

Teoria de Perturbação

(Peskin 4.1)

Por enquanto o curso abordou campos livres, cujas excitações tem uma interpretação de partículas quânticas também livres. Nestas teorias não vemos interações, espalhamentos nem estados ligados. Em suma, em um universo descrito por estas teorias não veríamos nada. Agora vamos tentar nos aproximar de teorias mais próximas da realidade introduzindo termos de interação na Hamiltoniana do sistema. Queremos continuar trabalhando com teorias locais, portanto este termo de interação será da forma:

$$H_{INT} = \int d^3x \frac{\mathcal{L}_{INT}[\phi(x)]}{\mathcal{L}_{INT}[\phi(x)]} = - \int d^3x \mathcal{L}_{INT}[\phi(x)]$$

\swarrow só depende de campos calculados em um mesmo ponto "x"
 em contraste com: $\mathcal{L}_{INT}[\phi(x), \phi(y), \dots, \phi(z)]$

Ao longo das próximas página abordaremos três exemplos de teorias interagentes:

(I) Teoria "lambda phi 4":

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2}_{\mathcal{L}_0} - \underbrace{\frac{\lambda}{4!} \phi^4}_{\mathcal{L}_{INT}} \quad (\text{eq. 1.1})$$

$\lambda \rightarrow$ constante de acoplamento (claramente voltamos para o caso livre quando $\lambda = 0$)

E.O.M.

$$(\partial^2 + m^2) \phi(x) = - \frac{\lambda}{3!} \phi^3 \quad (\text{eq. 1.2})$$

Que tem uma solução bem mais complicada do que a equação de movimento livre (de fato não sabemos resolvê-la exatamente). Para quantizar, impomos a relação de comutação:

$$[\phi(t, \vec{x}), \Pi(t, \vec{y})] = i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$$

\rightarrow é o mesmo da teoria livre pois a interação não depende de $\partial_\mu \phi$

Exemplos: o bóson de Higgs (o único escalar "fundamental" presente na natureza) tem esta interação e ela também aparece em "quasi-partículas" de certos modelos de matéria condensada.

(II) Eletrodinâmica Quântica (QED):

$$\mathcal{L}_{QED} = \mathcal{L}_{DIRAC} + \mathcal{L}_{MAXWELL} + \mathcal{L}_{INT} = \bar{\Psi} (i \not{D} - m) \Psi - \frac{1}{4} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) - e \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi A_\mu$$

elétron carga é algo como a constante de acoplamento

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad \text{fóton}$$

Para uma teoria com mais férmions (com carga elétrica) basta ir somando termos do tipo:

$$\bar{\Psi}_f (i \not{D} - m_f) \Psi_f - Q_f \bar{\Psi}_f \gamma^\mu \Psi_f A_\mu$$

↳ índice que diferencia os férmions ("flavor" ou "sabor")
↳ massa do férmion
↳ carga do férmion

mas nos limitaremos ao caso do elétron por enquanto (do ponto de vista da QED adicionar mais férmions seria só repetição da mesma física).

Podemos colocar este Lagrangiana em uma forma mais simples usando a derivada covariante:

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + i e A_\mu(x)$$

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\Psi} (i \not{D} - m) \Psi - \frac{1}{4} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \quad \text{(eq. 2.1)}$$

Uma propriedade crucial desta Lagrangiana é que ela é invariante por transformações de gauge:

$$\Psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} \Psi(x) \quad A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x)$$

fase local

De fato uma das formas de chegar a esta Lagrangiana a partir de "primeiros princípios" é postular a existência de um férmion e exigir que a Lagrangiana seja invariante pela primeira transformação da esquerda acima. Isso é impossível sem a introdução de um campo vetorial que se transforme conforme a transformação da direita. Aí basta escrever todos os termos envolvendo estes dois campos que sejam invariantes sobre estas transformações e chegamos na equação 2.1 (a menos de infinitos termos não-renormalizáveis, o que será melhor entendido em QFT II, mas por enquanto podemos ter como imposição adicional proibir produtos e potências mais altas dos operadores que já aparecem em 2.1 ou aplicação de mais derivadas - o que equivale a impor que a teoria seja renormalizável)

↳ EX: $(\Psi\Psi), (\bar{\Psi}\not{D}\Psi)^2, \bar{\Psi}\Psi(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}), \partial^\mu \partial_\mu (F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}), \dots$

E.O.M. \rightarrow $(i \not{D} - m) \Psi(x) = 0$ ↳ eqs. de Dirac + acoplamento mínimo
(eq. 2.2)

\rightarrow $\partial_\mu F^{\mu\nu} = e \bar{\Psi} \gamma^\nu \Psi \equiv e j^\nu$
(eq. 2.3)

↳ eqs. de Maxwell não homogêneas e a corrente é a corrente conservada em 2.2: $j^\nu = \bar{\Psi} \gamma^\nu \Psi$

A quantização do campo fermiônico não muda. A quantização do fóton (ou de qualquer outro campo de Gauge) é mais delicada (note que $\pi^0 = 0$ em nossa Lagrangiana) e a evitaremos por enquanto.

(III) Interação de Yukawa:

$$\mathcal{L}_{\text{YUKAWA}} = \mathcal{L}_{\text{DIRAC}}[\Psi] + \mathcal{L}_{\text{K-G}}[\phi] - g \bar{\Psi} \Psi \phi \quad (\text{eq. 3.1})$$

acoplamento de Yukawa

Assim como na QED podemos adicionar mais férmions e escalares com diferentes acoplamentos entre si:

$$g_{f_1 f_2} \bar{\Psi}_{f_1} \Psi_{f_2} \phi_2$$

Exemplos: força nuclear forte (onde os protons e neutrons são os férmions e o pion é o escalar); interação do Higgs com quase todos os férmions do Modelo Padrão (tem um monte de "Yukawas" como parâmetros livres no Modelo Padrão)

Quadro de Interação e o Teorema de Wick

(Peskin 4.2 e 4.3, Stermann Appendix A)

Os "quadros" da MQ:

Dado um elemento de matriz: $\langle \Psi | \hat{A} | \phi \rangle$
 $\hookrightarrow \hat{A} = \hat{A}(Q, P)$

(no que segue estou forçando minha letra a diferenciar $\frac{d}{dt}$ de $\frac{d}{dt}$)

a evolução temporal é dada por:

$$i \frac{d}{dt} \langle \Psi | \hat{A} | \phi \rangle = \langle \Psi | [\hat{A}, \hat{H}] | \phi \rangle \quad (\text{eq. 3.2})$$

\hookrightarrow calculado em t

A equação 3.2 tem toda a informação sobre a evolução, mas gostaríamos de separar a evolução dos operadores e estados, definindo:

$$i \frac{d\hat{A}}{dt} \equiv [\hat{A}, \hat{M}]$$

$$\hat{M}^+ = M$$

$$i \frac{d|\psi\rangle}{dt} \equiv \hat{N}|\psi\rangle$$

$$\hat{N}^+ = N$$

$$-i \frac{d\langle\psi|}{dt} \equiv \hat{N}^+ \langle\psi|$$

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} \langle \Psi | \hat{A} | \phi \rangle &= i \left(\frac{d\langle \Psi |}{dt} \right) \hat{A} | \phi \rangle + i \langle \Psi | \frac{d\hat{A}}{dt} | \phi \rangle + i \langle \Psi | \hat{A} \left(\frac{d|\phi\rangle}{dt} \right) \\ &= - \langle \Psi | \hat{N}^+ \hat{A} | \phi \rangle + \langle \Psi | [\hat{A}, \hat{M}] | \phi \rangle + \langle \Psi | \hat{A} \hat{N} | \phi \rangle = \end{aligned}$$

Definindo \hat{W} como a transformação "Q. Schrödinger" \rightarrow "Q. Heisenberg", vemos que:

$$\hat{A}_H(t) = e^{i\hat{H}(t-t_0)} \hat{A}(t_0) e^{-i\hat{H}(t-t_0)} \iff \hat{W} = e^{i\hat{H}(t-t_0)}$$

O que também poderia ter sido obtido de:

$$|\Psi_H(t)\rangle = \hat{W} |\Psi_S(t)\rangle \implies |\Psi_S(t)\rangle = \hat{W}^{-1} |\Psi_H(t)\rangle = \underbrace{e^{-i\hat{H}(t-t_0)}}_{U_S(t,t_0)} |\Psi(t_0)\rangle$$

(eq. 4.2)

$$\hat{W} = U_S^{-1}(t, t_0) = U_S(t_0, t) \quad (\text{eq. 5.1})$$

De onde vemos que esta transformação é o inverso do operador evolução.

Quadro de Interação (ou de Dirac):

Suponha que tenhamos um hamiltoniano do tipo:

$$\hat{H} = \underbrace{\hat{H}_0}_{\text{parte livre (quadrática nos campos)}} + \underbrace{\hat{H}_1}_{\text{parte interagente (potências maiores)}}$$

o quadro interação equivale à escolha:

$$\hat{M} = \hat{H}_0 \quad \hat{N} = \hat{H}_1$$

$$i \frac{d\hat{A}_I(t)}{dt} = [\hat{A}_I(t), \hat{H}_0] \quad (\text{eq. 5.2})$$

$$i \frac{d|\Psi_I(t)\rangle}{dt} = \hat{H}_1 |\Psi_I(t)\rangle \quad (\text{eq. 5.3})$$

Mais uma vez, todos os quadros são iguais em t_0 :

$$\hat{A}_I(t_0) = \hat{A}_S(t_0) = \hat{A}_H(t_0) = \hat{A}(t_0) \quad |\Psi_I(t_0)\rangle = |\Psi_S(t_0)\rangle = |\Psi_H(t_0)\rangle = |\Psi(t_0)\rangle$$

A evolução dos operadores se dá como no quadro de Heisenberg da teoria livre:

$$i \frac{d\hat{H}_0}{dt} = 0 \quad \hat{H}_{0I}(t) = \hat{H}_{0S}(t) = \hat{H}_0$$

Gostaríamos de uma solução similar a $e^{-i H_{1I} t}$, mas isso requer mais cuidado pois H_{1I} na eq. 6.2 depende do tempo. Notemos que a expressão:

$$U_I(t, t_0) = 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 H_{1I}(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_{1I}(t_1) H_{1I}(t_2) + (-i)^3 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 \dots \quad (\text{eq. 7.1})$$

NOTE

$$\frac{d}{dt} \textcircled{I} = -i H_{1I}(t) \textcircled{I}$$

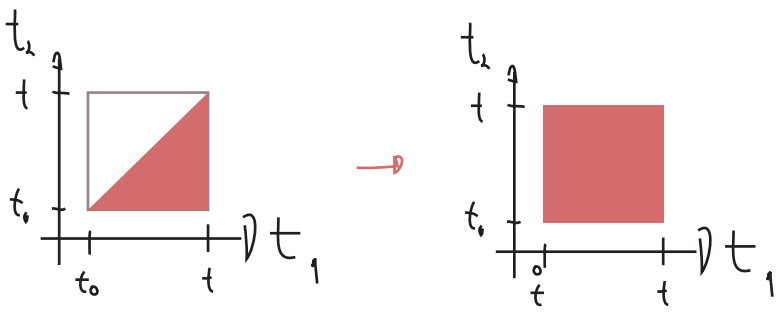
$$\frac{d}{dt} \textcircled{II} = (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_2 H_{1I}(t) H_{1I}(t_2) = -i H_{1I}(t) \textcircled{I}$$

$$\left(\frac{d}{dt} \textcircled{III} = -i H_{1I}(t) \textcircled{II} \right)$$

e assim por diante

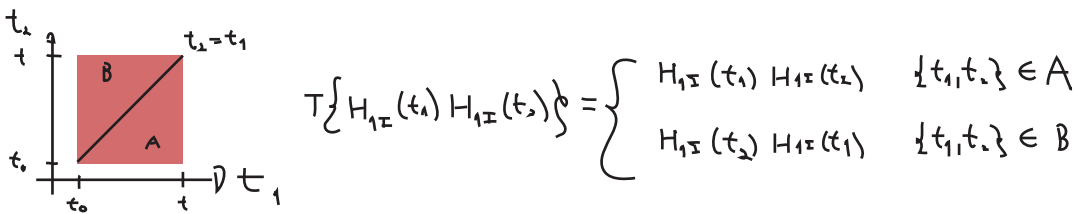
$$\therefore \frac{d}{dt} U_I(t, t_0) = -i H_{1I}(t) U_I(t, t_0) \quad \rightarrow \text{ o que prova que 7.1 é solução de 6.2}$$

Para simplificar mais o Ansatz 7.1, podemos trocar os limites de integração



tomando o cuidado de notar que $[H_{1I}(t_1), H_{1I}(t_2)] \neq 0$

de fato, usando o ordenamento temporal:



Podemos escrever:

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 T \{ H_{1I}(t_1) H_{1I}(t_2) \} = \underbrace{\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H(t_1) H(t_2)}_A + \underbrace{\int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 H(t_1) H(t_2)}_B = 2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H(t_1) H(t_2)$$

Analogamente:

$$\int_{t_0}^t dt_1 \dots dt_n T \{ H_{1I}(t_1) \dots H_{1I}(t_n) \} = n! \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_{1I}(t_1) \dots H_{1I}(t_n)$$

De forma que:

$$\hat{U}_I(t, t_0) = 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 T \{ H_{1I}(t_1) \} + \frac{(-i)^2}{2!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 T \{ H_{1I}(t_1) H_{1I}(t_2) \} + \frac{(-i)^3}{3!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^t dt_3 T \{ \dots$$

$$\boxed{U_I(t, t_0) = T \left\{ \text{Exp} \left[-i \int_{t_0}^t dt' H_{1I}(t') \right] \right\}} \quad (\text{eq. 8.1})$$

Esta separação entre a teoria livre e a parte interagente exige um cuidado adicional. Anteriormente usamos a definição para o vácuo como:

$$H_0 |0\rangle \equiv E_0^L |0\rangle = 0$$

Assumindo H_0 normalmente ordenado
Menor autovalor de H_0
Hamiltoniano do sistema

Faremos o mesmo para o Hamiltoniano com a interação: $H | \Omega \rangle = (H_0 + H_1) | \Omega \rangle \equiv E_0 | \Omega \rangle$

Menor autovalor de $H = H_0 + H_1$

e, em geral: $|0\rangle \neq |\Omega\rangle$. Gostaríamos de expressar este novo vácuo em termos de grandezas conhecidas.

Construindo um conjunto completo com os autoestados do hamiltoniano total temos:

$$H |n\rangle = E_n |n\rangle$$

$$\hat{1} = |\Omega\rangle\langle\Omega| + \sum_{n \neq 0} |n\rangle\langle n|$$

Tomemos um estado que começou no vácuo "livre" da teoria e está evoluindo com o Hamiltoniano completo:

$$e^{-i\hat{H}T} |0\rangle = e^{-iE_0 T} |\Omega\rangle\langle\Omega|0\rangle + \sum_{n \neq 0} e^{-iE_n T} |n\rangle\langle n|0\rangle$$

e façamos o limite $T \rightarrow \infty(1 - i\epsilon)$

$\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-iE_n T} = e^{-\epsilon E_n T} \gg e^{-\epsilon E_1 T} \gg e^{-\epsilon E_2 T} \gg \dots$
 "mata" os estados excitados: $\epsilon > 0$
 $T \rightarrow \infty$

e ficamos só com o zero-ésimo termo da soma do lado direito:

$$\lim_{T \rightarrow \infty(1 - i\epsilon)} \left[e^{-i\hat{H}T} |0\rangle \right] = e^{-iE_0 T} |\Omega\rangle\langle\Omega|0\rangle$$

$$|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1 - i\epsilon)} \frac{e^{-i\hat{H}(T+t_0)} |0\rangle}{e^{-iE_0(T+t_0)} \langle\Omega|0\rangle} = \lim_{T \rightarrow \infty(1 - i\epsilon)} \frac{e^{-i\hat{H}(T+t_0)} e^{i\hat{H}_0(T+t_0)} |0\rangle}{e^{-iE_0(T+t_0)} \langle\Omega|0\rangle}$$

$H_0|0\rangle = 0$

$$|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1 - i\epsilon)} \frac{U_I(t_0, -T) |0\rangle}{e^{-iE_0(T+t_0)} \langle\Omega|0\rangle} \quad (\text{eq. 9.1})$$

$$(\text{eq. 6.3}) \Rightarrow U_I(-T, t_0) = e^{i\hat{H}_0(-T-t_0)} e^{-i\hat{H}(-T-t_0)} \quad U_I(t_0, -T) = e^{+i\hat{H}(-T-t_0)} e^{-i\hat{H}_0(-T-t_0)}$$

$$U_I(-T, t_0) U_I(t_0, -T) = 1$$

De forma semelhante:

$$\langle\Omega| = \lim_{T \rightarrow \infty(1 - i\epsilon)} \frac{\langle 0| U_I(T, t_0)}{e^{-iE_0(T-t_0)} \langle 0|\Omega\rangle} \quad (\text{eq. 9.2})$$

Esse é um bom ponto para para e fazer a pertinente pergunta: o que diabos estamos fazendo? Para que serve este quadro de interação?

Pois bem, a imagem que temos em mente é a de experiências aonde temos objetos quânticos e relativísticos: partículas se movendo e interagindo em altas energias. As situações típicas em que conseguimos estudar partículas relativísticas (Raios Cósmicos ou Aceleradores de Partículas) envolvem três "momentos":

(I) Duas ou mais partículas iniciais se aproximam da região de espalhamento a partir de distâncias que podem ser consideradas bem grandes se comparadas com a "região de interação". Estas partículas se movem em linhas retas e são livres (no sentido em que não interagem entre si - pode haver um campo externo que guia sua trajetória, mas ele é tratado classicamente e modifica a geodésica seguida pela partícula).

(II) Ocorre um choque/espalhamento praticamente instantâneo e pontual, no sentido quântico: o tamanho da região de interação e o tempo de duração da mesma estão protegidos pelo princípio da incerteza: não temos como determinar com exatidão aonde nem quando ela aconteceu.

(III) Um número n de partículas deixa a pequena região de interação. Podem ser as mesmas que entraram (no caso de um choque elástico) ou em número e tipo diferente (no caso inelástico). Estas estão novamente livres (no mesmo sentido do momento I) e se movem por uma distância grande antes de chegar aos detectores, onde são medidas (o que é uma nova interação, completamente independente da anterior).

O quadro de interação, por um lado, faz a evolução dos operadores acontecer segundo a Hamiltoniana livre, o que nos permitirá explorar o fato de o sistema é assintoticamente livre no início e no fim do espalhamento. Além disso a parte de interação do Hamiltoniano depende do tempo, o que nos permitirá restringir sua duração.

Uma expressão que deixa bem clara a utilidade do quadro é a 9.1:

$$|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{U_I(t_0, -T) |0\rangle}{e^{-iE_0(T+t_0)} \langle \Omega | 0 \rangle}$$

Vemos que (a menos de um fator de normalização) o vácuo interagente da teoria é criado a partir do vácuo livre pelo operador de evolução no quadro de interação. Este operador é entre um ponto infinito no passado e t_0 , o que só quer dizer um tempo grande se comparado com o tempo de interação.

Vejamos como ficam as funções de green da teoria interagente neste quadro, primeiro notemos que:

$$\phi(x) = \phi(t, \vec{x}) = \phi_H(t, \vec{x}) \quad (\text{definimos nossos operadores de campo no quadro de Heisenberg})$$

$$\phi_H(t, \vec{x}) = e^{iH(t-t_0)} \phi(t_0, \vec{x}) e^{-iH(t-t_0)}$$

$$\phi_I(t, \vec{x}) = e^{iH_0(t-t_0)} \phi(t_0, \vec{x}) e^{-iH_0(t-t_0)} =$$

$$= \underbrace{e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)}}_{U_I(t, t_0)} \phi_H(x) \underbrace{e^{+iH(t-t_0)} e^{-iH_0(t-t_0)}}_{U_I^+(t, t_0)} \quad 6.3$$

$$\phi_H(x) = U_I^+(t, t_0) \phi_I(x) U_I(t, t_0) \quad (\text{eq. 10.1})$$

Podemos então escrever a função de dois pontos:

$$\begin{aligned} \langle \Omega | \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty(1-\lambda\epsilon)} \frac{\langle 0 | U_I(T, t_0) U_I^\dagger(x^0, t_0) \phi_I(x) U_I(x^0, t_0) \times \\ &\times U_I^\dagger(y^0, t_0) \phi_I(y) U_I(y^0, t_0) \frac{U_I(t_0, -T) | 0 \rangle}{e^{-iE_0(T+t_0)} \langle \Omega | 0 \rangle} = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty(1-\lambda\epsilon)} \frac{1}{e^{-i\lambda E_0 T} |\langle \Omega | 0 \rangle|^2} \langle 0 | U_I(T, x^0) \phi_I(x) U_I(x^0, y^0) \phi_I(y) U_I(y^0, -T) | 0 \rangle \end{aligned}$$

$$U_I^\dagger(t_1, t_2) = e^{-iH_0(t_1-t_2)} e^{iH(t_1, -t_2)} = U_I(t_2, t_1)$$

$$U_I(t_1, t') U_I(t', t_2) = U_I(t_1, t_2)$$

(eq. 11.1)

Por outro lado, sabemos que:

$$1 = \langle \Omega | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-\lambda\epsilon)} \frac{\langle 0 | U_I(T, t_0) \overbrace{U_I(t_0, -T)}^{U_I(T, -T)} | 0 \rangle}{e^{-i\lambda E_0 T} |\langle \Omega | 0 \rangle|^2}$$

Podemos dividir 11.1 por esta unidade, obtendo:

$$\langle \Omega | \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-\lambda\epsilon)} \frac{\langle 0 | U_I(T, x^0) \phi_I(x) U_I(x^0, y^0) \phi_I(y) U_I(y^0, -T) | 0 \rangle}{\langle 0 | U_I(T, -T) | 0 \rangle}$$

(eq. 11.2)

Note que, para $x^0 > y^0$, ambos os lados da equação estão temporalmente ordenados. Poderíamos ter também calculado:

$$\langle \Omega | \phi(y) \phi(x) | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-\lambda\epsilon)} \frac{\langle 0 | U_I(T, y^0) \phi_I(y) U_I(y^0, x^0) \phi_I(x) U_I(x^0, -T) | 0 \rangle}{\langle 0 | U_I(T, -T) | 0 \rangle}$$

E esta estaria ordenada para $y^0 > x^0$. De forma que podemos escrever:

$$\begin{aligned} \langle \Omega | T \{ \phi(y) \phi(x) \} | \Omega \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty(1-\lambda\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \{ U_I(T, y^0) \phi_I(y) U_I(y^0, x^0) \phi_I(x) U_I(x^0, -T) \} | 0 \rangle}{\langle 0 | U_I(T, -T) | 0 \rangle} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty(1-\lambda\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \{ \phi_I(y) \phi_I(x) U_I(T, -T) \} | 0 \rangle}{\langle 0 | U_I(T, -T) | 0 \rangle} \end{aligned}$$

dentro do produto T podemos comutar a vontade

$$\langle \Omega | T \{ \phi(y) \phi(x) \} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-\lambda\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \{ \phi_I(y) \phi_I(x) \text{Exp}[-i \int_{-T}^T dt H_I(t)] \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \{ \text{Exp}[-i \int_{-T}^T dt H_I(t)] \} | 0 \rangle}$$

Esta expressão é trivialmente generalizada para um número arbitrário de operadores:

$$\langle \Omega | T \{ \mathcal{O}_H(x_1) \dots \mathcal{O}_H(x_n) \} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \{ \mathcal{O}_I(x_1) \dots \mathcal{O}_I(x_n) \text{Exp} \left[-i \int_{-T}^T dt H_{\text{int}}(t) \right] \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \{ \text{Exp} \left[-i \int_{-T}^T dt H_{\text{int}}(t) \right] \} | 0 \rangle}$$

(eq. 12.1)

Teorema de Wick

Na prática, obter $\langle \Omega | T \{ \mathcal{O}_H(x_1) \dots \mathcal{O}_H(x_n) \} | \Omega \rangle$ envolve calcular:

$$\langle 0 | T \{ \mathcal{O}_I(x_1) \dots \mathcal{O}_I(x_n) \left(\int_{-T}^T dt H_{\text{int}}(t) \right)^m \} | 0 \rangle$$

→ pode parecer que teremos que calcular infinitos elementos deste tipo, para todos n's. Isto é verdade para o resultado exato. Mas veremos que, em teoria de perturbação, poderemos truncar a expansão da exponencial

Como tanto os operadores $\mathcal{O}_I(x)$ quanto o Hamiltoniano de interação são produtos de campos, este problema se reduz a calcular elementos de matriz do tipo:

$$\langle 0 | T \{ \phi_I(x_1) \dots \phi_I(x_n) \} | 0 \rangle$$

Para isto faremos a divisão do operador de campo:

$$\phi_I = \phi_I^+(x) + \phi_I^-(x) \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi_I^+(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} a_{\vec{p}} e^{-i p x} \\ \phi_I^-(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} a_{\vec{p}}^\dagger e^{+i p x} \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} x^0 = t - t_0 \\ p^0 = E_p \\ x^0 = t - t_0 \\ p^0 = E_p \end{array} \right.$$

(eq. 12.2)

pg 10

$$\phi_I(x) = e^{i H_0(t-t_0)} \phi(t_0, \vec{x}) e^{-i H_0(t-t_0)}$$

$$\phi_I(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_{\vec{p}} e^{i p x} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i p x})$$

$$e^{i H_0(t-t_0)} \hat{a}_{\vec{p}} e^{-i H_0(t-t_0)} = \hat{a}_{\vec{p}} e^{-i E_p(t-t_0)}$$

$$e^{i H_0(t-t_0)} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{-i H_0(t-t_0)} = \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{+i E_p(t-t_0)}$$

De forma que:

$$\phi_I^+ | 0 \rangle = 0 = \langle 0 | \phi_I^-$$

(eq. 12.3)

Definiremos também uma nova notação para o produto normal: $:\mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n: \equiv N[\mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n]$

