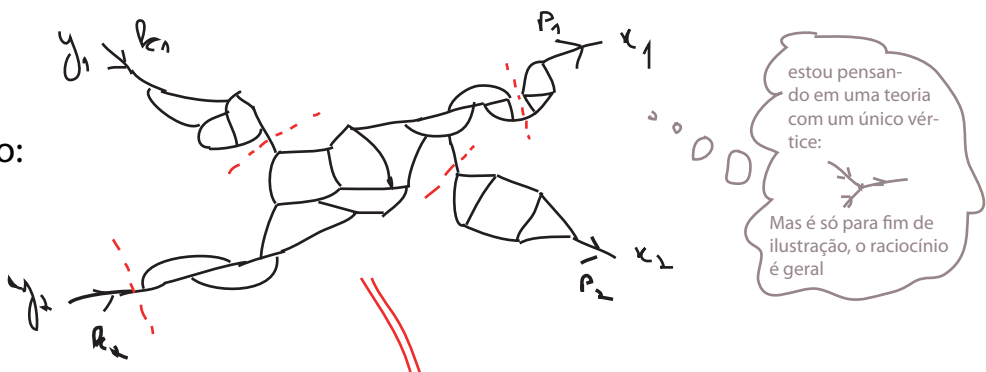
$$\text{X} = \Delta_F(x_1-z) \Delta_F(x_2-z) \Delta_F(x_3-z) \Delta_F(x_4-z)$$

$$\text{---} + \text{---} \sim \Delta_F \Delta_F$$

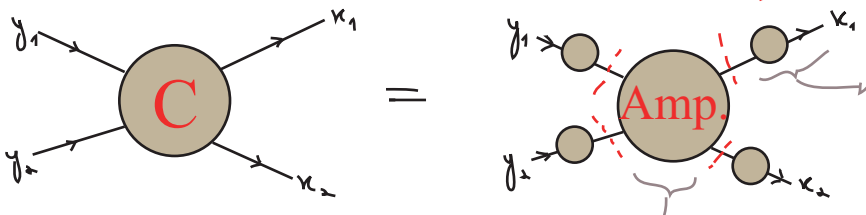
A função de quatro pontos no espaço dos momentos é:

$$\left(\prod_1^2 \int d^4 k_i e^{i P_i x_i} \right) \left(\prod_1^2 \int d^4 y_i e^{-i k_i y_i} \right) \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(y_1) \phi(y_2) \} | \Omega \rangle$$

Isso pode ser bem complicado:



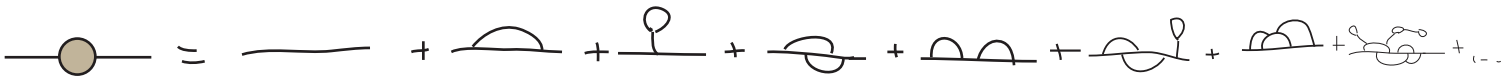
Mas podemos agrupar as correções da seguinte forma



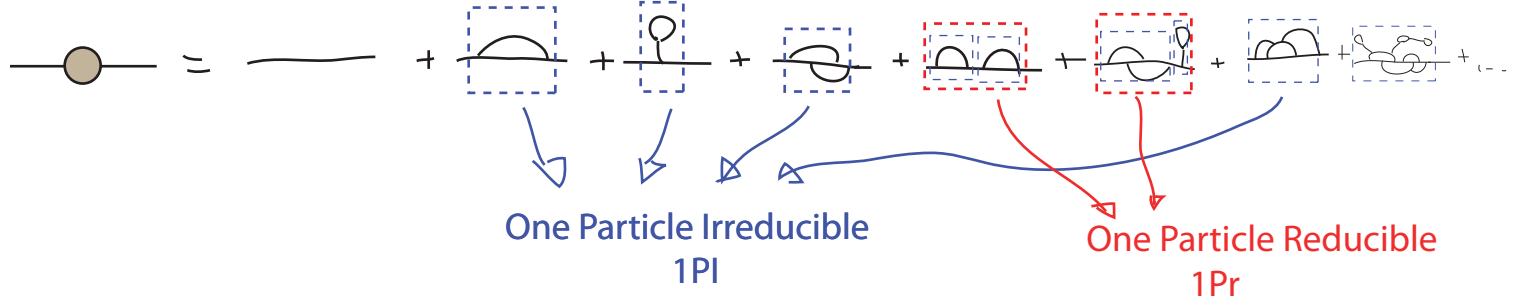
com isso agrupamos todas correções que só modificam o propagador nestas "pernas" - os **Propagadores Vestidos ou Completos**

Resta a parte que modifica o vértice da interação que chamamos de diagrama **Amputado**

Pensemos primeiro na estrutura dos propagadores:



Podemos dividir as correções em dois grupos:



Se definirmos um objeto que coleciona todas as correções 1PI:

$$-i M^2(p^2) = \rightarrow \text{1PI} \rightarrow$$

fica claro que as correções 1Pr serão dadas por: $\text{1PI} + \text{1PI} \text{1PI} + \text{1PI} \text{1PI} \text{1PI} + \dots$