Imagine que $x^0 > y^0$

$$T \{ \phi_I(x) \phi_I(y) \} = \phi_I^+(x) \phi_I^+(y) + \phi_I^-(x) \phi_I^-(y) + \phi_I^+(x) \phi_I^-(y) + \phi_I^-(x) \phi_I^+(y) =$$

$$= \underbrace{\phi_{\mathbb{I}}^+(x)\phi_{\mathbb{I}}^+(y) + \phi_{\mathbb{I}}^-(x)\phi_{\mathbb{I}}^-(y)}_{\text{estão normal. ordenados}} + [\phi_{\mathbb{I}}^+(x), \phi_{\mathbb{I}}^-(y)] + \underbrace{\phi_{\mathbb{I}}^-(y)\phi_{\mathbb{I}}^+(x) + \phi_{\mathbb{I}}^-(x)\phi_{\mathbb{I}}^+(y)}_{\text{estão normal. ordenados}} =$$

$$\mathcal{T}\{\phi_{\mathbb{I}}(x)\phi_{\mathbb{I}}(y)\} = \mathcal{N}[\phi_{\mathbb{I}}(x)\phi_{\mathbb{I}}(y)] + [\phi_{\mathbb{I}}^+(x), \phi_{\mathbb{I}}^-(y)] \quad x^0 > y^0 \quad (\text{eq. 13.1})$$

Poderia ter feito o mesmo para $y^0 > x^0$ e obteríamos:

$$\mathcal{T}\{\phi_{\mathbb{I}}(x)\phi_{\mathbb{I}}(y)\} = \mathcal{N}[\phi_{\mathbb{I}}(x)\phi_{\mathbb{I}}(y)] + [\phi_{\mathbb{I}}^+(y), \phi_{\mathbb{I}}^-(x)] \quad y^0 > x^0 \quad (\text{eq. 13.2})$$

SIMÉTRICO

Definimos a **contração**:

$$\overbrace{\phi_{\mathbb{I}}(x)\phi_{\mathbb{I}}(y)} \equiv \begin{cases} [\phi_{\mathbb{I}}^+(x), \phi_{\mathbb{I}}^-(y)] & x^0 > y^0 \\ [\phi_{\mathbb{I}}^+(y), \phi_{\mathbb{I}}^-(x)] & y^0 > x^0 \end{cases} \quad (\text{eq. 13.3})$$

Notem que como o comutador é um número, podemos fazer:

$$[\phi_{\mathbb{I}}^+(x), \phi_{\mathbb{I}}^-(y)] \langle 0|0 \rangle = \langle 0| \phi_{\mathbb{I}}^+ \phi_{\mathbb{I}}^- - \phi_{\mathbb{I}}^- \phi_{\mathbb{I}}^+ |0 \rangle = \langle 0| \phi_{\mathbb{I}}^+ \phi_{\mathbb{I}}^- |0 \rangle = D(x-y)$$

$$[\phi_{\mathbb{I}}^+(x), \phi_{\mathbb{I}}^-(y)] = D(y-x)$$

Isso quer dizer que (pg 68 de QFTI-2017):

$$\overbrace{\phi_{\mathbb{I}}(x)\phi_{\mathbb{I}}(y)} = D_F(x-y) \quad (\text{eq. 13.4})$$

Pelo mesmo motivo posso incluí-lo no ordenamento normal:

$$\mathcal{T}\{\phi_{\mathbb{I}}(x)\phi_{\mathbb{I}}(y)\} = \mathcal{N}[\phi_{\mathbb{I}}(x)\phi_{\mathbb{I}}(y) + \overbrace{\phi_{\mathbb{I}}(x)\phi_{\mathbb{I}}(y)}] \quad (\text{eq. 13.5})$$

A generalização desta relação para um número m de campos é chamada de **Teorema de Wick** e é dada por:

$$\mathcal{T}\{\phi_{\mathbb{I}}(x_1) \dots \phi_{\mathbb{I}}(x_m)\} = \mathcal{N}[\phi_{\mathbb{I}}(x_1) \dots \phi_{\mathbb{I}}(x_m) + \text{todas as contrações possíveis}]$$

Veja que "todas contrações possíveis" inclui contrações parciais:

$$T\{\underbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4}_{\phi_{\pm}(x_i)}\} = + \dots + N[\underbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4}_{\mathcal{D}_F(x_1-x_3) N[\phi_2 \phi_4]}] + \dots + N[\underbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4}_{\mathcal{D}_F(x_1-x_3) \mathcal{D}_F(x_2-x_4)}]$$

Em que o teorema de Wick nos ajuda? Note que o que queremos calcular é:

$$\langle 0 | T\{\phi_1 \dots \phi_n\} | 0 \rangle = \langle 0 | N[\phi_1 \dots \phi_n + \text{CONTRAÇÕES}] | 0 \rangle$$

Neste caso, qualquer produto normal que sobre depois da aplicação do teorema dá zero. Ex:

$$\begin{aligned} \langle 0 | N[\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4] | 0 \rangle &= 0 \\ \langle 0 | \mathcal{D}_F(x_1-x_3) N[\phi_2 \phi_4] | 0 \rangle &= \mathcal{D}_F(x_1-x_3) \langle 0 | N[\phi_2 \phi_4] | 0 \rangle = 0 \\ \langle 0 | 0 \rangle \mathcal{D}_F(x_1-x_3) \mathcal{D}_F(x_2-x_4) &\neq 0 \end{aligned}$$

$$\langle 0 | T\{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4\} | 0 \rangle = \mathcal{D}_F(x_1-x_2) \mathcal{D}_F(x_3-x_4) + \mathcal{D}_F(x_1-x_3) \mathcal{D}_F(x_2-x_4) + \mathcal{D}_F(x_1-x_4) \mathcal{D}_F(x_3-x_2)$$

A prova do teorema de Wick é feita por indução. Nós provamos o caso com dois campos, é possível provar o para 3 campos usando o de 2 campos, e então o passo n sabendo que o n-1 vale. Isto fica como exercício.



Regras de Feynman para $\lambda\phi^4$

(Peskin 4.4)

Voltemos agora para a eq. 12.1:

$$\langle \Omega | T\{\phi(x_1) \dots \phi(x_n)\} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{1}{N} \langle 0 | T\{\phi_{\pm}(x_1) \dots \phi_{\pm}(x_n) \text{Exp}[-i \int_{-T}^T dt H_{\text{int}}(t)]\} | 0 \rangle$$

denominador no lado direito de 12.1

E vamos assumir que $\langle H_1 \rangle$ é (em todos os sentidos) pequeno.

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \hat{H}_1 = \lambda \hat{\mathcal{O}}(\phi) \Rightarrow \langle \hat{H}_1 \rangle &= \lambda \langle \hat{\mathcal{O}}(\phi) \rangle \Rightarrow \langle \hat{H}_1^2 \rangle \ll \langle \hat{H}_1 \rangle \ll \langle \hat{1} \rangle \\ \hookrightarrow \lambda \sim 0 \quad \langle \hat{H}_1^2 \rangle &= \lambda^2 \langle \hat{\mathcal{O}}(\phi)^2 \rangle \quad \langle \phi_1 \dots \phi_n \hat{H}_1^2 \rangle \ll \langle \phi_1 \dots \phi_n \hat{H}_1 \rangle \ll \langle \phi_1 \dots \phi_n \rangle \end{aligned}$$

Neste caso podemos calcular o produto temporalmente ordenado em uma **aproximação perturbativa**, expandindo as exponenciais em H_1 , e tomando tantos termos quantos necessários (dependendo da precisão necessária):

$$\langle \Omega | T\{\phi(x_1) \dots \phi(x_n)\} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{1}{N} \left\{ \langle 0 | T\{\phi_{\pm}(x_1) \dots \phi_{\pm}(x_n)\} | 0 \rangle + \dots \right\}$$

$$+ \langle 0 | T \{ \underbrace{\phi_1(x_1) \dots \phi_n(x_n)}_{\mathcal{O}(\lambda)} \underbrace{\left(-i \int_{-T}^T dt H_{\text{int}}(t) \right)}_{\text{"inserções de } H_{\text{int}}"} \} | 0 \rangle + \langle 0 | T \{ \underbrace{\phi_1(x_1) \dots \phi_n(x_n)}_{\mathcal{O}(\lambda^2)} \underbrace{\left(-i \int_{-T}^T dt H_{\text{int}}(t) \right)^2}_{\text{"inserções de } H_{\text{int}}"} \} | 0 \rangle + \dots$$

Analisando o produto de quatro campos: $\langle \Omega | T \{ \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \} | \Omega \rangle$

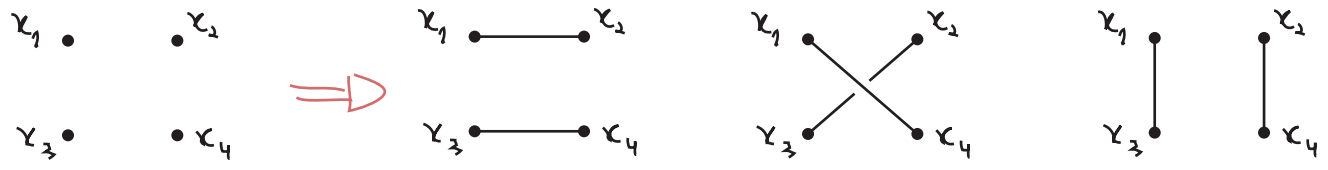
$$\phi_i = \phi_{\text{int}}(x_i)$$

temos em ordem 0 de perturbação (que de fato é a teoria livre):

$\mathcal{O}(\lambda^0)$

$$\langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \} | 0 \rangle = \underbrace{D_F(x_1 - x_2) D_F(x_3 - x_4)}_{\text{Wick}} + D_F(x_1 - x_3) D_F(x_2 - x_4) + D_F(x_1 - x_4) D_F(x_2 - x_3) + \dots$$

Este tipo de lógica combinatória imposta pelo teorema de Wick pode ser enormemente agilizada e sistematizada usando um recurso gráfico que ganhou o nome de **Diagramas de Feynman**. No caso simples acima (onde o ganho de usar grafos não é evidente, mas avançaremos rapidamente para casos mais complicados, onde o ganho é enorme), temos quatro pontos no espaço-tempo e os conectamos de todas as formas possíveis:



$$\boxed{x_1 \text{ --- } x_2} \equiv D_F(x_1 - x_2) \quad \text{Propagador} \quad (\text{eq. 15.1})$$

Lembrando também que podemos interpretar $\phi(x_1)|0\rangle$ como a criação de uma partícula em x_1 e $\langle 0|\phi(x_2)$ como a aniquilação de uma partícula em x_2 , e que o propagador de Feynman dá conta de todas as possibilidades de ordenamentos temporais, é comum "ler" o diagrama do propagador com esta imagem física em mente: a partícula foi criada em x_1 (x_2) e aniquilada em x_2 (x_1) (ela não é perfeita, no entanto, como veremos mais adiante).

Considere agora o produto de dois campos: $\langle \Omega | T \{ \phi_1 \phi_2 \} | \Omega \rangle$

o primeiro termo é trivial:

$\mathcal{O}(\lambda^0)$

$$\langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 \} | 0 \rangle = x_1 \text{ --- } x_2$$

e o segundo (primeira correção perturbativa) é dado por:

$\mathcal{O}(\lambda^1)$

$$\langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 \left(-i \int dt H_{\text{int}}(t) \right) \} | 0 \rangle$$

$$H_{\text{int}}(t) = \int d^3x \mathcal{H}_{\text{int}}(x)$$

Tomemos uma interação específica, conhecida com **Teoria $\lambda\phi^4$** : $\mathcal{H}_{\text{int}} = \frac{\lambda}{4!} \phi^4$


$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\nu \phi \partial^\nu \phi - \frac{m^2 \phi^2}{2} - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \iff \mathcal{L} = \mathcal{L}(\chi)$$


$$\int dt H_{I, \mathbb{R}} = \int dt \int d^3z \mathcal{H}_{I, \mathbb{R}}(z) = \int d^4z \frac{\lambda}{4!} \phi_{\mathbb{R}}(z) \phi_{\mathbb{R}}(z) \phi_{\mathbb{R}}(z) \phi_{\mathbb{R}}(z) \leftarrow \text{todos no mesmo ponto}$$

$$\langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 (-i \int dt H_{I, \mathbb{R}}(t)) \} | 0 \rangle = -\frac{i\lambda}{4!} \int d^4z \langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 \phi_z \phi_z \phi_z \phi_z \} | 0 \rangle$$

Temos que fazer todas as contrações possíveis destes 6 campos, e dividimos isto em dois casos:

- (1) contraímos $\phi(x_1)$ com $\phi(x_2)$ e os $\phi(z)$ só entre si.
- (2) contraímos $\phi(x_1)$ com um dos $\phi(z)$ e $\phi(x_2)$ com outro (os dois $\phi(z)$ que restam são contraídos entre si).

(1) \Rightarrow  $\Rightarrow 3 \left(-\frac{i\lambda}{4!} \right) D_F(x_1 - x_2) \int d^4z D_F(z - z) D_F(z - z)$
 as 3 formas de contrair os $\phi(z)$ dão o mesmo resultado (mas eu devo somar sobre elas)

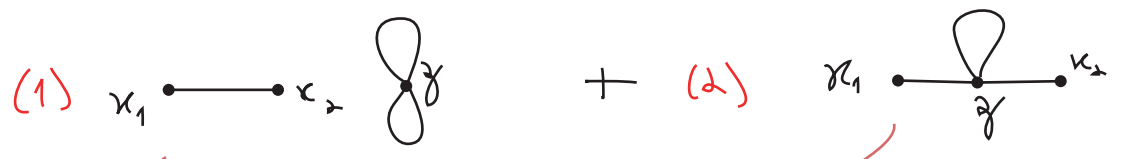
(2) \Rightarrow  \Rightarrow quatro formas de contrair $\phi(x_1)$, e uma vez feito isto, temos três formas de contrair $\phi(x_2)$ e nenhuma ambiguidade nos $\phi(z)$ que restam

$$\therefore 4 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{i\lambda}{4!} \right) \int d^4z D_F(x_1 - z) D_F(x_2 - z) D_F(z - z)$$

$$\langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 (-i \int dt H_{I, \mathbb{R}}(t)) \} | 0 \rangle = 3 \left(-\frac{i\lambda}{4!} \right) D_F(x_1 - x_2) \int d^4z D_F(z - z) D_F(z - z) + 12 \left(-\frac{i\lambda}{4!} \right) \int d^4z D_F(x_1 - z) D_F(x_2 - z) D_F(z - z) \quad (\text{eq. 16.1})$$

A versão diagramática seria:

$x_1 \cdot x_2 \cdot z \cdot z \Rightarrow$ lembrando que temos 4 campos em z logo 4 linhas devem sair/entrar ali



$\leftarrow 3 \left(-\frac{i\lambda}{4!} \right) D_F(x_1 - x_2) \int d^4z D_F(z - z) D_F(z - z)$ \leftarrow a resposta não é função de z
 $\leftarrow 12 \left(-\frac{i\lambda}{4!} \right) \int d^4z D_F(x_1 - z) D_F(x_2 - z) D_F(z - z)$
 \leftarrow como advinho estes fatores!?

Vejam os um caso mais complicado:

$\mathcal{O}(x)$

$$\langle 0 | T \left\{ \phi_x \phi_y \left[\frac{1}{3!} (-i \frac{\Delta}{4!})^3 \int d^4z \phi_z \phi_z \phi_z \phi_z \int d^4w \phi_w \phi_w \phi_w \phi_w \int d^4u \phi_u \phi_u \phi_u \phi_u \right] \right\} | 0 \rangle \quad (\text{eq. 17.1})$$

expansão da exponencial

para esta contração (x-z, y-w, z-z, z-w, w-u, w-u, u-u)

$$= \frac{1}{3!} (-i \frac{\Delta}{4!})^3 \int d^4z \int d^4w \int d^4u D_F(x-z) D_F(y-w) D_F(z-z) D_F(z-w) D_F^2(w-u) D_F(u-u) \quad (\text{eq. 17.2})$$

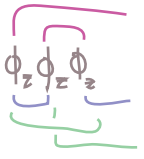
Vamos tentar identificar quantas contrações diferentes poderiam ter levado à mesma expressão 17.2.

Nome dos vértices: 3!

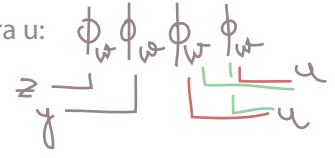
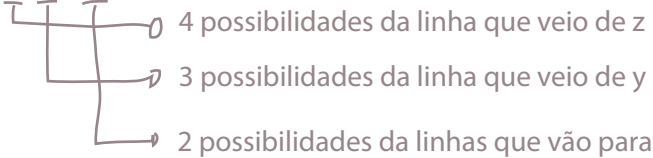
(z, w e u são variáveis mudas. Pense na expressão 17.1: eu poderia ter trocado a ordem de z, w e u sem mudar a posição dos "contratores" e há 3! ordenamentos para w, z e u - zwu, zuw, uzw, uwz, wzu)

Contrações no vértice z: 4.3

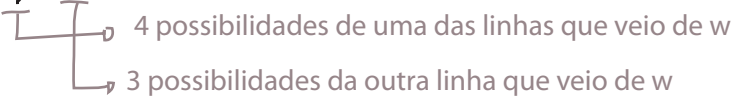
(temos 4 formas de conectar a linha que vem de x. Uma vez feito isto temos três forma de conectar os z's entre si. A linha que sobra vai para w)



Contrações no vértice w: 4.3.2

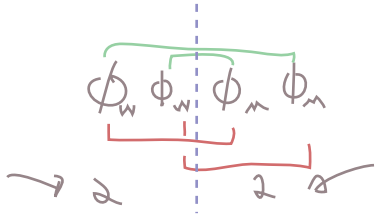


Contrações no vértice u: 4.3



(os dois campos que sobram só tem uma possibilidade)

Dupla contagem w vs. u: 1/2



dupla contagem (acontece sempre que ligo pontos internos com mais de uma linha)

$$3! (4 \cdot 3) (4 \cdot 3 \cdot 2) (4 \cdot 3) \frac{1}{2} = \frac{3! (4!)^3}{8} =$$

De forma que temos 10368 contrações diferentes que levam à mesma expressão 17.2. Note no entanto que este número quase exatamente cancela os fatoriais presentes em 17.2:

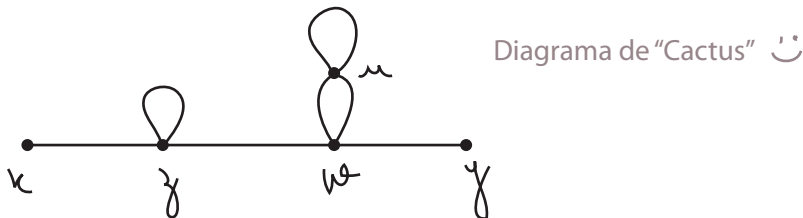
$$\left(\text{Soma sobre todas as contrações} \right) = -\frac{i\lambda}{8} \int d^4z \int d^4w \int d^4\mu D_F(x-z) D_F(y-w) D_F(z-z) D_F(z-w) D_F^2(w-\mu) D_F(\mu-\mu)$$

Este cancelamento não é tão impressionante se pensarmos a respeito:

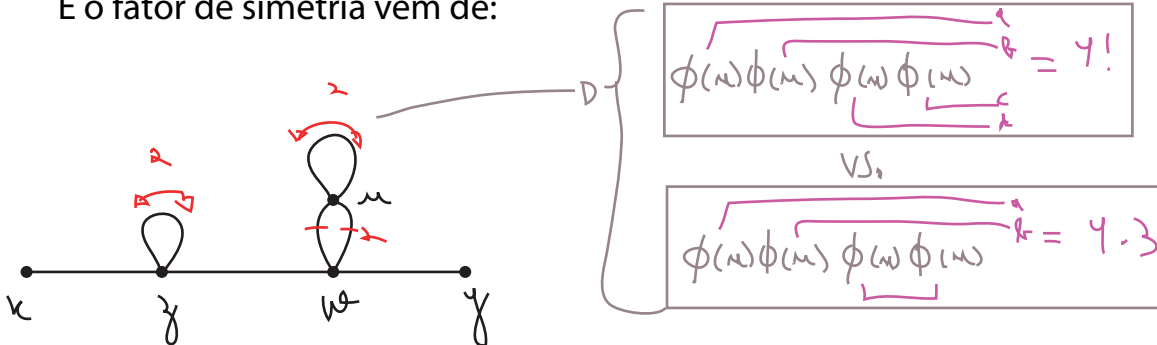
- (1) o fator 3! que vem da troca dos nomes dos pontos internos vai em geral cancelar com o 3! da série de Taylor da exponencial
- (2) cada um destes pontos internos tem 4 linhas saindo, e isso (inocentemente) nos dá um 4! para cada ponto interno, que cancela o 1/4! que está no Hamiltoniano de interação (de fato é por isso que definimos o Hamiltoniano com este 4!).

O ponto (2) acima não é totalmente verdade, **por conta das duplas contagens** e é isso que faz o cancelamento não ser exato e produz aquele "8" que sobrou no final. Isso quer dizer que simplesmente ignorando o 3! da série e os 4! do Hamiltoniano faremos uma sobrecontagem - que devemos dividir por um fator que dê conta das duplas contagens. Este fator que sobra é chamado de **Fator de Simetria** do diagrama e é nele que estamos interessados.

Como vemos este fator direto do diagrama? Baseado nos propagadores podemos desenhar:



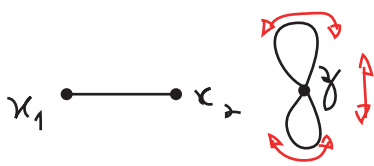
E o fator de simetria vem de:



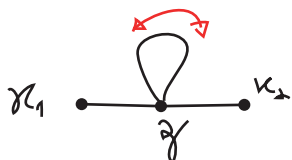
(pode ainda haver uma simetria por equivalência de dois pontos, mas esta não aparece neste diagrama)

$$S = 2 \times 2 \times 2 = 8 \quad \text{Fator de Simetria}$$

Voltando aos fatores da expressão 16.1:



$$S = 8 \Rightarrow -\frac{i\lambda}{8} D_F(x_1-x_2) \int d^4z D_F(z-z) D_F(z-z)$$



$$S = 2 \Rightarrow -\frac{i\lambda}{2} \int d^4z D_F(x_1-z) D_F(z-z) D_F(z-x_2)$$

e isto aqui? $e^{-i\int \mathcal{H}} = \frac{-i\lambda}{4!} \int \phi^4$
para cada ponto interno terei um fator deste

O fator que resta vem de estabelecer uma regra para o **vértice** da teoria:

$$\text{Vértice} \quad \left(\text{eq. 19.1} \right)$$

(note que o vértice é este ponto de onde saem 4 linhas, as linhas em si tem regras próprias dadas por 15.1)

E como este vértice é um ponto "interno" do diagrama, ele também contribui com uma integral em z . Para cada vértice no diagrama vai entrar um fator $(-i\lambda)$ e farei uma integral. Com isso, temos um conjunto de regras **para esta teoria** (campo escalar real com interação ϕ^4) que nos permite transformar um diagrama em uma expressão analítica:

- (1) para cada propagador: $x_1 \text{---} x_2 = D_F(x_1 - x_2)$
- (2) para cada vértice: $\text{Vértice} = (-i\lambda) \int d^4z$
- (3) para cada ponto externo: $x_1 \text{---} = 1$ (isto é trivial aqui, mas não será assim na versão final das regras)
- (4) divida tudo pelo fator de simetria

Regras de Feynman (para func. de Green) de $\lambda\phi^4$ no espaço das posições (eq. 19.2)

Mais alguns exemplos:

$$\text{Diagrama} = \frac{(-i\lambda)^2}{3!} \int d^4z_1 \int d^4z_2 D_F(x_1 - z_1) D_F(x_2 - z_2) D_F^3(z_1 - z_2)$$

↳ 3! trocas de linhas

$$\text{Diagrama} = \frac{(-i\lambda)^3}{3! \cdot 2} \int d^4z_1 d^4z_2 d^4z_3 D_F(x_1 - z_1) D_F(x_2 - z_1) D_F(z_1 - z_2) D_F(z_1 - z_3) D_F^3(z_2 - z_3)$$

$S = 3! \cdot 2$

Notando finalmente que para calcular uma dada função de n pontos, temos que somar sobre todos os diagramas possíveis até um certa ordem perturbativa:

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 - i\epsilon)} \frac{1}{N} \left\{ \underbrace{\text{Diagrama 1}}_{\mathcal{O}(\lambda^0)} + \underbrace{\text{Diagrama 2} + \text{Diagrama 3}}_{\mathcal{O}(\lambda)} + \underbrace{\text{Diagrama 4} + \text{Diagrama 5} + \text{Diagrama 6} + \dots}_{\mathcal{O}(\lambda^2)} \right\}$$

Em geral estamos interessados em calcular estes elementos no espaço dos momentos, não da posição, então é bem útil escrever as regras de Feynman também para os momentos. Note que:

TQC I - 2017 eq. 67.1 $\Rightarrow D_F(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \underbrace{\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}}_{D_F(p)} e^{-ip(x-y)}$

note que podia ser $(y-x)$ pois o sinal de p é arbitrário, a escolha é feita por consistência com as linhas externas. Da forma que está escrito o momento vai de y para x (veja no fim da pg 21)

e:

$$\langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \} | 0 \rangle = \theta(z_3 > z_1 > z_2) \langle 0 | \phi_3 \phi_4 \phi_1 \phi_2 | 0 \rangle + \dots$$

outros ordenamentos temp.

$$\int \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{p_3}}} a_{p_3}^\dagger e^{ip_3 z_3}$$

(eq. 12.2)

De forma que cada elemento no espaço das posições contém uma infinidade de possibilidades no espaço dos momentos

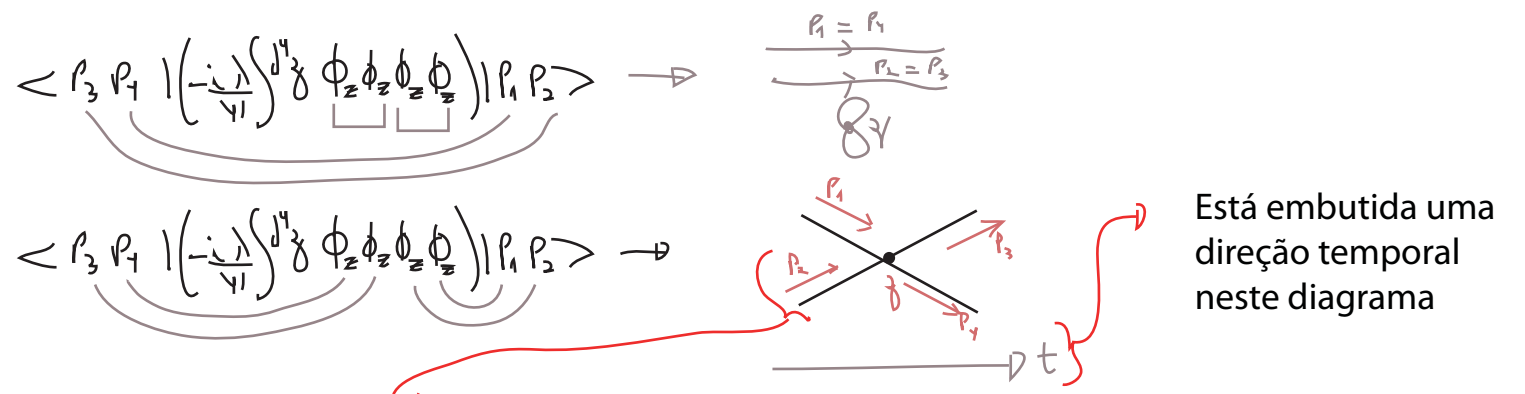
$$\langle 0 | \phi_3 \phi_4 \phi_1 \phi_2 | 0 \rangle \sim \int d^4 p_1 \int d^4 p_2 \int d^4 p_3 \int d^4 p_4 \langle p_3 p_4 | p_1 p_2 \rangle$$

queremos regras para estes (com escolha específica de $p_1 \dots p_4$)

No caso de uma inserção da interação temos:

$$\langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \left(\frac{-i\lambda}{4!} \int d^4 z \phi_z \phi_z \phi_z \phi_z \right) \} | 0 \rangle \sim \dots + \int \langle p_3 p_4 | \left(\frac{-i\lambda}{4!} \int d^4 z \phi_z \phi_z \phi_z \phi_z \right) | p_1 p_2 \rangle$$

de novo há várias possibilidades do que pode ocorrer:



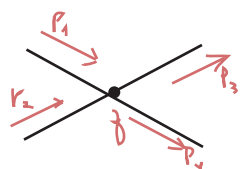
Note que esta linha vem até z de um ponto indeterminado, porque passamos da representação em x_2 para uma em p_2 . Chamamos isto de **linha externa**.

$\phi^+ \phi^+ \phi^+ \phi^- = 0$
assim todos com número diferentes de criações e aniquilações

Suponha que estejamos interessados em:

Então: $\langle p_3 p_4 | (\phi_z^+ + \phi_z^-) (\phi_z^+ + \phi_z^-) (\phi_z^+ + \phi_z^-) (\phi_z^+ + \phi_z^-) | p_1 p_2 \rangle$

4! formas de fazer isto



$$\begin{aligned} \phi_z^+ |P_1\rangle &= \int \frac{d^3 P_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{P_2}}} \underbrace{a_{P_2} e^{-iP_2 z}}_{\text{comut.}} \sqrt{2E_{P_1}} a_{P_1}^+ |0\rangle = \\ &= \int \frac{d^3 P_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{P_2}}} e^{-iP_2 z} \sqrt{2E_{P_1}} (2\pi)^3 \delta(P_2 - P_1) |0\rangle = e^{-iP_1 z} |0\rangle \end{aligned} \quad (\text{eq. 21.1})$$

Da mesma forma:

$$\langle P_3 | \phi_z = \langle 0 | e^{iP_3 z} \quad (\text{eq. 21.2})$$

O que nos mostra que cada linha externa contribuirá com:



Ainda resta a integral em z:

$$= \frac{(-i\lambda)}{4!} \int d^4 z e^{-iP_1 z} e^{-iP_2 z} e^{iP_3 z} e^{iP_4 z} =$$

4! formas de fazer isto

$$= (-i\lambda) (2\pi)^4 \delta^4(P_1 + P_2 - P_3 - P_4)$$

contribuição do vértice (a integração na posição do vértice garantiu conservação de momento no mesmo)

No caso de um diagrama mais complicado:

$$= \langle P_3 P_4 | \underbrace{\left(\frac{-i\lambda}{4!} \int d^4 z_1 \phi_{z_1} \phi_{z_2} \phi_{z_3} \phi_{z_4} \right)}_{4.3} \underbrace{\left(\frac{-i\lambda}{4!} \int d^4 z_1 \phi_{z_1} \phi_{z_2} \phi_{z_3} \phi_{z_4} \right)}_2 | P_1 P_2 \rangle =$$

escolho o sinal de k para manter a direção de momento igual a das linhas externas: $Exp[-ik_1 z_2]$ para momento entrando em z_2 e $Exp[ik_1 z_1]$ para momento saindo de z_1 .

$$= \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int d^4 z_1 d^4 z_2 \int \frac{d^4 k_1 d^4 k_2}{(2\pi)^8} D_F(k_1) D_F(k_2) e^{-i k_1^0 (\delta_1 - \delta_2)} e^{-i k_2^0 (\delta_2 - \delta_1)} e^{-i P_1 z_1} e^{-i P_2 z_1} e^{i P_3 z_2} e^{i P_4 z_2}$$

fator de simetria propagadores linhas externas

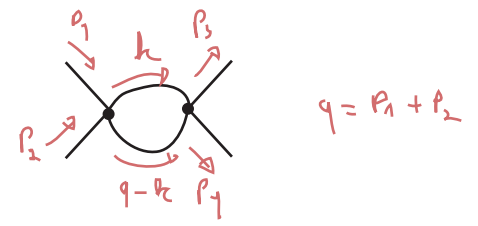
$$= \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \underbrace{d^4 k_1}_{k_1 = k} d^4 k_2 \underbrace{\delta^4(-P_1 - P_2 + k_1 + k_2)}_{P_1 + P_2 = q} \delta^4(-k_1 - k_2 + P_3 + P_4) D_F(k_1) D_F(k_2)$$

$\delta^4(+k_2 - (q - k))$

$$= \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int d^4k \delta^4(-k - (q-k) + p_3 + p_4) D_F(k) D_F(q-k) =$$

$$= \frac{(-i\lambda)^2 (2\pi)^4}{2} \delta^4(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D_F(k) D_F(p_1 + p_2 - k)$$

estou escrevendo assim pois logo vamos querer identificar \mathcal{M}



Podemos então escrever as regras para obter diretamente a expressão no espaço dos momentos (que não é da função de Green $G_n(x_1, \dots, x_n)$, nem de sua transformada de Fourier $\tilde{G}_n(p_1, \dots, p_n)$ mas sim para elementos do tipo $\langle p_1, p_2, \dots | p_3, p_4, \dots \rangle$)

- (1) para cada propagador de momento p: = $D_F(p) = \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$
- (2) para cada vértice: = $-i\lambda$
- (3) para linha externa: = 1
- (4) imponha conservação de momento em cada vértice (re-escrevendo os momentos internos)
- (5) integre sobre cada momento não determinado: $\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$
- (6) divida pelo fator de simetria
- (7) multiplique por: $(2\pi)^4 \delta^4(\sum p_\alpha)$ momentos externos

Regras de Feynman para $\langle p_1, p_2, \dots | p_3, p_4, \dots \rangle$ de $\lambda\phi^4$ no espaço dos momentos (eq. 22.1)

Mais alguns exemplos:

$$\text{Self-energy diagram} = (2\pi)^4 \delta(p_1 - p_2) \frac{(-i\lambda)}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D_F(k)$$

$$\text{Vertex correction diagram} \Rightarrow \text{renormalized vertex} = (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D_F(k) D_F(q-k)$$

$q = p_1 - p_3$

Conservação nos vértices: $\left. \begin{aligned} p_1 &= p_3 + k_2 + k \\ p_2 + k_2 + k_1 &= p_4 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} p_1 - p_3 &= q = p_1 - p_3 = k_2 + k \\ k_2 &= q - k \end{aligned}$

Vamos deixar um pouco mais clara a diferença entre as regras do quadro 22.1 e as regras para

$$\tilde{G}_n(p_i, k_j) = \left(\prod_{i=1}^n \int d^4x_i e^{i p_i x_i} \right) \left(\prod_{j=1}^m \int d^4y_j e^{-i k_j y_j} \right) G(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_m)$$

↙ partículas iniciais
↘ partículas finais

Considere o exemplo:

$$G(x_1, x_2) = \text{diagram} = \frac{\lambda^2}{3!} \int d^4z_1 d^4z_2 D_F(z_1 - x_1) D_F(x_2 - z_2) D_F^3(z_2 - z_1)$$

Tomemos a sua transformada de Fourier:

$$\begin{aligned} \tilde{G}(p_1, p_2) &= \int d^4x_1 d^4x_2 e^{-i p_1 x_1} e^{i p_2 x_2} \frac{\lambda^2}{3!} \int d^4z_1 d^4z_2 D_F(z_1 - x_1) D_F(x_2 - z_2) D_F^3(z_2 - z_1) = \\ &= \int d^4x_1 d^4x_2 e^{-i p_1 x_1} e^{i p_2 x_2} \frac{\lambda^2}{3!} \int d^4z_1 d^4z_2 \int \frac{d^4p_3}{(2\pi)^4} e^{-i p_3(z_1 - x_1)} D_F(p_3) \int \frac{d^4p_4}{(2\pi)^4} e^{-i p_4(x_2 - z_2)} D_F(p_4) \times \\ &\quad \times \int \frac{d^4p_5}{(2\pi)^4} e^{-i p_5(z_2 - z_1)} D_F(p_5) \int \frac{d^4p_6}{(2\pi)^4} e^{-i p_6(z_2 - z_1)} D_F(p_6) \int \frac{d^4p_7}{(2\pi)^4} e^{-i p_7(z_2 - z_1)} D_F(p_7) = \\ &\stackrel{\int d^4x_1 \rightarrow \delta^4(-p_1 + p_3)}{\int d^4x_2 \rightarrow \delta^4(p_2 - p_4)}{=} \frac{\lambda^2}{3!} \int d^4z_1 d^4z_2 e^{-i p_1 z_1} D_F(p_1) e^{i p_2 z_2} D_F(p_2) \int \int \int (\dots) = \\ &\stackrel{\int d^4z_1 \rightarrow \delta^4(-p_1 + p_3 + p_6 + p_7)}{=} \frac{\lambda^2}{3!} \int d^4z_2 D_F(p_1) D_F(p_2) e^{i p_2 z_2} e^{-i(p_1 - p_6 - p_7) z_2} \int \int D_F(p_1 - p_6 - p_7) (\dots) = \\ &\stackrel{\int d^4z_2 \rightarrow \delta^4(p_2 - p_1 + p_6 + p_7 - p_6 - p_7) = \delta^4(p_2 - p_1)}{=} \frac{\lambda^2}{3!} D_F(p_1) D_F(p_2) (2\pi)^4 \delta^4(p_2 - p_1) \int \frac{d^4p_6}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_7}{(2\pi)^4} D_F(p_1 - p_6 - p_7) D_F(p_6) D_F(p_7) \end{aligned}$$

Estes dois "propagadores externos" não pareceram nas regras de Feynman deduzidas anteriormente pois tratamos os estados iniciais e finais com mais detalhe (ainda que de forma heurística), como ondas planas. O jeito formal de obtê-las seria usando a fórmula de LSZ (que veremos mais a frente, os curiosos podem olhar as notas de TQC I -2017, eq 74.3).

Com isso temos um conjunto de regras completo, mas cabem alguns comentários para amarrar as pontas soltas. Primeiramente note que, na eq. 22.1, estamos dizendo que todos estes correlatores serão calculados para: $T \rightarrow \infty (1 - i\epsilon)$

(eq. 12.1) $\rightarrow \lim_{T \rightarrow \infty (1 - i\epsilon)} \frac{1}{N} \langle 0 | T \left\{ U_T(x_1) \dots U_T(x_n) \text{Exp} \left[-i \int_{-T}^T dt H_{\text{II}}(t) \right] \right\} | 0 \rangle$

\rightarrow Isto significa que todas as integrais dos vértices não

vão ser simples integrais em d^4z , mas sim:

$$\lim_{T \rightarrow \infty (1 - i\epsilon)} \int_{-T}^T d^4z e^{i(p_1 + \dots + p_n)z} \propto \lim_{T \rightarrow \infty} \left[e^{i(p_1 + \dots + p_n)^0 (T - \lambda\epsilon T)} - e^{i(p_1 + \dots + p_n)^0 (-T + \lambda\epsilon T)} \right]$$

$$\propto \lim_{T \rightarrow \infty} \left(e^{+\epsilon (p_1 + \dots + p_n)^0 T} - e^{-\epsilon (p_1 + \dots + p_n)^0 T} \right)$$

Uma destas exponenciais explode (qual delas depende do sinal de q^0)

Para resolver isto podemos impor que q^0 tenha uma parte imaginária (também pequena e proporcional a ϵ) porque então:

$q^0 \rightarrow q^0(1 + i\epsilon) = \lim_{T \rightarrow \infty} e^{i q^0 (\pm T \mp \lambda\epsilon T)} \rightarrow \lim_{T \rightarrow \infty} \text{Exp} \left[\pm i q^0 T (1 + \epsilon^2) \right]$

$i q^0 T (1 + i\epsilon)(\pm 1 \mp \lambda\epsilon) = i q^0 T (\pm 1 \mp \lambda\epsilon \mp \lambda\epsilon \pm \epsilon^2)$
 note que inverter este sinal estragaria tudo

oscilatória

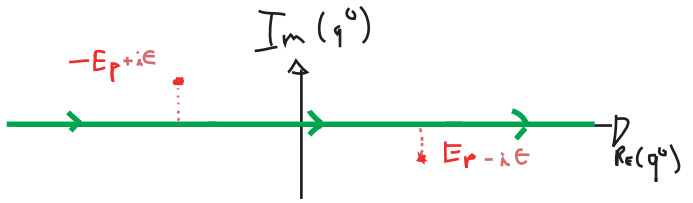
De fato isto é totalmente consistente com o que já vínhamos fazendo, pense de onde vêm estas exponenciais dentro das integrais dos vértices:

(1) De linha externas (veja eqs. 21.1 e 21.2): neste caso não há restrição alguma sobre os momentos e podemos tomá-los imaginários e, depois de integrar, tomar o limite $\epsilon \rightarrow 0$

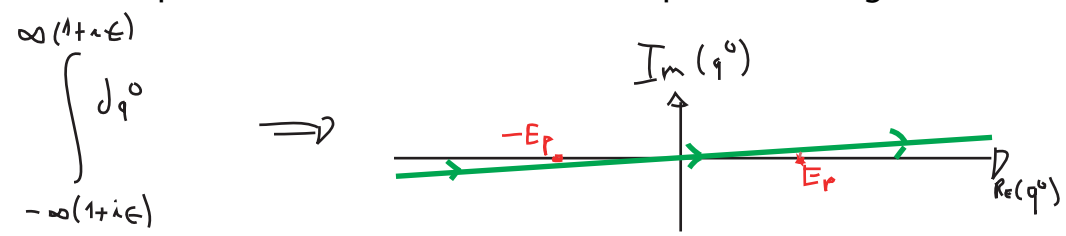
(2) Dos propagadores de Feynman (veja, por exemplo, o expressão do diagrama na segunda metade da pg 21). Neste caso devemos lembrar que o propagador no espaço dos momentos é:

$$D_F(q) = \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon}$$

e que q^0 está sendo integrado no caminho (tqc I 2017 - pg 67):



acontece que isto é exatamente o mesmo que fazer o seguinte caminho:

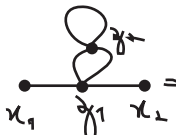


o que dá para q^0 exatamente a parte imaginária de que precisávamos. Isto mostra que o aparecimen-

to dos propagadores de Feynman no teorema de Wick não é uma coincidência, mas está intrinsecamente ligado ao limite que tomamos no tempo para poder projetar o vácuo livre da teoria no vácuo da teoria completa na página 9. Aqui podemos finalmente entender porque escolhemos, na definição do propagador de Feynman, os polos E_p e $-E_p$ respectivamente abaixo e acima do eixo real, a escolha contrária geraria divergências aqui.

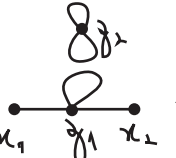
Ignoramos outros dois pontos importantes, um deles está relacionado a “bolhas no vácuo”. Considere os dois dos diagramas de ordem λ^2 para a função de dois pontos no fim da página 19:

(A)



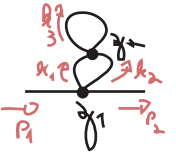
$$= \frac{(-i\lambda)^2}{4} \int d^4z_1 d^4z_2 \mathcal{D}_F(x_1 - z_1) \mathcal{D}_F(z_1 - x_2) \mathcal{D}_F^2(z_1 - z_2) \mathcal{D}_F(z_2 - z_1)$$

(B)




$$= \frac{(-i\lambda)^2}{16} \int d^4z_1 d^4z_2 \mathcal{D}_F(x_1 - z_1) \mathcal{D}_F(z_1 - x_2) \mathcal{D}_F(z_1 - z_2) \mathcal{D}_F(z_2 - z_1)$$

(A)



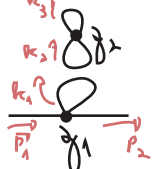
$$= \frac{(-i\lambda)^2}{4} \int d^4z_1 d^4z_2 e^{-i p_1 z_1} e^{i p_2 z_2} \int \frac{d^4k_1 d^4k_2 d^4k_3}{(2\pi)^{12}} \mathcal{D}_F(k_1) \mathcal{D}_F(k_2) \mathcal{D}_F(k_3) e^{i k_1(z_1 - z_2)} e^{i k_2(z_1 - z_2)} =$$

$$= \frac{(-i\lambda)^2}{4} \int \frac{d^4k_1 d^4k_2 d^4k_3}{(2\pi)^4} \delta^4(-p_1 + p_2 + k_1 + k_2) \delta^4(k_1 + k_2) \mathcal{D}_F(k_1) \mathcal{D}_F(k_2) \mathcal{D}_F(k_3) =$$



$$= \frac{(-i\lambda)^2}{4} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \mathcal{D}_F(k) \mathcal{D}_F(-k) \int \frac{d^4k_3}{(2\pi)^4} \mathcal{D}_F(k_3)$$

(B)



$$= \frac{(-i\lambda)^2}{16} \int d^4z_1 d^4z_2 e^{-i p_1 z_1} e^{i p_2 z_2} \int \frac{d^4k_1 d^4k_2 d^4k_3}{(2\pi)^{12}} \mathcal{D}_F(k_1) \mathcal{D}_F(k_2) \mathcal{D}_F(k_3) e^{i k_1 \cdot 0} e^{i k_2 \cdot 0} e^{i k_3 \cdot 0} =$$

$$= \frac{(-i\lambda)^2}{16} \int \frac{d^4k_1 d^4k_2 d^4k_3}{(2\pi)^8} \delta^4(-p_1 + p_2) \mathcal{D}_F(k_1) \mathcal{D}_F(k_2) \mathcal{D}_F(k_3) \underbrace{\int d^4z_2}_{(2T) \cdot V = \infty}$$

$(2\pi)^4 \delta(0)$

Isto sempre vai acontecer com diagramas desconectados de linhas externas (as tais bolhas no vácuo):

$$\sim \int d^4k_1 d^4k_2 d^4k_3 d^4k_4 \delta^4(k_2+k_3) \delta^4(k_2+k_3) \mathcal{D}_F(k_1) \mathcal{D}_F(k_2) \mathcal{D}_F(k_3) \mathcal{D}_F(k_4)$$

$$\int d^4k_3 \delta^4(0) \mathcal{D}_F(k_2) \mathcal{D}_F(-k_2)$$

O outro detalhe que ignoramos foi o denominador de 12.1:

$$\langle 0 | T \left\{ \text{Exp} \left[-i \int_T dt H_{\text{int}}(t) \right] \right\} | 0 \rangle$$

Que de fato só contém bolhas (note que ele não depende de nenhum dos pontos externos, que vão todos no numerador). Para ver como os dois problemas se resolvem, basta notar que podemos separar as bolhas da parte **conectada a linhas externas** do diagrama:

$$\left(\text{tadpole with bubble} \right) = \left(\text{line with bubble} \right) \left(\text{bubble} \right)$$

$$\frac{(-i\lambda)^2}{16} \int \frac{d^4k_1 d^4k_2 d^4k_3}{(2\pi)^8} \delta^4(-p_1+p_2) \mathcal{D}_F(k_1) \mathcal{D}_F(k_2) \mathcal{D}_F(k_3) (2\pi)^4 \delta(0) =$$

$$= \left[\frac{(-i\lambda)}{2} (2\pi)^4 \delta^4(p_1-p_2) \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \mathcal{D}_F(k_1) \right] \left[\frac{(-i\lambda)}{8} (2\pi)^4 \delta(0) \int \frac{d^4k_2 d^4k_3}{(2\pi)^8} \mathcal{D}_F(k_2) \mathcal{D}_F(k_3) \right]$$

O numerador vai conter justamente diagramas conectados as pernas externas multiplicados por uma soma de todas as bolhas possíveis. Por exemplo, no caso de dois pontos:

$$\langle 0 | T \left\{ \phi_1 \phi_2 \text{Exp} \left[-i \int_T dt H_{\text{int}}(t) \right] \right\} | 0 \rangle = \left(x_1 \text{---} x_2 \right) \left(1 + \underbrace{\text{bubble}}_{\mathcal{O}(\lambda^2)} + \underbrace{\text{tadpole}}_{\mathcal{O}(\lambda)} + \underbrace{\text{tadpole with bubble}}_{\mathcal{O}(\lambda^3)} + \text{tadpole with 2 bubbles} + \text{tadpole with 3 bubbles} + \dots \right) +$$

$$+ \left(x_1 \text{---} \text{bubble} \text{---} x_2 \right) \left(1 + \underbrace{\text{bubble}}_{\mathcal{O}(\lambda^2)} + \underbrace{\text{tadpole}}_{\mathcal{O}(\lambda)} + \underbrace{\text{tadpole with bubble}}_{\mathcal{O}(\lambda^3)} + \text{tadpole with 2 bubbles} + \text{tadpole with 3 bubbles} + \dots \right) + \dots$$

$$\left(\underbrace{\text{bubble}}_{V_1} + \underbrace{\text{tadpole}}_{V_2} + \underbrace{\text{tadpole with bubble}}_{\frac{1}{2!} (V_1)^2} + \underbrace{\text{tadpole with 2 bubbles}}_{V_3} + \frac{1}{3!} V_1^3 + V_1 V_2 + V_1 V_3 + \frac{V_1^4}{4!} + \frac{V_2^2}{2!} + \frac{V_1^2 V_2}{2!} + \dots \right)$$

$\frac{1}{2!} \rightarrow$ fator de simetria

Qualquer diagrama específico nesta longa soma vai ser portanto da forma:

$$\left(\text{diagrama conectado} \right) \cdot \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n_i!} (V_i)^{n_i} \dots \left(\text{diagrama} \right) \rightarrow \begin{matrix} n_1=2 \\ n_2=0 \\ n_3=1 \end{matrix} \rightarrow \{n_i\} = \{2, 0, 1, 0, 0, \dots\}$$

$$\begin{aligned} \therefore \langle 0|T\{\phi_1 \phi_2 \text{Exp}[-i \int_{-T}^T dt H_{\text{I}}(t)]\}|0\rangle &= \sum_{\text{conectados}} \left\{ \sum_{\{n_i\}} (\text{diagrama conectado}) \prod_i \frac{1}{n_i!} (V_i)^{n_i} \right\} = \\ &\quad \text{incluindo } \{0,0,0, \dots\} \\ &= \sum_{\text{conectados}} (\text{diagrama conectado}) \cdot \sum_{\{n_i\}} \left(\prod_i \frac{1}{n_i!} (V_i)^{n_i} \right) = \\ &\quad \left(1 + V_1 + V_2 + V_3 + \frac{1}{2!} V_1^2 + V_3 + \frac{1}{3!} V_1^3 + V_1 V_2 + V_1 V_3 + \frac{V_1^2 V_2}{2!} + \dots = \left(1 + V_1 + \frac{V_1^2}{2!} + \dots \right) \left(1 + V_2 + \frac{V_2^2}{2!} + \dots \right) \dots \right) \\ &= \sum_{\text{conectados}} (\text{diagrama conectado}) \cdot \left(\sum_{n_1} \frac{1}{n_1!} (V_1)^{n_1} \right) \left(\sum_{n_2} \frac{1}{n_2!} (V_2)^{n_2} \right) \left(\sum_{n_3} \frac{1}{n_3!} (V_3)^{n_3} \right) \dots = \\ &= \sum_{\text{conectados}} (\text{diagrama conectado}) \prod_{i=1} \left(\sum_{n_i} \frac{1}{n_i!} (V_i)^{n_i} \right) = \sum_{\text{conectados}} (\text{diagrama conectado}) \prod_{i=1} e^{V_i} \end{aligned}$$

$$\langle 0|T\{\phi_1 \phi_2 \text{Exp}[-i \int_{-T}^T dt H_{\text{I}}(t)]\}|0\rangle = \sum_{\text{conectados}} (\text{diagrama conectado}) e^{\sum_i V_i} \quad (\text{eq. 27.1})$$

$$\langle 0|T\{\phi_1 \phi_2 \text{Exp}[-i \int_{-T}^T dt H_{\text{I}}(t)]\}|0\rangle = \left(x_1 \text{---} x_2 + x_1 \text{---} \bigcirc \text{---} x_2 + x_1 \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} x_2 + \dots \right) \times \text{Exp} \left[\bigcirc + \bigcirc + \bigcirc + \dots \right]$$

Claramente o mesmo vale para funções de mais pontos (aumentar o número de pontos externos só torna os diagramas conectados mais complicados, a soma das bolhas fica a mesma.