De forma que a função de dois pontos completa pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
 & \int d^4x \langle \Omega | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(0) \} | \Omega \rangle e^{i p x} = \text{Diagrama} = \\
 & = \text{Diagrama} + \text{Diagrama com 1PI} + \text{Diagrama com 2PI} + \text{Diagrama com 3PI} + \dots = \\
 & = \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \frac{i}{p^2 - m_0^2} (-i M^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \frac{i}{p^2 - m_0^2} (-i M^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2} (-i M^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \dots = \\
 & = \frac{i}{p^2 - m_0^2} \left(1 + (-i M^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2} + (-i M^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2} (-i M^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \dots \right) = \\
 & = \frac{i}{p^2 - m_0^2} \left(1 - \frac{M^2}{p^2 - m_0^2} \right)^{-1} = \frac{i}{p^2 - m_0^2 - M(p^2)^2}
 \end{aligned}$$

O propagador completo é dado por uma função complicada, que envolve a **auto energia M**. Conforme a discussão das pags 91-92, sabemos que perto de $p^0 = E_p$ o único polo presente é o da massa física:

$$\frac{i}{p^2 - m_0^2 - M(p^2)^2} \underset{p^0 \rightarrow E_p}{\sim} \frac{i Z}{p^2 - m^2} + (\text{função sem polos})$$

Isso quer dizer que se formos para a região: $\left. \begin{array}{l} p_1^0 \rightarrow E_{p_1} \\ p_2^0 \rightarrow E_{p_2} \\ k_1^0 \rightarrow E_{k_1} \\ k_2^0 \rightarrow E_{k_2} \end{array} \right\}$

A função de quatro pontos terá o seu termo mais singular na forma:

$$\text{Diagrama de 4 pontos} = \frac{i Z}{p_1^2 - m^2} \frac{i Z}{p_2^2 - m^2} \frac{i Z}{k_1^2 - m^2} \frac{i Z}{k_2^2 - m^2} \text{Diagrama Amp.} + \dots$$

termos regulares

onde, do lado direito, resta apenas o vértice e suas correções (diagramas Amputados)

Comparando isto com o lado direito da fórmula de LSZ (eq. 115.1), reconhecemos os produtos dos polos e vemos que a matriz S deve ser:

$$\langle P_1 P_2 | S | k_1 k_2 \rangle = Z^2 \text{ Amp.}$$

Para fins de ilustração, no caso $\lambda\phi^4$, (em teoria de perturbação) tínhamos:

$$\begin{aligned} \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(y_1) \phi(y_2) \} | \Omega \rangle = \\ = -3 \left[\text{diagrama desconectado} \right] - \frac{i\lambda}{4!} \left[72 \left(\text{diagrama } \Delta_F \Delta_F \Delta_F \Delta_F \right) + 24 \left(\text{diagrama } \Delta_F \Delta_F \Delta_F \Delta_F \right) \right] + O(\lambda^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -i\lambda \int \Delta_F(z-x_1) \Delta_F(z-x_2) \Delta_F(z-x_3) \Delta_F(z-x_4) dz \\ = -i\lambda \int dz \int \frac{d^4k_1 d^4k_2 d^4k_3 d^4k_4}{(2\pi)^{16}} \frac{i e^{-ik_1(z-x_1)}}{k_1^2 - m_0^2} \dots \frac{i e^{-ik_4(z-x_4)}}{k_4^2 - m_0^2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int dz e^{-iz(\dots)} \rightarrow (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \\ = -i\lambda \int \frac{d^4k_1 d^4k_2 d^4k_3 d^4k_4}{(2\pi)^{16}} \frac{i}{k_1^2 - m_0^2} \dots \frac{i}{k_4^2 - m_0^2} \delta^4(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) e^{ik_1 x_1} \dots e^{ik_4 y_4} \end{aligned}$$

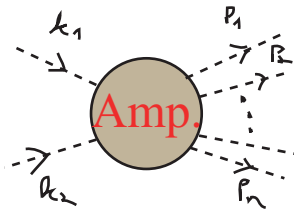
que é a função no espaço das posições. Passando para o espaço dos momentos:

$$\begin{aligned} \int d^4k_1 e^{iP_1 x_1} \int d^4k_2 e^{iP_2 x_2} \int d^4k_3 e^{-ik_3 y_3} \int d^4k_4 e^{-ik_4 y_4} \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(y_1) \phi(y_2) \} | \Omega \rangle = \\ = -i\lambda (2\pi)^4 \delta^4(-P_1 - P_2 + k_1 + k_2) \left[\text{diagramas de amputação} \right] \end{aligned}$$

notem que nessa caso não temos o Z (pois estamos em Leading Order)

Uma análise equivalente para funções de mais pontos nos leva a:

$$\langle p_1 \dots p_n | S | k_1, k_2 \rangle = (\sqrt{Z})^{n+2}$$



Note que para campos com spin teríamos fatores de polarização no lado direito, tal como $u_s(k)$ ou $\varepsilon_\mu(k)$