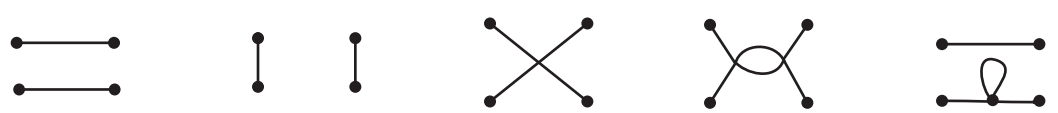
No caso do denominador, a lógica é a mesma, só que não há diagramas desconectados:

$$\langle 0|T\{\text{Exp}[-i \int_{-T}^T dt H_{\text{I}}(t)]\}|0\rangle = \underbrace{\langle 0|0\rangle}_1 \text{Exp} \left[\bigcirc + \bigcirc + \bigcirc + \dots \right]$$

Logo a exponencial das bolhas é cancelada entre numerador e denominador, fazendo:

$$\langle \Omega|T\{\phi_H(x_1) \dots \phi_H(x_n)\}|\Omega\rangle = \sum_{\substack{\text{diagrama} \\ \text{conectado} \\ \text{a linhas externas}}} (\text{diagrama conectado}) \quad (\text{eq. 27.2})$$

Uma observação final sobre notação, aqui usamos "diagramas conectados" para denominar diagramas que estejam ligados aos pontos externos, e.g.:



Usaremos, com muito mais frequência, uma outra definição para “conectado” - querendo dizer que o diagrama conecta todos os pontos externos entre si. Nesta nova definição, os diagramas acima ficam divididos entre:

Conectados:



Desconectados:



Ambos conjuntos entram na soma da eq. 27.2, somente as bolhas do vácuo foram realmente canceladas pelo denominador.

Com estes resultados em mãos já conseguimos calcular quaisquer correlatores na teoria $\lambda\phi^4$.

Seções de Choque e Matriz S

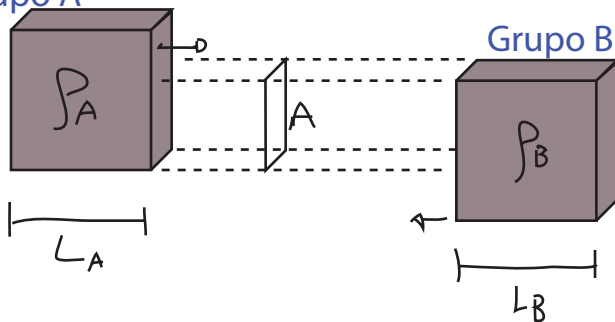
(Peskin 4.5)

Chegamos em fim ao ponto em que formalizaremos a conexão entre as funções de n-pontos das teorias de campos com espalhamentos envolvendo estados assintóticos com n partículas. Começamos com a idéia por trás do que esperamos observar em experimentos envolvendo partículas ou quasi-partículas:

Seção de Choque

A situação que temos em mente é um espalhamento entre dois “amontoados” de partículas (ou quasi-partículas, enfim, excitações do campo), quer seja um projétil atirado em um alvo ou a colisão de dois objetos (o que é o mesmo, dependendo de referencial). Cada um destes grupos tem um número grande de partículas e dimensões finitas:

Grupo A

 $\rho_A, \rho_B \rightarrow$ densidade numéricas $A \rightarrow$ área de impacto $L_A, L_B \rightarrow$ comprimento ao longo da direção do impacto

Assumindo que ambos os grupos são rarefeitos e que as interações internas são desprezíveis, é razoável dizer que o número total de colisões (eventos) é proporcional a todas as grandezas definidas acima:

$$\# \text{EVENTOS} \propto \rho_A L_A \rho_B L_B A$$

A esta “constante” de proporcionalidade damos o nome de **seção de choque**:

$$\sigma \equiv \frac{\# \text{EVENTOS}}{\rho_A L_A \rho_B L_B A} \quad (\text{eq. 29.1})$$

Que tem dimensão de área: $[\sigma] = \frac{1}{L^{-3} L L^{-3} L L^2} = L^2$

E pode ser interpretada como o “tamanho de interação” da partícula, ou seja, a área em torno do “alvo” na qual um “projétil” seria espalhado (note, no entanto, que isto depende também do projétil). Outra forma de ver como devemos definir a seção de choque é pensando em um modelo clássico, o espalhamento por um potencial $V(r) = \frac{Ze^2}{r}$

Neste caso temos apenas um alvo, pontual, produzindo o potencial. Se temos um feixe de partículas sendo lançado neste alvo o número de espalhamentos por unidade de tempo é proporcional ao fluxo:

$$\text{Fluxo} \leftarrow \phi_0 = \frac{\Delta N_{\text{in}}}{A \cdot \Delta t} \quad \begin{array}{l} \rightarrow \# \text{ partículas incidentes} \\ \rightarrow \text{unidade. de tempo} \\ \rightarrow \text{unidade. de área} \end{array} \quad \Delta N_{\text{EV}} \leftrightarrow \# \text{ partículas espalhadas (eventos)}$$

$$\frac{\Delta N_{EV}}{\Delta t} \propto \phi_0$$

E a proporcionalidade entre os dois vai ser, de novo, a seção de choque:

$$\sigma = \frac{\Delta N_{EV} / \Delta t}{\phi_0} = \frac{\Delta N_{EV}}{\underbrace{\Delta N_{IN} / A}_{n_B \text{ densidade por área}}} = \frac{\Delta N_{EV}}{n_B} \quad (\text{eq. 30.1})$$

(unidades de área, consistentemente)

Também podemos escrever:

$$\phi_0 = \frac{\Delta N_{IN}}{A \cdot \Delta t} = \frac{\rho_B (\underbrace{v \Delta t}_{\text{velocidade relativa}}) A}{A \cdot \Delta t} = \rho_B \cdot v$$

volume incidente em um tempo Δt

Podemos então considerar o caso de N alvos independentes onde $N = \int_A L_A A$ então a seção de choque **por alvo** (e essa é a definição de seção de choque) é:

$$\sigma = \frac{\Delta N_{EV} / \Delta t}{\phi_0 N} = \frac{\Delta N_{EV}}{\underbrace{\rho_B (v \Delta t)}_{L_B} \rho_A L_A A} = \frac{\Delta N_{EV}}{\rho_B L_B \rho_A L_A A} \quad \text{como vimos antes}$$

A seção do choque definida acima é chamada de **Seção de Choque Total**, pois mede a intensidade do espalhamento sem colocar condições sobre a energia das partículas espalhadas nem o seu momento (o que inclui a direção em que foram espalhadas). Tipicamente tanto a energia quanto o momento (ou no mínimo a direção) são medidos em experimentos e muita informação física pode ser tirada daí sobre a interação que está gerando os espalhamentos. Para um dado modelo estamos interessados em saber por exemplo, qual é a taxa de espalhamentos em uma certa direção, ou para estados finais com energia e momento acima de um certo valor. A grandeza que nos permite obter estas distribuições é a **Seção de Choque Diferencial**:

$$\frac{d\sigma}{d^3p_1 \dots d^3p_n}$$

↪ momentos dos estados finais

O exemplo mais útil é o espalhamento $2 \rightarrow 2$ (duas partículas iniciais e duas finais, elástico ou inelástico). Nesse caso temos dois estados finais, logo dois **tri-momentos**¹. Tenho quatro deltas de Dirac (da conservação total de momento e energia), o que me deixa com duas variáveis independentes, que posso escolher como sendo dois ângulos θ (de 0 a π em relação ao momento inicial / direção do feixe) e ϕ (azimutal, vai de 0 a 2π em torno do momento inicial). Estes dois ângulo definem um ângulo sólido Ω , e é comum definir:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}$$

¹Está embutida a suposição (razoável) de que os estados finais estão "on-shell" (vale a relação relativística entre momento e energia), de forma que a energia não é livre uma vez que conhecemos o momento. Ainda precisamos provar que os estados assintóticos na teoria interagente têm essa propriedade.

Taxa de Decaimento

Outro exemplo de interesse é o de processos $1 \rightarrow n$, onde começamos com uma partícula

instável que decai em um número maior de outras partículas. Dada uma amostra de partículas deste tipo, o número de decaimentos por unidade de tempo vai ser proporcional ao número de partículas na amostra: (mais uma vez assumindo que a amostra seja rarefeita ou com pouca interação, para evitar reações em cadeia)

$$\frac{\# \text{DECAIMENTOS}}{\Delta t} \propto \# \text{PARTICULAS}$$

Definimos então:

$$\Gamma \equiv \frac{\# \text{DECAIMENTOS}}{\Delta t \# \text{PARTICULAS}} = \frac{dN}{N dt}$$

Taxa (ou Largura) de Decaimento
 (eq. 31.1)

Uma mesma partícula pode ter vários decaimentos possíveis, como larguras diferentes em cada um destes canais. A vida média da partícula, neste caso, é dada por:

$$\tau = \frac{1}{\sum_i \Gamma_i}$$

 (eq. 31.2)
↪ soma sobre os canais

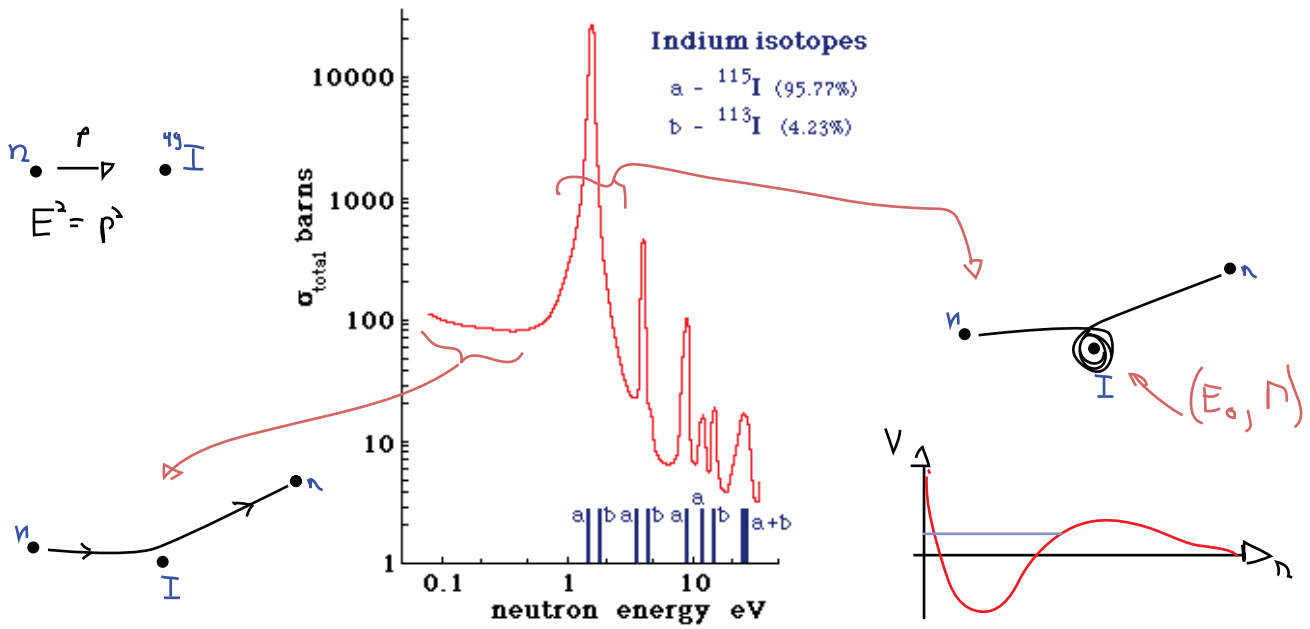
Sabemos que estados atômicos ou nucleares instáveis (ressonâncias) aparecem, segundo a MQ não relativística, como distribuições de Breit-Wigner no espalhamento, cuja amplitude é:

$$f(E) \propto \frac{1}{E - E_0 + i\Gamma/2}$$

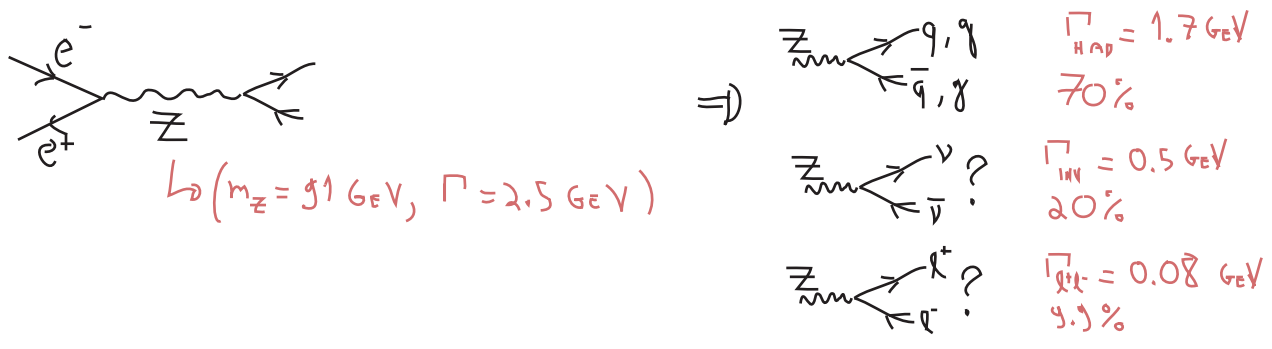
e (densidade de) probabilidade:

$$\sigma \propto \frac{1}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}$$
 Distribuição de Breit-Wigner
 (eq. 31.3)

energia do espalhamento no centro de massa Pico da distribuição Largura



Em espalhamentos relativísticos o mesmo ocorre, as partículas iniciais podem se combinar para formar estados instáveis, que então decaem em outros, por exemplo:



Na amplitude de espalhamento isso vai aparecer como uma generalização relativística da distribuição de Breit-Wigner, lembrando que uma partícula em movimento relativístico vai ter uma taxa de decaimento (por conta da dilatação temporal): $\frac{m}{E_p} \Gamma$

$$\frac{1}{p^2 - m^2 + i m \Gamma} \approx \frac{1}{2 E_p (p^0 - E_p + \frac{i m \Gamma}{2})}$$

$p^2 \sim m^2$
 $p^0 \sim E_p$

distribuição perto do pico

$$p^2 - m^2 = (p^0)^2 - \frac{|\vec{p}|^2 - m^2}{-E_p^2} = \underbrace{(E_p + p^0)}_{\sim 2E_p} (p^0 - E_p)$$

A matriz S

Começamos o cálculo do espalhamento definindo os estados inicial e final.

Estados iniciais: consideramos um número finito de pacotes que, em $t = -\infty$, estão isolados entre si e tem momento definido. Estes estados, definidos na representação de Heisenberg, são chamados de **in-states**:

$$|\{ \vec{p}_i \} \rangle_{IN}$$

Para tempos finitos $-T < t < +T$, estes pacotes de onda vão se sobrepor e interagir (elastica ou inelasticamente) dando origem a um outro conjunto de pacotes de onda que se afastam e acabam por ficar mutuamente isolados. Definiremos estes estados em $t = +\infty$, e os chamamos de **out-states**:

$$|\{ \vec{p}_i \} \rangle_{OUT}$$

O conjunto de todos possíveis estados in (out) é completo:

$$\sum_{\{ \vec{p}_i \}} |\{ \vec{p}_i \} \rangle_{IN} \langle \{ \vec{p}_i \} | = \sum_{\{ \vec{p}_i \}} |\{ \vec{p}_i \} \rangle_{OUT} \langle \{ \vec{p}_i \} | = 1$$

O que quer dizer que podemos expandir um destes estados em função do conjunto de outros.

O que queremos saber é (duas partículas iniciais, n finais):

$$\langle \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots | \vec{k}_A, \vec{k}_B \rangle_{\text{in}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \langle \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots; T | \vec{k}_A, \vec{k}_B; -T \rangle_{\text{H}} =$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \langle \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots | e^{-iHT} | \vec{k}_A, \vec{k}_B \rangle_{\text{S}} \quad (\text{eq. 33.1})$$

eu trouxe os dois estados até um tempo comum e arbitrário t (e posso escolher este t como aquele em que coincidem as representações)

Com isso, definimos a **matriz S**:

$$\langle \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots | S | \vec{k}_A, \vec{k}_B \rangle \equiv \langle \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots | \vec{k}_A, \vec{k}_B \rangle_{\text{in}} \quad (\text{eq. 33.2})$$

Vamos então, definir os pacotes de onda. O caso de uma partícula é trivial, pois ela está sempre isolada, então:

$$|\vec{p}\rangle_{\text{in}} = |\vec{p}\rangle_{\text{out}} = |\vec{p}\rangle = \sqrt{2E_p} \alpha_p^+ |0\rangle$$

↳ teoria livre apenas

$$|\phi\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_k}} \phi(\vec{k}) |\vec{k}\rangle$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \phi | \phi \rangle = 1 \\ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |\phi(\vec{k})|^2 = 1 \end{array} \right.$$

E podemos escolher a distribuição de momentos, por ex.: $\phi(\vec{k}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$

No caso de duas partículas temos que tomar cuidado com a possibilidade de que, mesmo que elas "colidam" (interajam), os centros das duas distribuições espaciais nunca tenham se encontrado.

$$|\phi_A \phi_B\rangle_{\text{in}} = \int \frac{d^3k_A}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k_B}{(2\pi)^3} \frac{\phi_A(\vec{k}_A) \phi_B(\vec{k}_B)}{\sqrt{2E_A} \sqrt{2E_B}} e^{-i\vec{k}_A \cdot \vec{k}_B} |\vec{k}_A, \vec{k}_B\rangle_{\text{in}} \quad (\text{eq. 33.3})$$

↳ para deixar a possível separação \vec{b} entre os pacotes explícita. \vec{b} , transversa a direção do impacto, é o **parâmetro de impacto**

Os estados finais são definidos da forma usual:

$$\langle \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots | = \prod_k \int \frac{d^3p_k}{(2\pi)^3} \frac{\phi_k(p_k)}{\sqrt{2E_k}} \langle \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots | \quad (\text{eq. 33.4})$$

Os elementos da matriz S serão dados por: $S_{\alpha\beta} = \langle \beta_{\text{out}} | \alpha_{\text{in}} \rangle$

As equações 33.1 e 33.2 mostram que S é um operador de evolução, portanto devemos exigir:

$$S S^\dagger = S^\dagger S = 1$$

Mas em S está também contida a possibilidade das partículas iniciais não interagirem, de forma que os estado final seja igual ao inicial, ou seja S contém a identidade. Para separar esses eventos dos espalhamentos propriamente ditos, definimos:

$$S \equiv 1 + i T \quad (\text{eq. 34.1})$$

↳ puramente convencional

Além disso, sabemos que o momento e a energia totais se conservam, o que é implementado por meio de uma delta de Dirac. Definimos então o Elemento de Matriz Invariante:

$$\langle p_1 p_2 \dots | i T | k_A, k_B \rangle \equiv (2\pi)^4 \delta^4(k_A + k_B - \sum p_k) i \mathcal{M}(k_A, k_B \rightarrow p_k) \quad (\text{eq. 34.2})$$

Fórmula de Redução de LSZ

A formula que relaciona os elementos da matriz S (o que queremos calcular) com as funções de Green da teoria (o que sabemos calcular) é chamada de Fórmula de Redução de LSZ. Ela será provada em TQCII, aqui nos limitaremos a enunciá-la. Dada a função de Green no espaço dos momentos:

$$\tilde{G}_{n+m}(p_i^N, k_j^N) = \int \prod_{i=1}^n d^4x_i e^{i p_i x_i} \int \prod_{j=1}^m d^4y_j e^{-i k_j y_j} \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \phi(y_1) \dots \phi(y_m) \} | \Omega \rangle$$

↳ # partículas iniciais
↳ # partículas finais

temos:

$$\langle \{ p_i \}_n | \{ k_j \}_m \rangle_{in} = \lim_{\substack{p_i^2 \rightarrow m_i^2 \\ k_j^2 \rightarrow m_j^2}} \frac{1}{(i\sqrt{Z})^{m+n}} \prod_{i=1}^n (p_i^2 - m_i^2 + i\epsilon) \prod_{j=1}^m (k_j^2 - m_j^2 + i\epsilon) \tilde{G}_{n+m}(p_i^N, k_j^N)$$

(eq. 34.3)

veremos que as funções de Green no espaço dos momentos têm um propagador para cada linha externa. Estes serão cancelados por estes termos entre parênteses, que nada mais são que os inversos dos propagadores (no espaço dos momentos). Essencialmente vemos que o elemento da matriz S se trata do resíduo da função de Green quando todos os momentos das partículas espalhadas (estados assintóticos) estão em seus polos.

Note que esta expressão é para a função de Green completa, da teoria interagente e não da livre, em TQCII veremos que este fator Z que aparece aí está ligado às correções ao propagador livre. As massas também não são as mesmas que aparecem na teoria livre e sim as massas corrigidas pela interação do campo (massas físicas). A função de Green completa de 2 pontos, próximo ao polo, tem a forma:

$$G_2^c(p) = \int d^4x e^{-i p x} \langle \Omega | T \{ \phi(x), \phi(y) \} | \Omega \rangle \sim \frac{i Z}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Em contraste com o propagador da teoria livre:

$$G_2(p) = \frac{i}{p^2 - \underbrace{m_0^2}_{\text{massa "nua" (a que aparece na Lagrangeana, e que é física na teoria livre)} + i\epsilon}$$

O que significa que, em primeira aproximação: $\begin{cases} z = 1 \\ m = m_0 \end{cases}$
(nível árvore, que explicaremos adiante)

Com esta fórmula conseguimos obter os elementos \mathcal{M} a partir das funções de Green. Resta saber como obtemos σ . A probabilidade de, dado um estado inicial $|\phi_A \phi_B\rangle$, produzirmos n partículas com momentos no intervalo $d^3p_1 \dots d^3p_n$ é:

$$P(A, B \rightarrow 1, 2, \dots, n) = \left(\frac{\prod d^3p_k}{f (2\pi)^3 dE_k} \right) \left| \langle \underbrace{p_1, p_2, \dots, p_n}_{\text{normalização}} | \phi_A \phi_B \rangle_{\text{IN}} \right|^2$$

Suponha que tenhamos apenas uma partícula A (alvo) e um monte de partículas B, com n_B partículas por unidade de área transversa, e diferentes parâmetros de impacto b . O número médio de partículas espalhadas é:

$$\Delta N_{ev} = \sum_{i = \text{partículas B incidentes}} P_i = \int d^2b \underbrace{n_B}_{\text{distribuição uniforme}} P(\vec{b}) = n_B \int d^2b P(\vec{b})$$

Então, de 30.1, temos:

$$d\sigma = \frac{\Delta N_{ev}}{n_B} = \int d^2b P(\vec{b}) \quad (\text{eq. 35.1})$$

porque estamos considerando a versão infinitesimal

$$\langle \{p_f\} | \phi_A \phi_B \rangle \langle \{p_f\} | \phi_A \phi_B \rangle^*$$

$\downarrow \int d^3k_A \int d^3k_B \quad \downarrow \int d^3k_A \int d^3k_B$

$$d\sigma = \int d^2b \left(\frac{\prod d^3p_k}{f (2\pi)^3 dE_k} \right) \left| \langle \{p_f\} | \phi_A \phi_B \rangle_{\text{IN}} \right|^2 =$$

$$\int d^2b \left(\frac{\prod d^3p_k}{f (2\pi)^3 dE_k} \right) \prod_{i=A, B} \int \frac{d^3k_i}{(2\pi)^3} \frac{\phi_i(\vec{k}_i)}{\sqrt{2E_i}} \int \frac{d^3\bar{k}_i}{(2\pi)^3} \frac{\phi_i^*(\vec{k}_i)}{\sqrt{2E_i}} e^{i\vec{b} \cdot (\vec{k}_B - \vec{k}_B)}$$

$\times \langle \{p_f\} | \{k_i\} \rangle_{\text{IN}} \langle \{p_f\} | \{\bar{k}_i\} \rangle_{\text{IN}}^* =$

(eq. 35.2)

Podemos fazer a integral no parâmetro de impacto:

$$\int d^2b e^{i\vec{b} \cdot (\vec{k}_B - \vec{k}_B)} = (2\pi)^2 \delta^{(2)}(\vec{k}_B^\perp - \vec{k}_B^\perp)$$

$\hookrightarrow \vec{b} = b^\perp$

E usar a definição dos elementos de matriz:

$$\langle \text{OUT} | \{P_f\} | \{k_i\} \rangle_{\text{IN}} = i \mathcal{M}(k_A, k_B \rightarrow \{P_f\}) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum k_i - \sum P_f)$$

só queremos a parte não trivial ($\neq \hat{1}$)

$$\langle \text{OUT} | \{P_f\} | \{\bar{k}_i\} \rangle_{\text{IN}}^* = -i \mathcal{M}^*(\bar{k}_A, \bar{k}_B \rightarrow \{P_f\}) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum \bar{k}_i - \sum P_f)$$

A integral nos \bar{k} , fica (levando em conta as deltas vindo da integração no parâmetro de impacto e do elemento de matriz):

$$\int \frac{d^3 \bar{k}_A}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \bar{k}_B}{(2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum \bar{k}_i - \sum P_f) (2\pi)^3 \delta^{(4)}(k_B^\perp - k_A^\perp) =$$

$$d^3 k_i = d^2 k_i^\perp d k_i^z \quad \delta^{(4)}(\sum \bar{k}_i - \sum P_f) = \delta^{(4)}(k_A^\perp + k_B^\perp - \sum P_f^\perp) \delta(k_A^z + k_B^z - \sum P_f^z) \delta(E_A + E_B - \sum E_f)$$

$$= \int d^2 k_A^\perp d k_A^z d k_B^z \delta^{(4)}(k_A^\perp + k_B^\perp - \sum P_f^\perp) \delta(k_A^z + k_B^z - \sum P_f^z) \delta(E_A + E_B - \sum E_f) \Big|_{k_B^\perp = k_A^\perp} =$$

k_A^\perp (imposto pela outra delta, de $\langle \text{OUT} | \{P_f\} | \{k_i\} \rangle_{\text{IN}} \propto \delta(\sum k_i - \sum P_f)$)

$$= \int d k_A^z d k_B^z \delta(k_A^z + k_B^z - \sum P_f^z) \delta(E_A + E_B - \sum E_f) \Big|_{k_i^\perp = k_i^\perp} = \int d k_A^z \delta(\sqrt{k_A^z{}^2 + m_A^2} + \sqrt{k_B^z{}^2 + m_B^2} - \sum E_f) =$$

$k_B^z = \sum P_f^z - k_A^z$

$$\frac{d E_A}{d k_A^z} = \frac{k_A^z}{E_A} \quad \frac{d E_B}{d k_B^z} = \frac{k_B^z}{E_B} = - \frac{d E_B}{d k_A^z}$$

$k_B^z = \sum P_f^z - k_A^z$

$$\delta(\bar{E}_A + \bar{E}_B - \sum E_f) = \left| \frac{d}{d k_A^z} (\bar{E}_A + \bar{E}_B) \right|^{-1} \Big|_{\bar{E}_A + \bar{E}_B = \sum E_f} = \left| \frac{k_A^z}{E_A} - \frac{k_B^z}{E_B} \right|^{-1} \Big|_{\bar{E}_A + \bar{E}_B = \sum E_f}$$

$\nu_A \quad \nu_B$

$$= \frac{1}{|\nu_A - \nu_B|} \Big|_{\substack{\bar{E}_A + \bar{E}_B = \sum E_f \\ k_i^\perp = k_i^\perp \\ k_B^z = \sum P_f^z - k_A^z}}$$

Lembrando que em todo resto do integrando temos que impor as três condições obtidas:

- (1) $\bar{E}_A + \bar{E}_B = \sum E_f$
- (2) $k_i^\perp = k_i^\perp$
- (3) $k_B^z = \sum P_f^z - k_A^z$

E que ainda temos outra delta de Dirac:

$$\delta(\sum k_i - \sum P_f) = \delta(k_A^z + k_B^z - \sum P_f^z) \delta(k_A^\perp + k_B^\perp - \sum P_f^\perp) \delta(E_A + E_B - \sum E_f)$$

(4) (5)

vemos que de fato (unindo as condições (1) a (3) com a delta acima):

$$(3) + (4) \Rightarrow k_A^z + k_B^z = \bar{k}_A^z + \bar{k}_B^z \Rightarrow (6) \bar{k}_B^z = k_A^z + k_B^z - \bar{k}_A^z$$

$$(1) + (5) \Rightarrow \bar{E}_A + \bar{E}_B = E_A + E_B$$

$$\sqrt{k_A^z{}^2 + k_A^{\perp}{}^2 + m_A^2} + \sqrt{k_B^z{}^2 + k_B^{\perp}{}^2 + m_B^2} = \sqrt{\bar{k}_A^z{}^2 + k_A^{\perp}{}^2 + m_A^2} + \sqrt{\bar{k}_B^z{}^2 + k_B^{\perp}{}^2 + m_B^2}$$

$$(6) \Rightarrow (6a) \bar{k}_B^z{}^2 = k_A^z{}^2 + k_B^z{}^2 + \bar{k}_A^z{}^2 + 2k_A^z k_B^z - 2k_A^z \bar{k}_A^z - 2k_B^z \bar{k}_A^z$$

$$(E_A + E_B)^2 = (\bar{E}_A + \bar{E}_B)^2 \quad (6a)$$

$$k_A^z{}^2 + k_B^z{}^2 + 2E_A E_B = \bar{k}_A^z{}^2 + \bar{k}_B^z{}^2 + 2\bar{E}_A \bar{E}_B$$

$$\dots + \bar{k}_A^z k_B^z + A k_B^z \quad (6)$$

$$2\sqrt{(k_A^z{}^2 + A^2)(k_B^z{}^2 + B^2)} = 2k_A^z k_B^z - 2k_A^z \bar{k}_A^z - 2k_B^z \bar{k}_A^z + 2\sqrt{(k_A^z{}^2 + A^2)(\bar{k}_B^z{}^2 + B^2)}$$

$$2(B-A)k_A^z = 2(B-A)\bar{k}_A^z \xrightarrow{+B, A} \boxed{k_A^z = \bar{k}_A^z} \quad (7)$$

$$(7) + (6) \Rightarrow \boxed{k_B^z = \bar{k}_B^z \quad \bar{E}_A = E_A \quad \bar{E}_B = E_B} \quad (8)$$

Voltando a $d\sigma$:

$$d\sigma = \left(\prod \frac{d^3 p_k}{(2\pi)^3} \right) \prod_{i=A,B} \int \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3} \frac{|\phi_i(\vec{k}_i)|^2}{2E_i} \frac{1}{|v_A - v_B|} |\mathcal{M}(p_A, p_B \rightarrow \{p_k\})|^2 (2\pi)^4 \delta^4\left(\sum_{A,B} k_i - \sum p_k\right) \quad (\text{eq. 37.1})$$

Especializando para o caso em que as distribuições de momento são estreitas:

$$|\phi_A(\vec{k}_A)|^2 \sim (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k}_A - \vec{p}_A)$$

$$|\phi_B(\vec{k}_B)|^2 \sim (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k}_B - \vec{p}_B)$$

(na verdade uma distribuição estreita, mas de largura finita)

temos:

$$d\sigma = \frac{1}{2E_A 2E_B |v_A - v_B|} \left(\prod \frac{d^3 p_k}{(2\pi)^3} \right) |\mathcal{M}(p_A, p_B \rightarrow \{p_k\})|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_B - \sum p_k) \quad (\text{eq. 37.2})$$

Note que a razão pela qual essa última expressão é útil consiste no fato de que, experimentalmente, tanto os estados que preparamos para a colisão quanto aqueles que medimos, se parecem muito com estados de momento bem determinado, mas não são ondas planas. Isso ocorre porque tanto na produção quanto na medida temos uma certa precisão FINITA na determinação do momento. Isso significa que sobra uma pequena incerteza no momento e o pacote não fica totalmente delocalizado. "Estreito" na definição acima quer dizer "menor que a precisão experimental".

Das grandezas em 37.2, todas abaixo são invariantes de Lorentz (desde que integremos nos momentos):

$$\left(\prod \frac{d^3 p_k}{(2\pi)^3} \right) \& \mathcal{M}(p_A, p_B \rightarrow \{p_k\}) \& (2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_B - \sum p_k)$$

De fato chamamos:

$$\int d\Omega_n \equiv \left(\int \prod \frac{d^3 p_k}{(2\pi)^3} \right) (2\pi)^4 \delta^4(\mathbf{P}_A + \mathbf{P}_B - \sum \mathbf{p}_k) \quad (\text{eq. 38.1})$$

de Espaço de Fase Invariante para n corpos. No entanto temos um fator que muda sobre boosts:

$$\frac{1}{E_A E_B |\mathcal{V}_A - \mathcal{V}_B|} = \frac{1}{|E_B \mathbf{P}_A^z - E_A \mathbf{P}_B^z|} = \frac{1}{|E_{\nu \times \gamma \nu} \mathbf{P}_A^\nu \mathbf{P}_B^\nu|} = A^{\nu \gamma}$$

(área transversa a z , e se transforma como tal. Invariante a boosts na direção z)

Se $\vec{P}_A \parallel \vec{P}_B$ (referencial do centro de massa ou do laboratório, que de fato é o que assumimos até agora, por exemplo na integral em b) podemos escrever:

$$\frac{1}{E_A E_B |\mathcal{V}_A - \mathcal{V}_B|} = \frac{1}{F} \quad \text{Fator de fluxo invariante de Møller}$$

$$F^2 = (\mathbf{P}_A \cdot \mathbf{P}_B)^2 - m_A^2 m_B^2 = |E_A \vec{P}_B - E_B \vec{P}_A|^2 - |\vec{P}_1 \times \vec{P}_2|^2$$

O que nos fornece uma expressão invariante de Lorentz para a seção de choque total (note que a seção de choque diferencial não é invariante em geral, embora possamos definir algumas que são, a chamada rapidity é um exemplo):

$$\sigma = \frac{1}{4 \sqrt{(\mathbf{P}_A \cdot \mathbf{P}_B)^2 - m_A^2 m_B^2}} \left(\int \prod \frac{d^3 p_k}{(2\pi)^3} \right) |\mathcal{M}(P_A, P_B \rightarrow \{p_k\})|^2 (2\pi)^4 \delta^4(\mathbf{P}_A + \mathbf{P}_B - \sum \mathbf{p}_k) \quad (\text{eq. 38.2})$$

esta integral exige cuidado quando temos partículas idênticas no estado final, para que não contemos múltiplas vezes o mesmo espalhamento temos que dividir por $1/n!$ (onde n é o # de partículas ident.)Um caso específico bastante relevante é o espalhamento $2 \rightarrow 2$, no referencial do centro de massa ($\vec{P}_{TOT} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = 0$), o espaço de fase fica:

$$\int d\Omega_2 = \int \frac{d^3 p_1 d^3 p_2}{(2\pi)^6 4 E_1 E_2} (2\pi)^4 \delta^4(\mathbf{P}_A + \mathbf{P}_B - \sum \mathbf{p}_k) \delta(E_A + E_B - E_1 - E_2) =$$

$\underbrace{E_{cm}}_{\substack{\text{mesma coisa que} \\ \text{fizemos na pg 36}}} \quad \underbrace{\delta^4(\mathbf{P}_A + \mathbf{P}_B - \sum \mathbf{p}_k)}_{\substack{\text{com } \vec{P}_1 = -\vec{P}_2}}$

$$= \int \frac{d\Omega P_1^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \delta(E_{cm} - E_1 - E_2) \bigg|_{\vec{P}_1 = -\vec{P}_2} = \int \frac{d\Omega P_1^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \frac{1}{\left| \frac{P_1}{E_1} + \frac{P_2}{E_2} \right|} \bigg|_{\substack{\vec{P}_1 = -\vec{P}_2 \\ E_1 + E_2 = E_{cm}}} =$$

$$= \int \frac{d\Omega P_1}{16\pi^2 E_{cm}} \quad (\text{eq. 38.3})$$

$$\therefore \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{cm} = \frac{1}{2 E_A 2 E_B |\mathcal{V}_A - \mathcal{V}_B|} \frac{|\vec{P}_1|}{16\pi^2 E_{cm}} |\mathcal{M}(P_A, P_B \rightarrow P_1, P_2)|^2 \quad (\text{eq. 38.4})$$

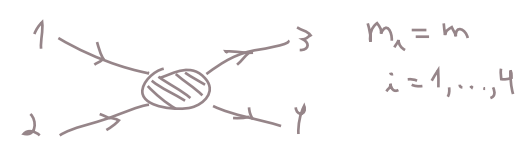
Se todas as partículas tiverem massas idênticas, então:

$$E_A = E_B = E_{cm}/2 \quad |\vec{p}_A| = |\vec{p}_B| = |\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = |\vec{p}|$$

$$E_A E_B / |v_A - v_B| = |E_A p_B - p_A E_B| = E_{cm} |\vec{p}|$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{cm} = \frac{|M|^2}{64 \pi^2 E_{cm}^2} \quad (\text{eq. 39.1})$$

Espalhamento com quatro estados de massa idêntica



Decaimento

Também podemos especializar as contas acima para o caso de uma partícula inicial decaindo (o caso $1 \rightarrow n$), basta voltar na eq. 35.2 e remover todas as integrais em k_B e \bar{k}_B (além do parâmetro de impacto):

$$d\Gamma = \left(\prod \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 dE_f} \right) \int \frac{d^3 k_A}{(2\pi)^3} \frac{\phi_A(\vec{k}_A)}{\sqrt{2E_A}} \int \frac{d^3 \bar{k}_A}{(2\pi)^3} \frac{\phi_A^*(\vec{k}_A)}{\sqrt{2E_A}} \langle \{p_f\} | \{k_A\} \rangle_{OUT} \langle \{p_f\} | \{\bar{k}_A\} \rangle_{IN}^*$$

o que significa que obteremos:

$$\int d^3 \bar{k}_A \delta(\vec{k}_A - \sum p_f) \delta(E_A - \sum E_f) = \delta(\vec{k}_A - \sum p_f) \delta(E_A - \sum E_f) \Big|_{\vec{k}_A = \sum p_f} \quad (\text{o que também implicará: } \vec{k}_A = \vec{k}_A, E_A = E_A)$$

ao invés do fator $|v_A - v_B|$ obtido na pg 36. Esta é de fato a única mudança. Assumindo de novo que o estado inicial é um pacote estreito e indo para o referencial do centro de massa (que neste caso coincide com o referencial de repouso da partícula inicial, que é onde definimos Γ de qualquer forma):

$$d\Gamma = \frac{1}{2m_A} \left(\prod \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 dE_f} \right) |M(m_A \rightarrow \{p_f\})|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A - \sum p_f) \quad (\text{eq. 39.2})$$

Aonde cabe a ressalva de que, uma vez que não é possível pensar em uma partícula INSTÁVEL no passado infinito, o que estamos assumindo aqui é que o tempo da vida τ , é tal que:

$$\tau \gg T \quad \Downarrow \quad \Delta E \simeq \frac{1}{T} \gg \frac{1}{\tau}$$

tempo que mandamos para infinito } lembrando que estas duas grandezas estão ligadas pelo princípio da incerteza
 energia total envolvida (neste caso ~ massa)

ou seja, quando a largura é pequena em relação a massa (estado estreito) ou de vida longa.

Diagramas de Feynman para a Matriz S

(Peskin 4.6)

Finalmente podemos coletar tudo que aprendemos com as funções de Green e obter um conjunto de regras sucinto para o cálculo da matriz S incluindo agora as correções de ordem superior na teoria de perturbação. Partindo de (33.1 e 33.2):

$$\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \dots | S | \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \dots | e^{-iH(\Delta T)} | \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle$$

(eq. 40.1)

Queremos os estados da teoria livre, vimos que (eq. 9.1):

$$|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \left(e^{-i\tilde{E}_0 T} |\mathbb{1}\Omega\rangle \right)^{-1} e^{-iHT} |\mathbb{1}\Omega\rangle$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \left(e^{-i\tilde{E}_0 T} |\mathbb{1}\Omega\rangle \right)^{-1} U_I(0, -T) |\mathbb{1}\Omega\rangle$$

Faremos agora:

$$|\vec{k}_A \vec{k}_B\rangle \propto \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} e^{-iHT} |\vec{k}_A \vec{k}_B\rangle_0$$

↳ estado livre, mas não é o vácuo

(estamos deixando a constante de proporcionalidade em aberto, pois ela pode ser bem complicada)

O lado direito de 40.1 fica:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \dots | e^{-iH(\Delta T)} | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle \propto \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \dots | e^{-iH(\Delta T)} U_I(T, -T) | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 =$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \dots | T \left\{ \text{EXP} \left[-i \int_{-T}^T dt H_I(t) \right] \right\} | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0$$

$$\therefore S_{fi} \propto \langle f | U_I(+\infty, -\infty) | i \rangle$$

No caso das funções de Green a constante de proporcionalidade se cancela usando a normalização (passagem entre as eqs. 11.1 e 11.2) e aqui acontece o mesmo. Provar isso envolve provar a fórmula LSZ e não faremos isso neste curso. O resultado obtido fazendo a normalização correta e usando a fórmula de LSZ é dado por:

↳ curioso? Veja as notas de TQCII (2016), pgs 93 a 98

$$\langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n | i T | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle = (\sqrt{Z})^{n+1} \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \left(\langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n | T \left(\text{EXP} \left[-i \int_{-T}^T dt H_I(t) \right] \right) | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 \right)$$

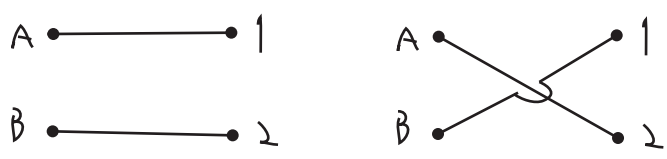
conectado amputado

(eq. 40.2)

Na equação 40.2 obtemos iT ao invés de S , pois a fórmula de LSZ só nos fornece estados conectados em que o estado inicial e final são diferentes. Ainda resta entender o que "amputado" quer dizer. Lembrando que $Z = 1$ a nível árvore, vejamos alguns exemplos:

$2 \rightarrow 2$ $\mathcal{O}(\lambda^0)$ o lado direito de 40.2 fica:

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 &\equiv \sqrt{2E_A 2E_B 2E_1 2E_2} \langle 0 | a_1 a_2 a_A^\dagger a_B^\dagger | 0 \rangle = \\ &= 2E_A 2E_B (2\pi)^4 \left[\delta^{(3)}(\vec{p}_A - \vec{p}_1) \delta^{(3)}(\vec{p}_B - \vec{p}_2) + \delta^{(3)}(\vec{p}_A - \vec{p}_2) \delta^{(3)}(\vec{p}_B - \vec{p}_1) \right] \end{aligned}$$



Desconectados (não são incluídos)
contribuem para a parte 1 de $S = 1 + iT$

$2 \rightarrow 2$ $\mathcal{O}(\lambda^1)$

$$\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | T \left\{ -i \frac{\lambda}{4!} \int d^4x \phi^4(x) \right\} | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 = \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | N \left\{ -i \frac{\lambda}{4!} \int d^4x \phi^4(x) + \text{contr.} \right\} | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 \quad (\text{eq. 41.1})$$

Teorema de Wick

Os ordenamentos normais não contraídos não somem.

Já vimos que (pág 21): $\phi^+ | \vec{p} \rangle_0 = e^{-i p x} | 0 \rangle$; $\langle \vec{p} | \phi^- = \langle 0 | e^{i p x}$

dentro de $\langle \dots | N(\phi^N) | \dots \rangle = \langle \dots | (\phi^-)^n (\phi^+)^{N-n} | \dots \rangle$, $n = 0, \dots, N$, temos os ϕ^+ agindo para a direita e os ϕ^- agindo para a esquerda. Definimos então:

no exemplo em questão como temos 2 estados iniciais e 2 finais, o único termo que vai ser diferente de zero é $n=2$ ($N=4$)

Em 41.1 temos termos do tipo: $\phi\phi\phi\phi$, $\phi\phi\phi\phi$, $\phi\phi\phi\phi$

O último termo não passa de um diagrama desconectado acompanhado de bolhas no vácuo:

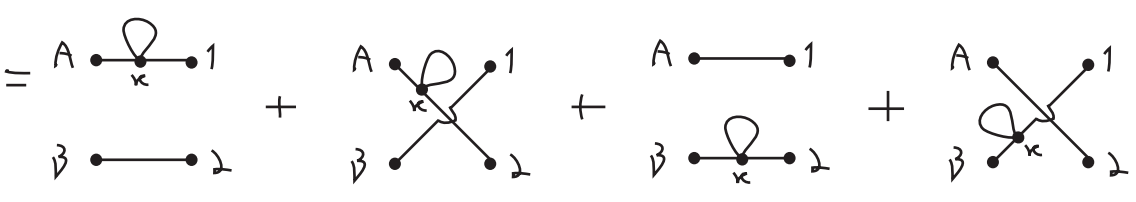
$$-i \frac{\lambda}{4!} \int d^4x \phi\phi\phi\phi \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 = 0 \times \left(\begin{array}{c} A \text{---} 1 \\ B \text{---} 2 \end{array} \quad \begin{array}{c} A \text{---} 1 \\ B \text{---} 2 \end{array} \right)$$

O segundo termo, com apenas uma contração, nos dá o seguinte:

$$-i \frac{\lambda}{4!} \int d^4x \ 2 \phi \phi \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | \phi^- \phi^+ | \vec{p}_a \vec{p}_b \rangle_0 =$$

$\langle \phi^+ \phi^+ \rangle = \langle \phi^- \phi^- \rangle = 0$

quatro diagramas



Desconectados (não são incluídos)

Finalmente, no termo sem nenhuma contração somos obrigados a contrair todos os campos com os estados assintóticos:

$$\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | \phi^- \phi^- \phi^+ \phi^+ | \vec{p}_a \vec{p}_b \rangle_0 = 4! e^{i(p_a + p_b - p_1 - p_2)x}$$

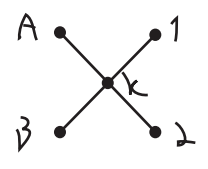
várias formas de fazer, mas todas com o mesmo resultado

$$\therefore \left(\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | N \left\{ -i \frac{\lambda}{4!} \int d^4x \phi^4(x) + \text{contr.} \right\} | \vec{p}_a \vec{p}_b \rangle_{\text{CONNECT.}} \right) = -i \frac{\lambda}{4!} \int d^4x \ 4! e^{i(p_a + p_b - p_1 - p_2)x} =$$

$$= -i \lambda (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_a + p_b - p_1 - p_2)$$

(eq. 42.1)

que é justamente o que obteríamos com as regras de Feynman para o diagrama:



como $i\mathcal{T} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_a + p_b - p_1 - p_2) i\mathcal{M} \Rightarrow \mathcal{M} = -\lambda$

logo a sessão de choque no centro de massa é: $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = \frac{\lambda^2}{64\pi^2 E_{cm}^2}$ (eq. 42.2)

Como o lado direito não tem qualquer dependência angular, fica fácil integrar em Ω :

$$\sigma_{TOT} = \frac{\lambda^2}{32\pi^2 E_{cm}^2} \quad \left(\int dR = 4\pi \right) \quad \frac{1}{2} \quad (2 \text{ partículas idênticas})$$

(eq. 43.1)

Até aqui nenhuma novidade, mas vejamos o que ocorre com algumas correções.

Até agora só o diagrama conectado contribuiu para esta seção de choque, mas resta a pergunta: todos os diagramas conectados possíveis contribuirão para ela? Vejamos o seguinte diagrama

$$= \frac{1}{2} (-i\lambda) (2\pi)^4 \delta^4(p_B + p_A - p_1 - p_2) (-i\lambda) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D_F(k) D_F(p' = p_B)$$

(sai da integral)

$$= \frac{1}{2} (-i\lambda) (2\pi)^4 \delta^4(p_B + p_A - p_1 - p_2) (-iM_{(1)}^2) \frac{i}{p_B^2 - m^2}$$

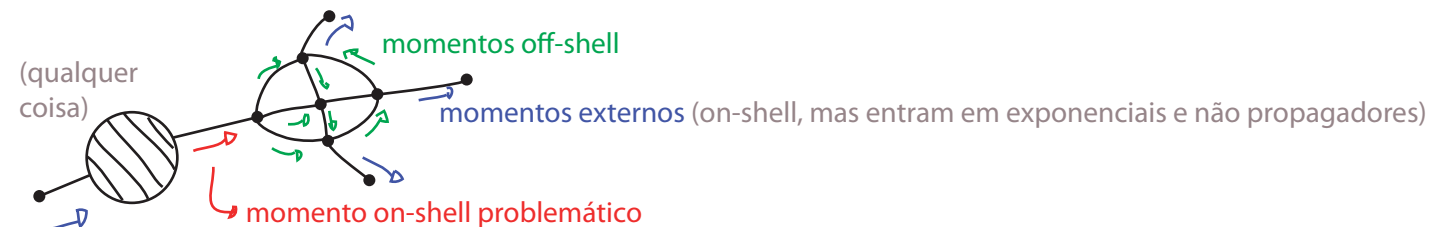
zero para partícula on-shell: $p_B^2 = m^2$

Essa é outra versão do problema que mencionamos pela primeira vez ao fim da página 23, onde obtemos as regras de Feynman no espaço dos momentos e apareceram propagadores para as linhas externas, na última expressão da pag 23 temos:

$$= \frac{\lambda^2}{3!} D_F(p_1) D_F(p_2) (2\pi)^4 \delta^4(p_2 - p_1) \int \frac{d^4p_i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_j}{(2\pi)^4} D_F(p_1 - p_i - p_j) D_F(p_i) D_F(p_j)$$

$\propto \frac{1}{p_i^2 - m^2}$ ambos problemáticos on-shell $p_i^2 = m^2$

Este problema não apareceu no cálculo de 42.1 pois os estados finais e iniciais foram tratados de forma apropriada nas páginas 41 e 42 (por meio da contração dos operadores com os estados assintóticos) e forneceram exponenciais ao invés de propagadores. No entanto este tratamento não resolve o problema para o diagrama em 43.2 pois não é o propagador ligado ao ponto externo que está divergindo, mas sim aquele que envolve p' . Note que, em geral, este problema vai surgir toda vez em que um momento inicial ou final (por definição on-shell) "correr" dentro de alguma linha interna do diagrama. Note que:



Fica claro que podemos fazer a seguinte separação para n pernas externas:



onde queremos nos livrar dos propagadores em vermelho. Esta operação é chamada de amputar o

diagrama, uma vez que removeremos as pernas externas com TODAS AS SUAS CORREÇÕES, ou seja, o propagador completo. Operacionalmente podemos "seguir" o momento externo e procurar a linha mais distante do ponto externo em que podemos remover a perna cortando apenas um propagador:



É a estes diagramas amputados que nos referimos na eq. 40.2. Felizmente a fórmula de LSZ faz esta "amputação" formalmente, basta notar que (LSZ, eq 34.3):

$$\langle \{P_i\}_n | \{k_j\}_m \rangle_{in} = \lim_{\substack{p_i^2 \rightarrow m_i^2 \\ q_j^2 \rightarrow m_j^2}} \frac{1}{(\sqrt{z^1})^{m+n}} \prod_{i=1}^n (p_i^2 - m_i^2 + i\epsilon) \prod_{j=1}^m (k_j^2 - m_j^2 + i\epsilon) \tilde{G}_{n+m}(p_i^N, k_j^N)$$

Se encontra multiplicado pelos propagadores completos "problemáticos"

$$G_2(p) \sim \frac{i z}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$$= (\sqrt{z^1})^{m+n} \prod_{i=1}^n \left(\frac{p_i^2 - m_i^2 + i\epsilon}{i z} \right) \prod_{j=1}^m \left(\frac{k_j^2 - m_j^2 + i\epsilon}{i z} \right)$$

Inverso do propagador completo! ($\Gamma^{(n)}$)

É por isso que obtemos só os diagramas amputados quando passamos da fórmula de LSZ para a eq. 40.2 e finalmente:

$$i \mathcal{M} (2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_B - \sum P_k) = \left(\sum \text{diagramas conectados e amputados} \right) \times (\sqrt{z^1})^{n+2} \quad (\text{eq. 44.1})$$

Regras de Feynman para Férmions

(Peskin 4.7)

Queremos agora generalizar o que fizemos nas últimas páginas (onde tínhamos apenas escalares) para o caso de férmions. A dedução do teorema de Feynman (eq. 11.3) não sofre modificações pois a invariância de Lorentz exige que o Hamiltoniano de interação seja escalar (ou seja, um produto de um número par de campos espinoriais), com isso não há dificuldade adicional em definir as exponenciais ordenadas temporalmente.

$$T \{ H_{1I}(t_1) H_{1I}(t_2) \} = \begin{cases} H_{1I}(t_1) H_{1I}(t_2) & t_1 > t_2 \\ H_{1I}(t_2) H_{1I}(t_1) & t_2 > t_1 \end{cases}$$

mesmo que:

$$H_{1I}(t_1) = \int d^3x \bar{\Psi}(x_1) \Psi(x_1)$$

Temos que ter cuidado, no entanto, quando calculamos os elementos de matriz que aparecem no teorema de Feynman, uma vez que o teorema de Wick sofre uma modificação. Já vimos que no caso de férmions o ordenamento temporal é dado por:

$$T(\psi(x) \bar{\psi}(y)) = \begin{cases} \psi(x) \bar{\psi}(y) & x^0 > y^0 \\ -\bar{\psi}(y) \psi(x) & x^0 < y^0 \end{cases}$$

O que nos permite escrever o propagador:

$$S_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)} = \langle 0 | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(y) \} | 0 \rangle$$

Para produtos de mais campos a generalização é a natural, colocamos um sinal para cada vez que precisamos permutar dois operadores até chegar ao ordenamento temporal:

$$\psi(x_n) \equiv \psi_n$$

$$T\{\psi_1 \psi_2 \psi_3 \psi_4\} = (-1)^3 \psi_3 \psi_1 \psi_2 \psi_4$$

\uparrow $x_3^0 > x_1^0 > x_4^0 > x_2^0$

(Handwritten red arrows and signs (-1) indicate the permutation of operators to chronological order.)

E usamos exatamente a mesma lógica para definir o ordenamento normal, o que deixa todas as formas de escrever o produto normal equivalentes:

$$N(a_p a_q a_r^\dagger) = (-1)^1 a_r^\dagger a_p a_q = (-1)^3 a_r^\dagger a_q a_p$$

(Handwritten blue arrows and signs (-1) indicate the permutation to normal order.)

ou:

$$N(a_p a_q a_r^\dagger) = (-1)^1 a_r^\dagger a_p a_q = (-1)^3 a_r^\dagger a_q a_p$$

Vamos ver como fica o teorema de Wick para dois campos fermiônicos.

$$T\{\psi(x) \bar{\psi}(y)\} = \psi^+(x) \bar{\psi}^+(y) + \psi^-(x) \bar{\psi}^-(y) + \psi^-(x) \bar{\psi}^+(y) + \psi^+(x) \bar{\psi}^-(y) =$$

$$= \psi^+(x) \bar{\psi}^+(y) + \{\psi^+(x), \bar{\psi}^-(y)\} - \bar{\psi}^-(y) \psi^+(x) + \psi^-(x) \bar{\psi}^+(y) + \psi^-(x) \bar{\psi}^-(y) = N[\psi(x) \bar{\psi}(y)] + \{\psi^+(x), \bar{\psi}^-(y)\}$$

$$T\{\psi(x) \bar{\psi}(y)\}_{x^0 < y^0} = -\bar{\psi}^+(y) \psi^+(x) - \bar{\psi}^-(y) \psi^-(x) - \bar{\psi}^+(y) \psi^-(x) - \bar{\psi}^-(y) \psi^+(x) = N[\psi(x) \bar{\psi}(y)] - \{\bar{\psi}^+(y), \psi^-(x)\} + \psi^-(x) \bar{\psi}^-(y)$$

$$\left. \begin{aligned} \{\psi(x), \psi(y)\} &= 0 \\ \{\bar{\psi}(x), \bar{\psi}(y)\} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} T\{\psi(x) \psi(y)\} = N[\psi(x) \psi(y)] \\ T\{\bar{\psi}(x) \bar{\psi}(y)\} = N[\bar{\psi}(x) \bar{\psi}(y)] \end{cases}$$

Definimos então a contração:

$$\overbrace{\psi(x) \bar{\psi}(y)} \equiv \left\{ \begin{array}{ll} \{\psi^+(x), \bar{\psi}^-(y)\} & x^0 > y^0 \\ -\{\bar{\psi}^+(y), \psi^-(x)\} & x^0 < y^0 \end{array} \right\} = S_F(x-y)$$

$$\overbrace{\psi(x) \psi(y)} = \overbrace{\bar{\psi}(x) \bar{\psi}(y)} = 0$$

$$\mathcal{T}[\psi(x) \bar{\psi}(y)] = N[\psi(x) \bar{\psi}(y)] + \overbrace{\psi(x) \bar{\psi}(y)} \quad (\text{eq. 46.1})$$

Se incluímos também um sinal para permutações de operadores necessárias para contrações dentro do produto normal:

$$N[\psi_1 \overset{(-1)}{\psi_2} \bar{\psi}_3 \bar{\psi}_4] = -\overbrace{\psi_1 \bar{\psi}_3} N[\psi_2 \bar{\psi}_4] = -S_F(x_1 - x_3) N[\psi_2 \bar{\psi}_4]$$

conseguimos escrever o teorema de Wick exatamente como fizemos para os escalares:

$$\mathcal{T}[\psi_1 \bar{\psi}_2 \psi_3 \dots] = N[\psi_1 \bar{\psi}_2 \psi_3 \dots + \text{todas as contrações possíveis}] \quad (\text{eq. 46.2})$$

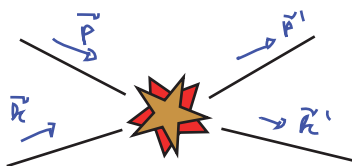
Teoria de Yukawa

Para deduzir as regras de Feynman, vamos usar a interação de Yukawa:

$$H = H_{\text{Dirac}} + H_{\text{K-G}} + \int d^3x g \bar{\psi}(x) \psi(x) \phi(x)$$

considere o seguinte espalhamento:

férmion (p) + férmion (k) \longrightarrow férmion (p') + férmion (k')



A interação envolve três campos aplicados no mesmo ponto (sendo dois deles fermiônicos), logo o vértice será algo do tipo:



Um espalhamento de 2 férmions para 2 férmions deve, portanto, envolver pelo menos duas inserções da interação, o termo dominante é de ordem g^2 :

$$\langle \vec{p}', \vec{k}' | T \left\{ \frac{1}{2!} (-i g) \int d^4x (\bar{\Psi}_I \Psi_I \phi_I)(x) (-i g) \int d^4y (\bar{\Psi}_I \Psi_I \phi_I)(y) \right\} | \vec{p}, \vec{k} \rangle_0 \equiv \langle \vec{p}', \vec{k}' | \vec{p}, \vec{k} \rangle_{g^2}$$

Devemos aplicar o teorema de Wick. Como não temos escalares no estado inicial nem no final todos os termos em que não fizermos a contração $\phi_x \phi_y$ serão iguais a zero.

Analogamente, se contraírmos $\bar{\Psi}_x \Psi_y$ ou $\Psi_x \bar{\Psi}_y$ faltarão operadores fermiônicos para agir nos estados iniciais ou finais, levando a elementos de matriz do tipo:

$$\langle \vec{p}', \vec{k}' | \vec{p}, \vec{k} \rangle_0, \langle \vec{p}' | \vec{p} \rangle_0, \langle \vec{p}' | \vec{k} \rangle_0, \dots$$

que não nos interessam (não houve troca de momento entre os estados iniciais). Assim sendo, só nos preocuparemos com contrações do tipo (há duas possibilidade de contração, estamos mostrando apenas uma delas):

$$\langle \vec{p}', \vec{k}' | T \left\{ \frac{1}{2!} (-i g) \int d^4x (\bar{\Psi}_I \Psi_I \phi_I)(x) (-i g) \int d^4y (\bar{\Psi}_I \Psi_I \phi_I)(y) \right\} | \vec{p}, \vec{k} \rangle_0$$

Onde as linhas verdes representam a aplicação do operador no estado:

$$\bar{\Psi}_I(x) | \vec{p}, s \rangle \equiv \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{p'}}} \sum_{s'} a_{\vec{p}'}^{s'} \omega^{s'}(p') e^{-ip'x} \sqrt{2E_p} a_p^{s+} | 0 \rangle =$$

$$\bar{\Psi}_I(x) | \vec{p}, s \rangle = e^{-ipx} \omega^s(p) | \sigma \rangle \quad (\text{eq. 47.1})$$

e analogamente:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_I(x) | \vec{p}, s \rangle &= e^{-ipx} \omega^s(p) | \sigma \rangle \\ \langle \vec{p}, s | \bar{\Psi}_I(x) &= e^{ipx} \omega^s(p) \langle \sigma | \\ \langle \vec{p}, s | \Psi_I(x) &= e^{-ipx} \omega^s(p) \langle \sigma | \end{aligned} \quad (\text{eq. 47.2})$$

outras contrações na parte fermiônica

$$\langle \vec{p}', \vec{k}' | \vec{p}, \vec{k} \rangle_{g^2} = \frac{(-i g)^2}{2} \int d^4x d^4y D_F(x-y) \langle \vec{p}', \vec{k}' | N \left[(\bar{\Psi}_I \Psi_I)(x) (\bar{\Psi}_I \Psi_I)(y) \right] | \vec{p}, \vec{k} \rangle_0 + \dots$$

onde as contrações em verde indicam que de todos os termos possíveis estamos escolhendo o seguinte:

deixemos este sinal em aberto por enquanto

$$N \left[(\bar{\Psi}_I \Psi_I)(x) (\bar{\Psi}_I \Psi_I)(y) \right] = \dots \pm \bar{\Psi}_I^-(x) \Psi_I^-(y) \Psi_I^+(x) \Psi_I^+(y)$$

índices espinoriais

De fato, muitos termos dão zero:

Qualquer termo envolvendo $\psi(x)$ ou $\bar{\psi}^+(x)$ dá zero pois não temos anti-férmions no estado inicial nem final

Qualquer termo com um número ímpar de "+" ou "-" também dá zero.

Além do termo acima temos a seguinte contração:

$$\langle \vec{p}', \vec{k}' | N [(\bar{\Psi}_1 \Psi_1)(x) (\bar{\Psi}_1 \Psi_1)(y)] | \vec{p}, \vec{k} \rangle_0 \quad (\text{note que os dois tem o mesmo sinal})$$

que equivale somente a uma troca de x por y, então:
(há mais duas contrações possíveis, que veremos depois)

$$\langle \vec{p}' \vec{k}' | \vec{p} \vec{k} \rangle_{\vec{q}} = \pm \frac{(-ig)^2}{2} \int d^4x d^4y D_F(x-y) \times$$

$$\times \left\{ e^{i p' y} e^{-i k' x} e^{-i p x} e^{-i k x} \underbrace{\bar{u}(p') \bar{u}(k)}_{\bar{u}(p') u(p) \bar{u}(k) u(k)} + (x \rightleftharpoons y) \right\}$$

O termo $(x \rightleftharpoons y)$ é portanto idêntico ao primeiro, dando apenas um fator 2.

$$\langle \vec{p}' \vec{k}' | \vec{p} \vec{k} \rangle_{\vec{q}} = \pm (-ig)^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon} (2\pi)^8 \delta^4(-q + k' - k) \delta^4(q + p' - p) \bar{u}(p') u(p) \bar{u}(k) u(k) =$$

$$= (2\pi)^4 \delta^4(p' - p + k' - k) \frac{\mp i g^2}{q^2 - m^2} \bar{u}(p') u(p) \bar{u}(k) u(k)$$

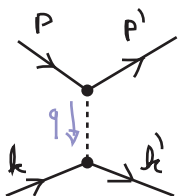
\rightarrow q não é mais a variável de integração, mas sim: $q = p - p' = k' - k$
 \rightarrow como $q^2 \neq m^2$ posso suprimir o "iε"

$$\langle \vec{p}' \vec{k}' \dots | \vec{p}, \vec{k} \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(k_A + k_B - \sum p_k) i \mathcal{M}(k_A, k_B \rightarrow p_k)$$

Comparando esta expressão com a equação 34.2, vemos que:

$$i \mathcal{M}(\vec{p} \vec{k} \rightarrow \vec{p}' \vec{k}') = \frac{\mp i g^2}{q^2 - m^2} \bar{u}(p') u(p) \bar{u}(k) u(k) \quad (\text{eq. 48.1})$$

Queremos ver como obter esta mesma expressão a partir do diagrama abaixo:



Os propagadores de férmions e escalares nós já conhecemos:

$$\overbrace{\psi(x)_\alpha \psi(y)_\beta} \Rightarrow \text{diagrama} = \frac{i(\not{p} + m)_{\alpha\beta}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

(importante atentar para índices espinoriais e direção do momento)

$$\overbrace{\phi(x)\phi(y)} \Rightarrow \text{diagrama} = \frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon}$$

(eq. 49.1)

e o vértice ficou bastante óbvio no cálculo acima:

$$= -i\gamma$$

(eq. 49.2)

As linhas externas são dadas pelas equações 47.1 e 47.2 e, uma vez que as exponenciais são integradas para obter a conservação de momento, resta apenas:

Linhas externas escalares

$$\overbrace{\langle q | \phi \rangle} \Rightarrow \text{diagrama} = 1 \quad \overbrace{\langle \phi | q \rangle} \Rightarrow \text{diagrama} = 1$$

(eq. 49.3)

Linhas externas fermiônicas

$$\overbrace{\psi_\alpha | \vec{p}, s \rangle} \Rightarrow \text{diagrama} = u^s(p)_\alpha \quad \overbrace{\langle \vec{p}, s | \bar{\psi}} \Rightarrow \text{diagrama} = \bar{u}^s(p)_\alpha$$

$$\overbrace{\bar{\psi} | \vec{p}, s \rangle} \Rightarrow \text{diagrama} = \bar{v}^s(p)_\alpha \quad \overbrace{\langle \vec{p}, s | \psi} \Rightarrow \text{diagrama} = v^s(p)_\alpha$$

antipartícula

(eq. 49.4)

Diversos detalhes merecem atenção: (que não foram evidenciados no diagrama que escolhemos para essa primeira olhada nas regras de Feynman para férmions)

O primeiro ponto é notar como as contrações dos índices espinoriais ocorre, ao longo das linhas fermiônicas:

$$\sim \bar{u}(p_3)_\alpha \frac{i(\not{p}_2 + m)_{\alpha\beta}}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i(\not{p}_1 + m)_{\beta\kappa}}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} u(p_0)_\alpha = \bar{u}(p_3)_\alpha \frac{i(\not{p}_2 + m)_{\alpha\beta}}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i(\not{p}_1 + m)_{\beta\kappa}}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} u(p_0)_\alpha$$

$$\sim \bar{v}(p_3)_\alpha \frac{i(\not{p}_2 + m)_{\alpha\beta}}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i(\not{p}_1 + m)_{\beta\kappa}}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} v(p_0)_\alpha = \bar{v}(p_3)_\alpha \frac{i(\not{p}_2 + m)_{\alpha\beta}}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i(\not{p}_1 + m)_{\beta\kappa}}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} v(p_0)_\alpha$$

$$\sim \left[\bar{v}(p_2) \cdot \frac{i(-\not{k}_1 + m)}{k_1^2 - m^2 + i\epsilon} \cdot v(p_3) \right] \left[\bar{u}(p_4) \cdot \frac{i(\not{k}_3 + m)}{k_3^2 - m^2 + i\epsilon} \cdot u(p_1) \right]$$

O segundo diz respeito ao sinal que ignoramos na pg 47. Além dos sinais proveniente do teorema de Wick, temos que adotar uma convenção para o sinal dos estados finais e iniciais:

$$|\vec{p}; \vec{k}\rangle \sim a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{k}}^{\dagger} |0\rangle$$

↳ (a menos da normalização, só estamos aqui interessados na ordem dos operadores de criação)

então:

$$(|\vec{p}; \vec{k}\rangle)^{\dagger} = \langle \vec{p}; \vec{k} | = \langle 0 | a_{\vec{k}} a_{\vec{p}} = - \langle 0 | a_{\vec{p}} a_{\vec{k}}$$

De forma que:

$$\begin{aligned} \overbrace{\Psi} |\vec{p}; \vec{k}\rangle &= e^{-i p x} \omega^s(p) |\vec{k}\rangle & \overbrace{\Psi} |\vec{p}; \vec{k}\rangle &= - e^{-i k x} \omega^s(k) |\vec{p}\rangle \\ \langle \vec{p}; \vec{k} | \overbrace{\Psi} &= e^{i p x} \overline{\omega^s(p)} \langle \vec{k} | & \langle \vec{p}; \vec{k} | \overbrace{\Psi} &= - e^{i k x} \overline{\omega^s(k)} \langle \vec{p} | \end{aligned}$$

voltando então às contrações das pgs 47-48:

$$\langle \vec{p}', \vec{k}' | (\overline{\Psi}_I \Psi_I)(x) (\overline{\Psi}_I \Psi_I)(y) | \vec{p}, \vec{k} \rangle_0 \sim \langle 0 | a_{\vec{k}'}^{\dagger} a_{\vec{p}'}^{\dagger} (\overline{\Psi}_I \Psi_I)(x) (\overline{\Psi}_I \Psi_I)(y) a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{k}}^{\dagger} | 0 \rangle \sim +$$

a segunda contração (trocando x ↔ y)

$$\langle \vec{p}', \vec{k}' | N [(\overline{\Psi}_I \Psi_I)(x) (\overline{\Psi}_I \Psi_I)(y)] | \vec{p}, \vec{k} \rangle_0 \sim \langle 0 | a_{\vec{k}'}^{\dagger} a_{\vec{p}'}^{\dagger} (\overline{\Psi}_I \Psi_I)(x) (\overline{\Psi}_I \Psi_I)(y) a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{k}}^{\dagger} | 0 \rangle \sim +$$

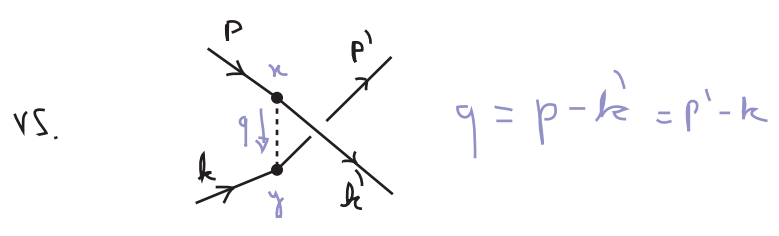
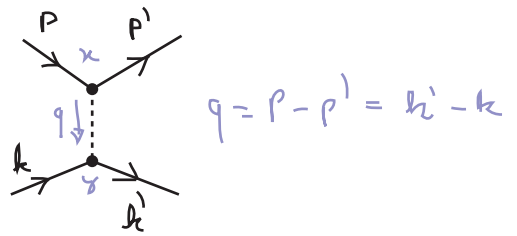
Mas há também mais duas contrações, uma delas é:

$$\langle \vec{p}', \vec{k}' | (\overline{\Psi}_I \Psi_I)(x) (\overline{\Psi}_I \Psi_I)(y) | \vec{p}, \vec{k} \rangle_0 \sim \langle 0 | a_{\vec{k}'}^{\dagger} a_{\vec{p}'}^{\dagger} (\overline{\Psi}_I \Psi_I)(x) (\overline{\Psi}_I \Psi_I)(y) a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{k}}^{\dagger} | 0 \rangle \sim -$$

e a outra é a troca x ↔ y desta.

Em termos de diagramas:

↳ (os termos que fazem x ↔ y já estão incluídos nestes diagramas, cancelando o fator 1/2 que vem da expansão da exponencial)

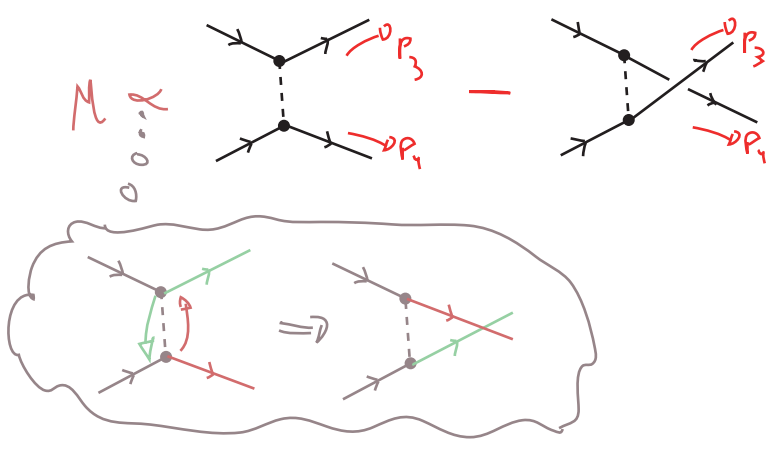


então, finalmente:

$$i\mathcal{M}(\vec{p}, \vec{k} \rightarrow \vec{p}', \vec{k}') = (-ig^2) \times \left(\bar{u}(p') \cdot u(p) \frac{1}{(p-p')^2 - m^2} \bar{u}(k') \cdot u(k) - \bar{u}(p') \cdot u(k) \frac{1}{(p'-k)^2 - m^2} \bar{u}(k') \cdot u(p) \right)$$

O que levará a uma interferência destrutiva entre os dois diagramas quando calculamos $|\mathcal{M}|^2$

Note que o sinal global não importa, mas sim o relativo entre diagramas, por isso raramente nos preocupamos com esta análise, nos limitando a notar que diagramas que difiram apenas pela troca de dois férmions finais vão ter um sinal relativo negativo. Exemplo:

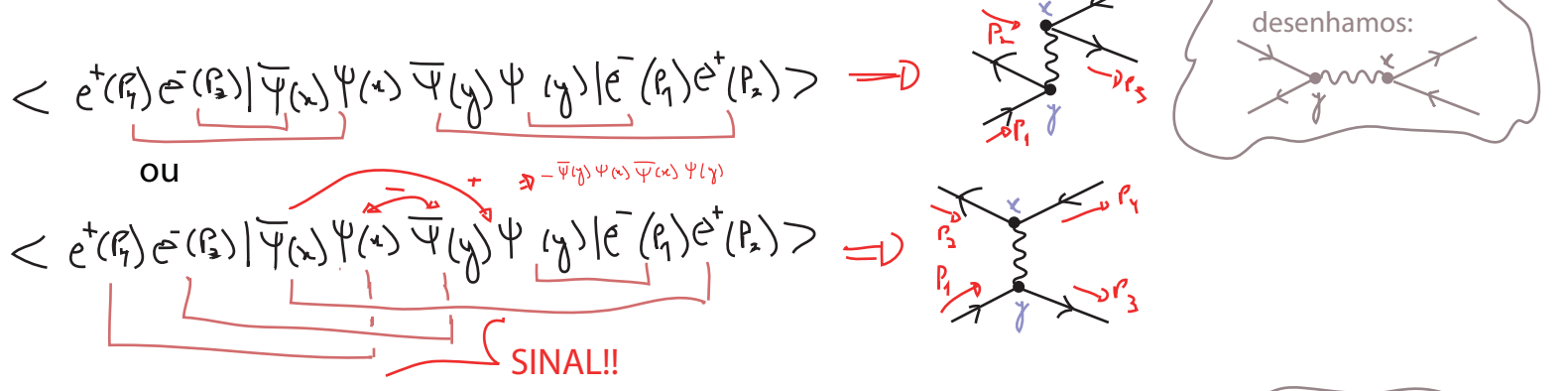


Isto fale também se trocamos linhas de férmions e anti-férmions, uma vez que são criados/aniquilados pelo mesmo campo. Note que (espalhamento Bhabha):

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow e^+e^-) \Rightarrow \langle e^-(p_2) e^+(p_1) | (\bar{\Psi} A_\mu \Psi)(x) (\bar{\Psi} A_\nu \Psi)(y) | e^-(p_1) e^+(p_2) \rangle$$

↗ aniquila e^+ , cria e^-
↘ aniquila e^- , cria e^+

este espalhamento pode ser obtido de dois jeitos:



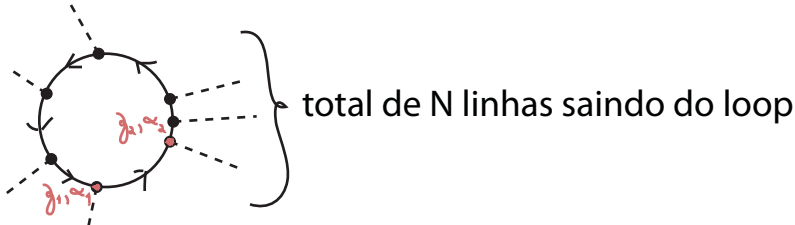
Então:



Finalmente, levando em conta que as contrações dos índices espinoriais acontece ao longo da linha fermiônica:

$$\dots (\bar{\Psi} \Psi)_\kappa (\bar{\Psi} \Psi)_\gamma (\bar{\Psi} \Psi)_\xi (\bar{\Psi} \Psi)_\omega \dots = \dots (+1) (\bar{\Psi} \Psi)_\kappa (\bar{\Psi} \Psi)_\xi (\bar{\Psi} \Psi)_\gamma (\bar{\Psi} \Psi)_\omega \dots = \dots S_F(\kappa - \gamma) S_F(\gamma - \xi) S_F(\xi - \omega) \dots$$

O que acontece quando fechamos um loop com férmions?



$$\sim (\bar{\Psi} \Psi)_{\alpha_N \alpha_1} (\bar{\Psi} \Psi)_{\alpha_{N-1} \alpha_2} \dots (\bar{\Psi} \Psi)_{\alpha_2 \alpha_3} (\bar{\Psi} \Psi)_{\alpha_1 \alpha_4} = (-1) (\Psi)_{\alpha_1 \beta_1} (\bar{\Psi} \Psi)_{\alpha_2 \beta_2} (\bar{\Psi} \Psi)_{\alpha_3 \beta_3} \dots (\bar{\Psi} \Psi)_{\alpha_{N-1} \beta_{N-1}} (\bar{\Psi} \Psi)_{\alpha_N \beta_N}$$

$$= (-1) S_F(\beta_1 - \beta_N)_{\alpha_1 \alpha_N} S_F(\beta_N - \beta_{N-1})_{\alpha_N \alpha_{N-1}} \dots S_F(\beta_3 - \beta_2)_{\alpha_3 \alpha_2} S_F(\beta_2 - \beta_1)_{\alpha_2 \alpha_1} =$$

$$= (-1) \text{Tr} [S_F S_F \dots S_F S_F]$$

Em suma:

(52.1)

Regras de Feynman para Yukawa

- (1) desenhar todos os diagramas conectados e amputados que contribuem para o espalhamento
- (2) escreva as funções dos propagadores (somente as linhas internas), conforme eqs. 49.1

(3) para cada vértice:

$$= -i g \quad (49.2)$$

(4) para as linhas externas: eqs 49.3 e 49.4 (com atenção do sinal relativo entre diagramas iguais sob a troca de ponto de inserção de linhas fermiônicas externas)

(5) imponha conservação de momento em cada vértice (re-escrevendo os momentos internos)

(6) integre sobre cada momento não determinado: $\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}$

(7) divida pelo fator de simetria

(8) multiplique por (-1) para cada loop fermiônico e faça a contração das linhas fermiônicas

(9) rigorosamente deveríamos multiplicar por $(2\pi)^4 \delta^4(\sum p_\alpha)$ mas se estivermos em busca de

$$i \mathcal{M} (2\pi)^4 \delta^4(\sum p_\alpha) = \left(\sum \text{diagramas conectados e amputados} \right) \times (\sqrt{Z})^{n+2} \quad (\text{eq. 194.1})$$

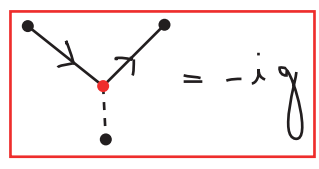
basta dividir o resultado do passo (8) por i para obter \mathcal{M} (veremos o que fazer com Z em TQCII, mas a nível árvore $Z = 1$)

Potencial de Yukawa

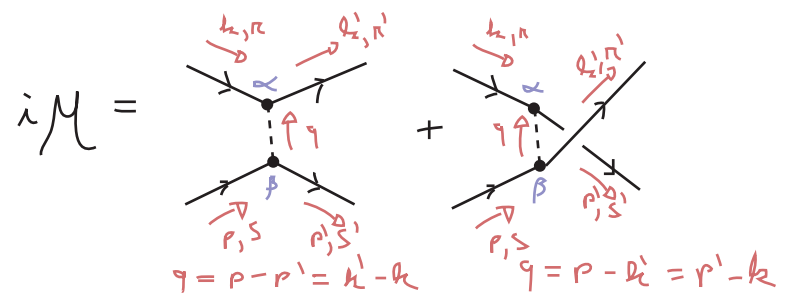
(Peskin 4.8)

Queremos ver se o potencial de Yukawa entre dois férmions é mesmo dado pela troca de um escalar, conforme a interação da pg 46 (teoria de Yukawa):

$$\mathcal{L}_Y^{(m)} = g \bar{\psi} \psi \phi$$



Para dois férmions idênticos interagindo, os dois diagramas em menor ordem de g que contribuem são:



Se não fossem idênticos poderíamos pegar só o primeiro, pois o momento estaria ligado a identidade do férmion, de fato é este caso que consideraremos. No limite não relativístico temos:

$$p \simeq (m, \vec{p}) \quad p' \simeq (m, \vec{p}') \quad k \simeq (m, \vec{k}) \quad k' \simeq (m, \vec{k}')$$

$$(p - p')^2 \simeq -|\vec{p} - \vec{p}'|^2 \ll 0 \quad \text{com } p^0 - p'^0 \simeq m - m$$

$$u^s(p) \simeq \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix} \quad \xi^s = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{u}^{s'}(p') u^s(p) = u^{s'} \gamma^0 u^s = m \begin{pmatrix} \xi^{s'+} & \xi^{s'+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix} = 2m \xi^{s'+} \xi^s$$

Isso nos permite escrever ambos os diagramas (lembre-se que só usaremos o primeiro):

$$i\mathcal{M} = (-ig) \bar{u}^{s'}(p')_\beta u^s(p)_\beta \frac{i}{(p-p')^2 - m_\phi^2} (-ig) \bar{u}^{s'}(k')_\alpha u^s(k)_\alpha$$

$$- (-ig) \bar{u}^{s'}(p')_\alpha u^s(k)_\alpha \frac{i}{(p-k')^2 - m_\phi^2} (-ig) \bar{u}^{s'}(k')_\beta u^s(p)_\beta$$

↑ sinal da troca de férmions no estado final

(eq. 53.1)

O que quer dizer que, para férmions distinguíveis no limite não relativístico:

$$i\mathcal{M} \simeq \frac{ig^2}{|\vec{p} - \vec{p}'|^2 + m_\phi^2} (2m \delta^{s's}) (2m \delta^{r'r})$$

(eq. 53.2)

Podemos comparar este resultado com a aproximação de Born para espalhamentos em mecânica quântica:

$$\langle \vec{p}' | i T | \vec{p} \rangle = -i V(\vec{q}) 2\pi \delta(E_{p'} - E_p) \quad (\text{eq. 54.1})$$

$$\vec{q} = \vec{p}' - \vec{p} \quad \text{momento transferido}$$

que é válido para potenciais fracos (o que condiz com nossa aproximação perturbativa - estamos pegando só os diagramas em ordem mais baixa [LO]) e espalhamentos onde o estado final é parecido com o inicial (espalhamento com ângulo pequeno, energia trocada bem menor que a energia incidente). Nosso resultado é mais geral que isso (vale para qualquer ângulo), mas deve valer neste limite em particular.

A comparação é delicada, pois usamos normalizações diferentes do que usualmente se faz em mecânica quântica (para obter objetos relativisticamente invariantes). O fator de $2m$ acompanhando cada linha fermiônica vem desta diferença de normalização, então devemos ignorá-lo na comparação.

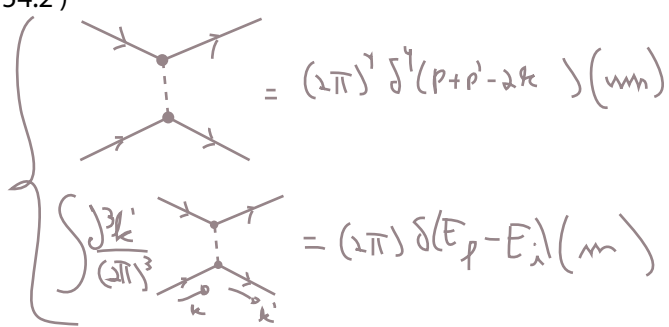
Outra sutileza vem do fato de que, na aproximação de Born, estamos assumindo que o momento do "centro espalhador" (o alvo), não muda, e temos só uma partícula inicial e uma final ($1 \rightarrow 1$). Isso quer dizer que: $\vec{p}^0 \neq \vec{p}^1$ ao passo que $E_{p^1} = E_{p^0}$ ($|\vec{p}^1| = |\vec{p}^0|$)

Nesse caso, definimos:

$$\langle \vec{p}' | i T | \vec{p} \rangle = i \mathcal{M} (2\pi) \delta(E_{p'} - E_p) \quad (\text{eq. 54.2})$$

(outra forma de ver isso é notar que, como não estamos observando o momento final do alvo, temos que integrar sobre k' :

$$\int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}' + \vec{k} - \vec{k}')$$



que absorve a delta nos momentos, deixando apenas a delta na energia):

Comparando 54.2 com 54.1 obtemos: $V(\vec{q}) = -\mathcal{M}$

e como (de novo, por conta da aproximação de Born), não há inversões de spin ($s' = s, r' = r$):

$$V(\vec{q}) = \frac{-g^2}{|\vec{q}|^2 + m_\phi^2} \quad (\text{eq. 54.3})$$

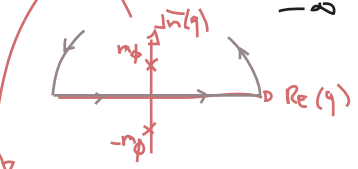
Para obter este potencial no espaço das posições fazemos:

$$V(\vec{x}) = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{-g^2}{|\vec{q}|^2 + m_\phi^2} e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} = \frac{-g^2}{(2\pi)^3} 2\pi \int_0^\infty q^2 dq \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{iqr} \frac{1}{q^2 + m_\phi^2} =$$

$$= \frac{-g^2}{4\pi^2 i r} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \frac{q e^{iqr}}{q^2 + m_\phi^2}$$

$r \equiv |\vec{x}|$
 $q \equiv |\vec{q}|$

$\int_0^\pi \sin(\theta) d\theta e^{iqr \cos \theta} = \int_0^1 d(\cos \theta) e^{iqr \cos \theta} = \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{iqr}$



$$V(\vec{x}) = \frac{-g^2}{4\pi^2 i r} (2\pi i) \left(\frac{e^{-m_\phi r}}{2im} \right) = \frac{-g^2}{4\pi r} e^{-m_\phi r} \quad (\text{eq. 54.4})$$

que é o potencial atrativo de Yukawa.

Regras de Feynman para QED

(Nastase 16, Peskin 4.8 e 9.4, Ryder 7.1)

Queremos agora abordar a versão quântica do eletromagnetismo e, para tanto, precisamos quantizar o campo do fóton. Começemos a discussão escolhendo qual fixação de Gauge será mais conveniente para a quantização da teoria. A equação de movimento clássica:

$$\square A^\nu - \partial^\nu (\partial^\mu A_\mu) = 0$$

é bastante difícil de resolver, no **Gauge de Lorenz** (proposta por Ludvig Lorenz que não é o Hendrik Lorentz) ou **Gauge Covariante** a solução é bem mais simples:

Gauge Covariante

$$\partial^\mu A_\mu = 0 \quad (\text{eq. 55.1})$$

$$\square A_\mu = 0 \quad (\text{Klein-Gordon, para } m=0)$$

$$A_\mu \sim \epsilon_\mu(k) e^{\pm i k \cdot x}$$

o coeficiente carrega o índice vetorial e a informação sobre o momento angular (spin / polarização)

$$k^2 = 0 \quad (\text{pois a massa é zero na eq. KG})$$

$$\partial^\mu A_\mu(x) = 0 \Rightarrow \int d^4x e^{-i p \cdot x} \partial^\mu A_\mu(x) = 0$$

$$\int d^4x e^{-i p \cdot x} \int \frac{d^4k}{N_k} \epsilon_\mu(k) e^{\pm i k \cdot x} = 0$$

$$\int \frac{d^4k}{N_k} k^\nu \cdot \epsilon_\mu(k) \delta^4(p \pm k) = 0 \Rightarrow \boxed{\pm p^\mu \epsilon_\mu(\pm p) = 0} \quad (\text{eq. 55.2})$$

esta fixação, no entanto, não fixa completamente o Gauge. Note que, dadas duas configurações de campo fisicamente equivalentes, ligadas pela transformação de Gauge a seguir:

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \lambda \quad \text{com} \quad \square \lambda = 0$$

ambas podem satisfazer a condição de fixação (sem exigir $A = A'$): $\partial^\mu A'_\mu = \partial^\mu A_\mu = 0$

Poderíamos aprimorar a nossa fixação exigindo também

$$\boxed{A_0 = 0} \quad (\text{eq. 55.3})$$

(ainda mantendo a condição 55.1)

$$\text{o que equivale a: } \partial_0 \lambda = -A_0$$

E não causa nenhum problema com a condição 55.1, uma vez que:

$$\square A_0 = 0 \Rightarrow \square \partial_0 \lambda = 0 \Rightarrow \partial_0 \square \lambda = 0$$

↳ $\square \lambda = 0$ já era permitido

A combinação de 55.1 e 55.3 nos leva a:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0} \quad (\text{eq. 55.4})$$

Note que esta condição não é condizente com a presença de correntes (fontes) externas, que produziriam um $A_0 \neq 0$, portanto este formalismo só é útil para radiação no vácuo. Em suma, usaremos:

$$A_0 = 0 \quad \& \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (\text{eq. 56.1})$$

Gauge de Radiação ou de Coulomb

$$\dots \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_0(p) = 0 \\ 55.2 \rightarrow \vec{p} \cdot \vec{\epsilon}^{(\lambda)}(p) = 0 \end{array} \right.$$

Sabemos do eletromagnetismo que, neste Gauge, só temos dois modos que se propagam no campo, correspondendo a duas polarizações transversais. Por isso ele é um **Gauge Físico**.

A solução clássica é:

$$\vec{A}(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_k}} \sum_{\lambda=1,2} \vec{\epsilon}^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \left[a^{(\lambda)}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + a^{(\lambda)\dagger}(\mathbf{k}) e^{+i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right] \quad (\text{eq. 56.2})$$

$$k^2 = 0 \quad \vec{k} \cdot \vec{\epsilon}^{(\lambda)}(\mathbf{k}) = 0$$

É também conveniente escolher os dois **vetores de polarização** $\vec{\epsilon}^{(\lambda)}$ de forma que sejam ortogonais:

$$\vec{\epsilon}^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \cdot \vec{\epsilon}^{(\lambda')}(\mathbf{k}) = \delta^{\lambda\lambda'} \quad (\text{eq. 56.3})$$

Quantização no Gauge Físico:

(não explicitaremos todos os detalhes, ver: Bjorken & Drell, "Relativistic Quantum Fields", cap 14)

Queremos agora impor as condições 56.1 uma vez que o campo tenha se tornado um operador. A condição para o componente zero é trivial, estamos de fato removendo um grau de liberdade do sistema, já a condição $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ deve ser vista como uma condição para operadores. Ou seja:

$$\vec{\nabla} \cdot \langle \vec{A} \rangle = 0 \quad \& \quad \vec{\nabla} \cdot [\vec{A}, \hat{\phi}] = 0$$

Note então que, definindo o momento conjugado: $\pi^i = F^{0i} = E^i$

Poderíamos, inocentemente, impor:

$$[A^i(\vec{x}, t), E^j(\vec{x}', t)] = i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \delta^{ij} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} = i \delta^{ij} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$$

Mas veja que, se aplicamos $\vec{\nabla}_{x_i}$ neste comutador NÃO temos: $\vec{\nabla} \cdot [A^i(\vec{x}, t), E^j(\vec{x}', t)] = 0$

$$\vec{\nabla}_{x_i} [A^i(\vec{x}, t), E^j(\vec{x}', t)] = i \frac{\partial}{\partial x^i} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \delta^{ij} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} = - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} k_j e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}$$

A lição aqui é que vínculos (e a fixação de Gauge é um vínculo sobre as variáveis dinâmicas do sistema) tornam a prescrição de quantizar simplesmente trocando os brackets de Poisson por comutadores (ou anticomutadores) inválida. Dirac achou uma forma de generalizar a prescrição para sistemas com vínculo mas não exploraremos isto aqui (veja as notas do prof. Nastase lec 15 e a referência lá dada para o original de Dirac), para nossos fins basta notar que a generalização:

$$\delta^{ij} \rightarrow \Delta^{ij} = \left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{k^2} \right) \quad (\text{eq. 56.4})$$

Fornece a seguinte relação de comutação:

$$\begin{aligned}
 [A^i(\vec{x}, t), E^j(\vec{x}', t)] &= i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Delta^{ij} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} = i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{k^2} \right) e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} \\
 &= i \left(\delta^{ij} - \frac{\partial^i \partial^j}{(\nabla^2)} \right) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')
 \end{aligned}$$

que, por sua vez, satisfaz $\vec{\nabla} \cdot [\vec{A}, E^i] = 0$ uma vez que $[A, A] = [E, E] = 0$

$$k_i \Delta^{ij} = k_j - k_i \frac{k^i k^j}{k^2} = 0$$

Substituindo a decomposição de A no comutador acima obtemos a relação usual:

$$[a^{(\lambda)}(k), a^{(\lambda')\dagger}(k')] = (2\pi)^3 \delta_{\lambda\lambda'} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \quad (\text{eq. 57.1})$$

$$[a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0$$

$$H = \frac{1}{2} \int d^3k (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k^0}{2} [a^{(\lambda)\dagger}(k) a^{(\lambda)}(k) + a^{(\lambda)}(k) a^{(\lambda)\dagger}(k)]$$

$$:H: = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} k^0 a^{(\lambda)\dagger}(k) a^{(\lambda)}(k) \quad (\text{eq. 57.2})$$

Esta escolha de Gauge é conveniente pois só temos dois graus de liberdade, que coincidem com os graus físicos. No entanto a invariância de Lorentz explícita está perdida, e para ter certeza de que correções quânticas (loops) não a quebram seria necessário testá-la explicitamente a cada passo da teoria de perturbação. Uma alternativa a isto seria escolher o Gauge Covariante (que mantém a estrutura de Lorentz explícita) e pagar o preço de ter polarizações não físicas na teoria, é o que faremos a seguir.

Quantização no Gauge Covariante

(mais detalhes: Mandl e Shaw, secs 5.1 e 5.2)

Neste caso, a única condição de fixação é: $\partial_{\mu} A^{\mu} = 0$

A solução clássica é:
$$A_{\mu} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_k}} \sum_{\lambda=0}^3 \epsilon_{\mu}^{(\lambda)}(k) \left[a^{(\lambda)}(k) e^{-ikx} + a^{(\lambda)\dagger}(k) e^{+ikx} \right]$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{4 polarizações}}$ $k^2 = 0 \rightarrow E_k = k$

Podemos escolher um sistema de coordenadas tomando o 3 eixo na direção de k: $k^{\mu} = (k, 0, 0, k)$

e mais uma vez construir polarizações ortogonais:

$$E_{\mu}^{(0)} = (1, 0, 0, 0) \quad E_{\mu}^{(1)} = (0, 1, 0, 0) \quad E_{\mu}^{(2)} = (0, 0, 1, 0) \quad E_{\mu}^{(3)} = (0, 0, 0, 1)$$

$$\therefore E_{\mu}^{(\lambda)} = \delta_{\mu}^{\lambda} \quad E^{(\lambda)} \cdot E^{(\lambda')} = E_{\mu}^{(\lambda)} E_{\nu}^{(\lambda')} g^{\mu\nu} = g^{\lambda\lambda'} \rightarrow E_{\mu}^{(\lambda)} E_{\nu}^{(\lambda')} g^{\lambda\lambda'} = g^{\mu\nu}$$

$\lambda = 1, 2 \rightarrow k^{\mu} E_{\mu}^{(\lambda)} = 0$ ✓ Polarizações transversas são físicas

$\lambda = 0, 3 \rightarrow k^{\mu} E_{\mu}^{(\lambda)} = E_{\mu} \quad \times$ Polarizações tipo-tempo ($\lambda = 0$) e longitudinal ($\lambda = 3$) não são físicas

isso quer dizer que, quando forçarmos a condição $\partial^{\mu} A_{\mu} = 0$ em termos de observáveis, os modos tipo-tempo e longitudinal devem se cancelar.

Mais uma vez temos que modificar o jeito de quantizar para levar o vínculo da fixação de Gauge em conta, neste caso trocaremos a imposição forte de que:

$$[\partial_{\mu} A^{\mu}(x), A^{\nu}(x')] = 0$$

que é impossível de satisfazer com a expansão de A dada acima, por uma condição imposta apenas sobre a parte de aniquilação da expansão:

$$\int d^3x \partial_{\mu} A^{\mu(+)}(x) |\Psi\rangle = 0 \quad (\text{eq. 58.1})$$

Condição de Gupta-Bleuler

$$A_{\mu}^{(+)} \equiv \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_k}} \sum_{\lambda=0, \dots, 3} \vec{E}^{(\lambda)}(k) \alpha^{(\lambda)}(k) e^{-ik \cdot x}$$

Que também implica:

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \Psi | \partial^{\mu} A_{\mu}^{(-)}(x) = 0 \\ A_{\mu}^{(-)} \equiv \dots \alpha^{(\lambda)+}(k) e^{+ik \cdot x} \\ \langle \Psi | \partial^{\mu} A_{\mu} | \Psi \rangle = \langle \Psi | \partial^{\mu} A_{\mu}^{(-)} + \partial^{\mu} A_{\mu}^{(+)} | \Psi \rangle = 0 \end{array} \right.$$

O que estamos fazendo na prática é colocar uma restrição nos estados iniciais e finais permitidos pela teoria. A quantização é dada por:

$$[A_{\mu}(\vec{x}, t), \tilde{\pi}_{\nu}(\vec{x}', t)] = i g_{\mu\nu} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \quad [A, A] = [\tilde{\pi}, \tilde{\pi}] = 0$$

Note que temos um problema aí, pois $\tilde{\pi}_0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^0} = \frac{\partial}{\partial \dot{A}^0} \left[-\frac{1}{4} (\partial_{\lambda} A_{\sigma} - \partial_{\sigma} A_{\lambda}) (\partial^{\lambda} A^{\sigma} - \partial^{\sigma} A^{\lambda}) \right] = 0$

Portanto não há como a relação de comutação acima valer para A_0 e π_0 , a não ser que modifiquemos a Lagrangeana - existe uma forma de fazer isso sem mudar as equações de movimento, que

não exploraremos aqui, uma vez que este procedimento é muito mais direto via integrais de trajetória, o que faremos mais tarde (veja Mandl e Shaw para a história completa). Assumindo que este problema foi resolvido, podemos obter relações de comutação para os operadores de criação e aniquilação:

$$\boxed{[\alpha^{(\lambda)}(k), \alpha^{(\lambda')\dagger}(k')] = -g^{\lambda\lambda'} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}')} \quad (\text{eq. 59.1})$$

$$[\alpha, \alpha] = [\alpha^+, \alpha^+] = 0$$

O que está bem para $\lambda = 1, 2$ e 3 , mas:

$$\lambda = 0 \Rightarrow [\alpha^{(0)}(k), \alpha^{(0)\dagger}(k')] = -(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}')$$

O que leva a uma norma negativa para $\alpha^\dagger|0\rangle$ pois:

$$\|\alpha^\dagger|0\rangle\|^2 \equiv \langle 0|\alpha\alpha^\dagger|0\rangle = -\langle 0|\alpha^\dagger\alpha|0\rangle = -\langle 0|0\rangle = -1$$

Reforçando o fato de que estes estados não podem ser físicos. A condição de Gupta-Bleuler diz que:

$$\partial^\mu A_\mu^{(+)}(x)|\psi\rangle = 0$$

$$\hookrightarrow \sum_{\lambda=0\dots 3} \int d^3k \epsilon_\mu^{(\lambda)}(k) \alpha^{(\lambda)}(k) |\psi\rangle = 0 \quad \rightarrow \left[\underbrace{\int d^3k \epsilon_\mu^{(0)}(k) \alpha^{(0)}(k)}_{E_k} + \underbrace{\int d^3k \epsilon_\mu^{(3)}(k) \alpha^{(3)}(k)}_{E_k} \right] |\psi\rangle = 0$$

$$k^\mu \epsilon_\mu^{(1)} = k^\mu \epsilon_\mu^{(2)} = 0$$

$$\boxed{[\alpha^{(0)}(k) + \alpha^{(3)}(k)] |\psi\rangle = 0} \quad (\text{eq. 59.2})$$

Esta equação deve ser verdade para qualquer estado ψ , e portanto é uma condição que restringe os estados físicos possíveis. Um exemplo de estado que satisfaz esta restrição é:

$$|\psi\rangle = (\alpha^{(0)\dagger}(k) + \alpha^{(3)\dagger}(k)) |0\rangle$$

$$[\alpha^{(0)}(k) + \alpha^{(3)}(k)] (\alpha^{(0)\dagger}(k) + \alpha^{(3)\dagger}(k)) |0\rangle = \left[\underbrace{[\alpha^{(0)}(k), \alpha^{(0)\dagger}(k)]}_{-(2\pi)^3 \delta} + \underbrace{[\alpha^{(3)}(k), \alpha^{(3)\dagger}(k)]}_{+(2\pi)^3 \delta} \right] |0\rangle = 0$$

Podemos mostrar que o mesmo é verdade para qualquer estado que tenha o mesmo número de excitações com as polarizações (0) e (3). O resultado final é que, neste Gauge, a contribuição destas duas polarizações não-físicas se cancelam no cálculo de todos os observáveis. A energia, por exemplo, é dada por:

$$\langle \psi | H | \psi \rangle = \int d^3k \, k^0 \sum_{\lambda=0,1,2,3} \xi_\lambda \langle \psi | \alpha^{(\lambda)\dagger} \alpha^{(\lambda)} | \psi \rangle$$

$$\boxed{\xi_0 = -1 \quad \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 1}$$

$$59.2 \rightarrow \langle \psi | [\alpha^{(0)\dagger}(k) + \alpha^{(3)\dagger}(k)] = 0$$

isso quer dizer que (simplificando a notação):

$$\alpha^{(0)\dagger}(k) \equiv 0^+ \quad \alpha^{(3)\dagger}(k) \equiv 3^+$$

$$\begin{aligned} \langle \psi | (0^+ + 3^+) 0 | \psi \rangle &= \langle \psi | (0^+ + 3^+) 3 | \psi \rangle = \langle \psi | 0^+ (0 + 3) | \psi \rangle = \langle \psi | 3^+ (0 + 3) | \psi \rangle = 0 \\ - \langle \psi | (0^+ + 3^+) 0 | \psi \rangle + \langle \psi | (0^+ + 3^+) 3 | \psi \rangle - \langle \psi | 0^+ (0 + 3) | \psi \rangle + \langle \psi | 3^+ (0 + 3) | \psi \rangle &= 0 \\ \langle \psi | -0^+ 0 - \cancel{3^+ 0} + \cancel{0^+ 3} + 3^+ 3 - 0^+ 0 - \cancel{0^+ 3} + \cancel{3^+ 0} + 3^+ 3 | \psi \rangle &= 0 \end{aligned}$$

$$\langle \psi | \alpha^{(3)\dagger}(k) \alpha^{(3)}(k) - \alpha^{(0)\dagger}(k) \alpha^{(0)}(k) | \psi \rangle = 0$$

Portanto a energia pode ser escrita como:

$$\langle \psi | H | \psi \rangle = \int d^3k \ k^0 \sum_{\lambda=1,2} \langle \psi | \alpha^{(\lambda)\dagger} \alpha^{(\lambda)} | \psi \rangle \quad (\text{eq. 60.1})$$

↳ só as polarizações transversais contribuem

O propagador do fóton

Com as definições acima, fica fácil calcular o propagador do fóton:

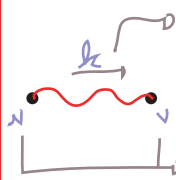
$$\begin{aligned} \langle 0 | A_\mu(x) A_\nu(y) | 0 \rangle &= \langle 0 | (A_\mu^+(x) + A_\mu^-(x)) (A_\nu^+(y) + A_\nu^-(y)) | 0 \rangle = \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2|\vec{p}|}} \sum_{\lambda=0}^3 \epsilon_\mu^\lambda e^{-ipx} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2|\vec{k}|}} \sum_{\lambda'=0}^3 \epsilon_\nu^{\lambda'} e^{iky} \underbrace{\langle 0 | \alpha_{\vec{p}}^\lambda \alpha_{\vec{k}}^{\lambda'} | 0 \rangle}_{-\delta^{\lambda\lambda'} \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{k})} = \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2|\vec{p}|} e^{-ip(x-y)} (-g_{\mu\nu}) \end{aligned}$$

De forma que:

$$G_{\mu\nu}(x-y) \equiv \langle 0 | T \{ A_\mu(x) A_\nu(y) \} | 0 \rangle = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} e^{-iq(x-y)} \quad (\text{eq. 60.2})$$

Assim, temos a nova regra:

o sentido do momento não importa (Gauge de Lorenz / Feynman)



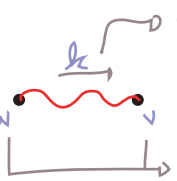
$$= \frac{-i g_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}$$

índices de Lorentz

(eq. 60.3)

Em um Gauge geral, ficaria:

o sentido do momento não importa



$$= \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} \left(g_{\mu\nu} - (1-\alpha) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + i\epsilon} \right)$$

índices de Lorentz

(eq. 60.4)

$\alpha = 0 \rightarrow \int -\frac{1}{\partial x} (\partial_\nu A^\mu)^2$
 Lorenz: $\partial_\nu A^\mu = 0$ \rightarrow Feynman: $\alpha = 1$
 \rightarrow Landau: $\alpha = 0$

No caso das linhas externas, temos que assumir que os estados iniciais tem apenas as polarizações físicas (mais tarde provaremos que é impossível produzir os estados não físicos):

$\lambda = 1 \text{ ou } 2$
(polarizações físicas)

$$A_\mu(x) |\vec{p}, \lambda\rangle = A_\mu(x) \frac{1}{\sqrt{2|\vec{p}|}} a_p^{\lambda\dagger} |0\rangle$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2|\vec{k}|}} \sum_{\lambda'=0}^3 \epsilon_{\mu}^{\lambda'} a_{\vec{k}}^{\lambda'} e^{-ikx} \frac{1}{\sqrt{2|\vec{p}|}} a_p^{\lambda\dagger} |0\rangle$$

$$= e^{-ipx} \sum_{\lambda'=1}^2 (-g^{\lambda\lambda'}) \epsilon_{\mu}^{\lambda'} |0\rangle = \epsilon_{\mu}^{\lambda} e^{-ipx} |0\rangle$$

$$\underbrace{A_\mu(\vec{p})} = \epsilon_{\mu}(\vec{p}) e^{-ipx} |0\rangle$$

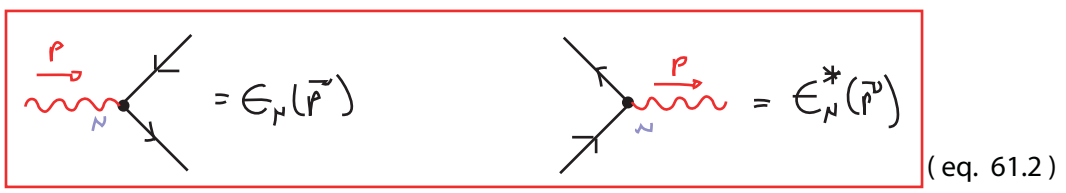
$$\underbrace{\langle \vec{p} | A_\mu} = \epsilon_{\mu}^*(\vec{p}) e^{ipx} \langle 0|$$

na pg 58 escolhemos ϵ real, que é útil para polariz. transversa. Para polarizações horárias ou anti-horárias seria mais conveniente tomar ϵ complexo

$$\epsilon^\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, \pm i, 0)$$

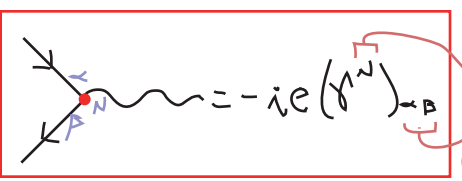
(eq. 61.1)

de forma que as regras para linhas externas ficam:



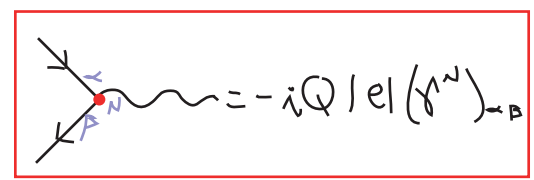
Do Hamiltoniano de interação podemos ler o vértice:

$$H_{int} = \int d^3x e^{-i\psi} \gamma^\mu_{\alpha\beta} \psi A_\mu \quad (\text{índices de Lorentz e Espinor contraídos})$$



note que os índices nos vértices tem que estar contraídos com os índices das linhas externas ou propagadores que entram neles

(eq. 61.3)



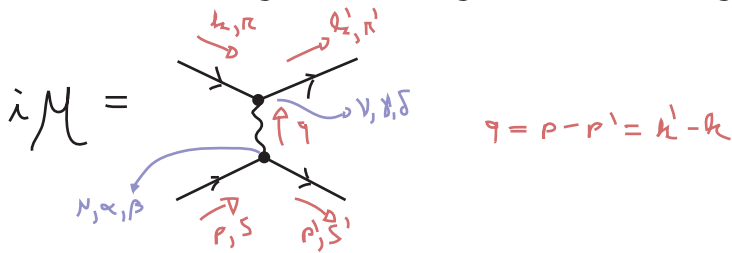
para um férmion genérico de carga Q: elétron $\rightarrow Q = -1$
quark u $\rightarrow Q = 2/3$
quark d $\rightarrow Q = -1/3$

(eq. 61.4)

Podemos agora incluir as regras 60.3 (propagador do fóton), 61.2, 61.3 e 61.4 ao quadro 52.1 para descrever férmions que têm interação de Yukawa, eletromagnéticas ou ambas (porque não?)

Potencial de Coulomb

Seguimos a mesma lógica acima, agora temos o diagrama:



$$i\mathcal{M} = \bar{u}^{\beta}(p')_{\alpha} (-ie \gamma_{\alpha\beta}^N) u^{\alpha}(p)_{\beta} \frac{-i g^{\mu\nu}}{(p-p')^2} \bar{u}^{\mu}(k')_{\gamma} (-ie \gamma_{\gamma\delta}^N) u^{\nu}(k)_{\delta}$$

No limite não relativístico:

$$\bar{u}^{\beta}(p') \gamma^0 u^{\alpha}(p) = m \begin{pmatrix} \xi^{\beta\dagger} & \xi^{\alpha\dagger} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^{\alpha} \\ \xi^{\beta} \end{pmatrix} = 2m \delta^{\beta\alpha}$$

$$\bar{u}^{\beta}(p') \gamma^i u^{\alpha}(p) = m \begin{pmatrix} \xi^{\beta\dagger} & \xi^{\alpha\dagger} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^{\alpha} \\ \xi^{\beta} \end{pmatrix} = 0$$

e obtemos:

$$i\mathcal{M} = \frac{-ie^2 g_{00}}{|\vec{p}-\vec{p}'|^2} (2m \delta^{\beta\alpha}) (2m \delta^{\mu\nu}) = -\frac{ie^2}{|\vec{p}'-\vec{p}|^2} (2m \delta^{\beta\alpha}) (2m \delta^{\mu\nu})$$

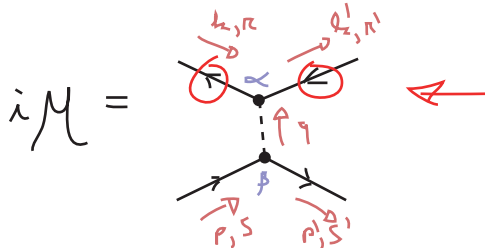
$$\boxed{V(q) = + \frac{e^2}{|\vec{q}|^2}} \quad (\text{eq. 62.1})$$

que é muito parecida com o potencial de Yukawa da eq. 54.3 (salvo o sinal e o fato de não termos massa). Portanto ao invés de fazer a transformada de Fourier de novo, basta inverter o sinal e fazer $m = 0$ em 54.4:

$$\boxed{V(r) = \frac{\pm e^2}{4\pi r} \equiv \frac{\alpha}{r}} \quad (\text{eq. 62.2}) \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137}$$

Potencial Partícula-Antipartícula

O que acontece se substituirmos um dos férmions por sua antipartícula? Começemos com a interação de Yukawa:



$$\bar{u}^{\mu}(k') u^{\nu}(k) \rightarrow \bar{v}^{\mu}(k) v^{\nu}(k') = m \begin{pmatrix} \xi^{+\mu} & -\xi^{+\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^{\nu} \\ -\xi^{\mu} \end{pmatrix} = -2m \delta^{\mu\nu}$$

no entanto usando: $|p, k\rangle = a_p^+ b_{-k}^+ |0\rangle$ $\langle p', k'| = \langle 0| b_k a_{p'}$ mudança de sinal

$$\langle p', k' | \bar{\Psi} \Psi \bar{\Psi} \Psi | p, k \rangle = \langle 0 | b_k a_{p'} (\bar{\Psi} \Psi)(z_2) (\bar{\Psi} \Psi)(z_1) a_p^+ b_{-k}^+ | 0 \rangle$$

Para "desentrelaçar" as contrações preciso fazer um número ímpar de permutações, que não tínhamos no caso só com partículas:

$$\langle 0 | a_k a_p (\bar{\psi} \psi)(y_2) (\bar{\psi} \psi)(y_1) a_p^+ a_k^+ | 0 \rangle$$

o que produz mais um sinal. A conclusão é que o potencial de Yukawa é atrativo mesmo neste caso.

No caso do potencial de Coulomb também temos este segundo fator (-1) advindo da ordem dos operadores fermiônicos, no entanto a troca de "u" por "v" resulta em:

$$\bar{u}^s(p') \not{\epsilon} u^s(p) = 2m \delta^{ss'} \Rightarrow \bar{v}^s(k) \not{\epsilon} v^{s'}(k) = m (\not{\epsilon}^+ - \not{\epsilon}^+) \begin{pmatrix} \not{\epsilon}^+ \\ -\not{\epsilon}^+ \end{pmatrix} = 2m \delta^{ss'}$$

ou seja, não há mudança aqui. Logo temos um sinal total de diferença, de forma que o potencial entre partícula e anti-partícula é atrativo.

Espalhamento Rutherford

Vamos calcular agora a seção de choque de espalhamento de um elétron por um campo elétrico gerado por um núcleo atômico (não estamos considerando o núcleo dinamicamente, assumimos que ele é infinitamente mais pesado que o elétron e seu único papel vai ser produzir o campo). A Hamiltoniana de interação é:

$$H_I = \int d^3x e \bar{\psi} \not{A} \psi$$

A primeira contribuição perturbativa para a parte não trivial da matriz S, de ordem e, é dada por (eq. 40.2):

$$\langle p' | iT | p \rangle = \langle p' | T \left\{ e^{-i \int H_I dt} \right\} | p \rangle = \dots + \langle p' | T \left\{ -i \int d^4x \bar{\psi} e \not{A} \psi \right\} | p \rangle + \dots =$$

Note que não tenho fótons no estado inicial nem no final, e não estou contraindo A_μ com nada (se tratasse A como operador isto daria zero) - estamos tratando A como um campo clássico

$$\stackrel{\mathcal{O}(e)}{=} -i e \bar{u}(p') \not{\epsilon} u(p) \int d^4x e^{-i p' x} e^{+i p x} A_\mu(x) = -i e \bar{u}(p') \not{\epsilon} u(p) A_\mu(p' - p) \quad (\text{eq. 63.1})$$

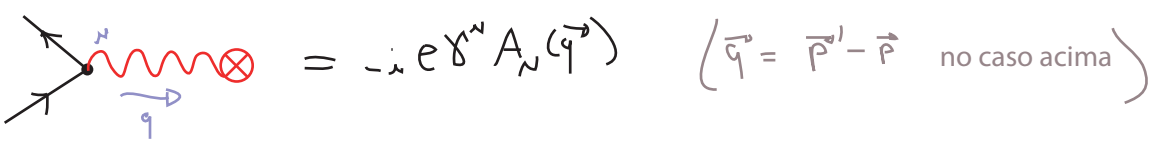
Se tomarmos a função $A_\mu(x)$ como independente do tempo, a sua transformada de Fourier vai ter uma delta de Dirac na energia:

$$A_\mu(p' - p) = A_\mu(\vec{p}' - \vec{p}) 2\pi \delta(\epsilon_{p'} - \epsilon_p)$$

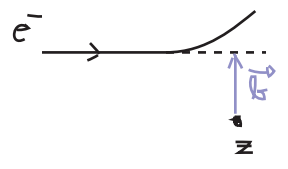
E, assim como na eq. 54.2, temos:

$$\langle p' | iT | p \rangle = i M(i\pi) \delta(\epsilon_{p'} - \epsilon_p)$$

Vemos que o efeito do campo externo pode ser codificado em uma nova regra de Feynman:



Queremos então calcular o espalhamento:



Que é um espalhamento 2 → 2 onde, no entanto, estamos olhando apenas uma das partículas. Assim como antes, temos:

$$dP(i \rightarrow f) = \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 2E_f} |_{\text{OUT}} \langle p_f | \phi_A \rangle_{\text{IN}}|^2$$

$$d\sigma = \int d^3 \vec{k} \, dP(\vec{k}) = \int d^3 k \underbrace{\frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 2E_f}}_{(2\pi)^{-6}} \underbrace{\int \frac{d^3 k_i \phi(k_i)}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_i}}}_{(2\pi)^{-6}} \underbrace{\int \frac{d^3 \bar{k}_i \phi(\bar{k}_i)}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_i}}}_{(2\pi)^{-6}} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{k}_i - \vec{k}_i)} \times \underbrace{\langle p_f | k_i \rangle_{\text{IN}}}_{(2\pi)^{-3}} \underbrace{\langle p_f | \bar{k}_i \rangle_{\text{IN}}^*}_{(2\pi)^{-3}}$$

Dado que: $\langle p_f | k_i \rangle_{\text{IN}} = i \mathcal{M} \underbrace{2\pi}_{(2\pi)^3} \delta(E_f - E_i)$
 $\langle p_f | \bar{k}_i \rangle_{\text{IN}}^* = -i \mathcal{M}^* \underbrace{2\pi}_{(2\pi)^3} \delta(E_f - E_i)$

$$\int d^3 k \, e^{i\vec{k} \cdot (\vec{k}_i - \vec{k}_i)} = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k}_i - \vec{k}_i)$$

$$\delta(E_f - E_i) \delta(E_f - E_i) = \delta(E_f - E_i) \frac{\delta(\vec{k}_i^z - k_i^z)}{\left| \frac{\vec{k}_i^z}{E_i} \right|} \quad \times \mathcal{M}(p_i \rightarrow p_f)$$

$$\int \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 2E_f} \underbrace{2\pi}_{(2\pi)^3} \delta(E_f - E_i) = d\Omega \int \frac{dp_r p_r^2}{8\pi^2 \cancel{E_f} \cancel{p_r}} \delta(p_f - p_i) = \frac{d\Omega}{8\pi} \int dp_r p_r \delta(p_f - p_i)$$

Mais uma vez assumimos que: $|\phi(k_i)|^2 = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k}_i - \vec{p}_i)$ → cancela o que ainda tinha de potência de 2π por aí

$$\therefore \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{v_i E_i} \int dp_r p_r \delta(p_f - p_i) |\mathcal{M}(p_i \rightarrow p_f)|^2$$

$\left| \frac{k_i^z}{E_i} \right| (\sqrt{2E_i})^2 \rightarrow |k_i^z|$ $E_i \approx m$

No caso de um núcleo de carga Z e teremos: $A_0(\vec{r}) = + \frac{Ze}{4\pi r} \longrightarrow A_0(\vec{q}) = \frac{Ze}{|\vec{q}|^2}$

$$i\mathcal{M} = -ie \bar{u}(p_f) \gamma^\mu u(p_i) A_\mu(\vec{p}_f - \vec{p}_i) = -ie^2 \frac{\bar{u}(p_f) \gamma^0 u(p_i)}{|\vec{p}_f - \vec{p}_i|^2}$$

No limite não relativístico, como já vimos:

$$\bar{u}^{s'}(p_f) \gamma^0 u^s(p_i) = 2m \delta^{ss'}$$

$$\bar{u}^{s'}(p_f) \gamma^0 u^s(p_i) = \bar{u}^{s'}(p_f) \gamma^0 (\gamma^0)^\dagger u^s(p_i) = \bar{u}^{s'}(p_f) \gamma^0 (\gamma^0) u^s(p_i) = \bar{u}^{s'}(p_f) \delta^0 u^s(p_i)$$

$$\therefore |iM|^2 = Z^2 e^4 \frac{4m^2 \delta^{ss'} \delta^{s's'}}{|\vec{p}_f - \vec{p}_i|^4} = Z^2 e^4 \frac{\bar{u}^{s'}(p_f) \gamma^0 u^s(p_i) \bar{u}^{s'}(p_i) \gamma^0 u^s(p_f)}{|\vec{p}_f - \vec{p}_i|^4}$$

Temos que tirar a média sobre spins iniciais e somar sobre os finais (já que não estamos considerando feixes polarizados nem observando a polarização final, veremos uma justificativa para isso em seguida):

$$\frac{1}{2} \sum_{ss'} |M|^2 = \frac{Z^2 e^4 m^2}{|\vec{p}_f - \vec{p}_i|^4}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{ss'} \delta^{ss'} \delta^{s's'} = 1$$

$$|\vec{p}_f + \vec{p}_i - 2p_i \cos\theta| = \sqrt{2p_i^2 - 2p_i^2 \cos\theta} = 2p_i \sin(\theta/2)$$

(eq. 64.1)

$$\delta(p_f - p_i) \Rightarrow |\vec{p}_f| = |\vec{p}_i| \Rightarrow |\vec{p}_f - \vec{p}_i| = 2p_i \sin(\theta/2) \simeq 2m v_i \sin(\theta/2)$$

Enfim:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{v_i E_i} \frac{m v_i}{m v_i} \frac{Z^2 e^4 m^2}{(2m v_i \sin(\theta/2))^4} = \frac{Z^2 \alpha^2}{4m^2 v_i^4 \sin^4(\theta/2)} \quad \text{(eq. 65.1)}$$

que é o resultado obtido por Rutherford em 1911.

Espalhamento $e^+e^- \rightarrow \ell\bar{\ell}$ despolarizado

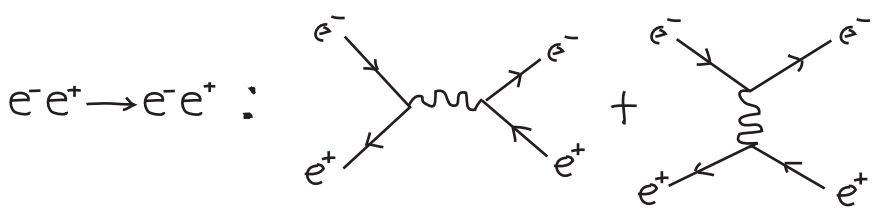
(Nastase 24; Peskin 5.1)

Agora que já reproduzimos alguns resultados clássicos conhecidos vamos atacar um espalhamento novo, a aniquilação elétron-pósitron em léptons, que é intrinsecamente quântica e relativística.

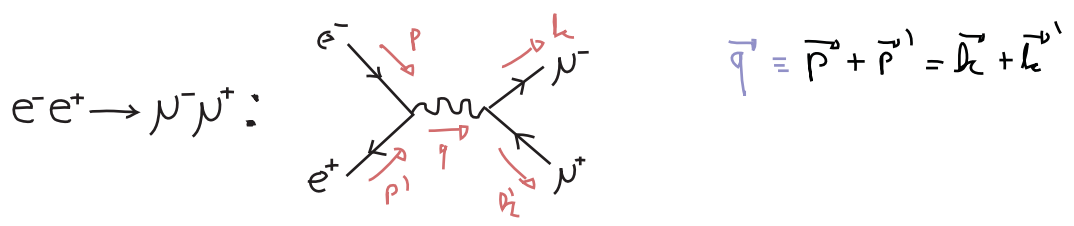
$$\text{Lépton: } \ell \equiv e^-, \mu^-, \tau^-, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$$

$$\bar{\ell} \equiv e^+, \mu^+, \tau^+, \bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\mu, \bar{\nu}_\tau \quad \text{(eq. 65.2)}$$

Se consideramos apenas a QED podemos esquecer dos neutrinos (já que não tem carga elétrica nenhum vértice nesta teoria os envolve). O caso em que $\ell = e^-$ é chamado de Espalhamento Bhabha e tem dois diagramas (ordem e^2):



No caso em que $l = \mu, \tau$ temos apenas o primeiro diagrama. Realizaremos o cálculo para o muon, mas a única coisa que muda para o τ é a massa.



Note que para criar o par de léptons final eu preciso ter uma energia mínima inicial:

$$E_{cm} > 2m_l \quad (\text{eq. 66.1})$$

o que significa:

\int	energia inicial	estados finais possíveis (ignorando a produção de quarks)
	$E_{cm} < 2m_\mu$	e^-e^+
	$2m_\mu \leq E_{cm} < 2m_\tau$	$e^-e^+; \mu^-\mu^+$
	$E_{cm} \geq 2m_\tau$	$e^-e^+; \mu^-\mu^+; \tau^-\tau^+$

Usando as regras de Feynman para o diagrama acima obtemos:

$$i\mathcal{M} = \bar{v}^{s'}(p')(-ie\gamma^\mu)u^s(p) \left(\frac{-i\eta^{\mu\nu}}{q^2 - i\epsilon} \right) \bar{u}^r(k)(-ie\gamma^\nu)v^{r'}(k') =$$

↳ não importa aqui porque não estamos integrando em q e, por conservação de momento, $q^2 \neq 0$

$$= +\frac{ie^2}{q^2} (\bar{v}^{s'}(p')\gamma^\mu u^s(p)) (\bar{u}^r(k)\gamma_\mu v^{r'}(k'))$$

$$(\bar{v} \gamma^\mu u)^* = (\bar{v} \gamma^\mu u)^\dagger = u^\dagger \gamma^{\mu\dagger} (v^\dagger \gamma^0)^\dagger = u^\dagger \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 v = \bar{u} \gamma^\mu v$$

$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0$ $\gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^\mu$

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{q^4} (\bar{v}^{s'}(p')\gamma^\mu u^s(p)) (\bar{u}^r(k)\gamma_\mu v^{r'}(k')) (\bar{v}^{r'}(k')\gamma_\nu u^r(k)) (\bar{u}^s(p)\gamma^\nu v^{s'}(p'))$$

(eq. 66.2)

Somas de Spin e Polarização

Frequentemente estaremos calculando espalhamentos entre onde:

- (1) Temos partículas sem qualquer polarização definida no início
- (2) Queremos saber a probabilidade de espalhamento, independentemente da direção do momento angular final

Para dar conta de um estado inicial totalmente “despolarizado” o que podemos fazer é escrever (estamos pensando em uma única partícula sendo espalhada por alguma coisa “externa”):

$$P(|N_i = \uparrow\rangle) = P(|N_i = \downarrow\rangle) = \frac{1}{2}$$

E queremos obter uma probabilidade total que é:

$$P(|N_i \rightarrow \uparrow\rangle) + P(|N_i \rightarrow \downarrow\rangle)$$

Acontece que, para o estado inicial despolarizado acima:

$$P(|N_i \rightarrow \uparrow\rangle) = \frac{1}{2} P(\uparrow \rightarrow \uparrow) + \frac{1}{2} P(\downarrow \rightarrow \uparrow)$$

De forma que enfim:

$$\begin{aligned} P_{\text{TOTAL}} &= \frac{1}{2} P(\uparrow \rightarrow \uparrow) + \frac{1}{2} P(\downarrow \rightarrow \uparrow) + \frac{1}{2} P(\uparrow \rightarrow \downarrow) + \frac{1}{2} P(\downarrow \rightarrow \downarrow) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{S, R = \uparrow, \downarrow} P(S \rightarrow R) \end{aligned}$$

Na (densidade de) probabilidade final, somamos sobre os spins finais e tiramos uma média sobre os iniciais (o mesmo acontece com qualquer outro número quântico que não observamos, por exemplo a “cor” da QCD)

Na prática, estas somas sobre spins externos, haja visto as regras 146.1, vão nos levar a calcular expressões do tipo:

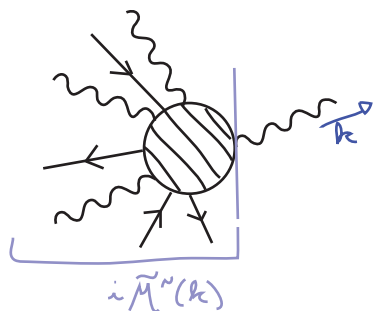
$$\begin{aligned} \sum_{S=1,2} u^S(p) \bar{u}^S(p) &= \sum_S \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi^S \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^{S\dagger} \sqrt{p \cdot \sigma} & \xi^{S\dagger} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \end{pmatrix} \underbrace{\gamma^0}_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} = \\ &= \sum_S \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi^S \xi^{S\dagger} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} & \sqrt{p \cdot \sigma} \xi^S \xi^{S\dagger} \sqrt{p \cdot \sigma} \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^S \xi^{S\dagger} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} & \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^S \xi^{S\dagger} \sqrt{p \cdot \sigma} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} m & p \cdot \sigma \\ p \cdot \bar{\sigma} & m \end{pmatrix} = \not{p} + m \hat{1} \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\sum_S u^S(p) \bar{u}^S(p) = \not{p} + m} \quad (\text{eq. 67.1})$$

Analogamente:

$$\boxed{\sum_S v^S(p) \bar{v}^S(p) = \not{p} - m} \quad (\text{eq. 67.2})$$

No caso dos fótons, o momento angular intrínseco carregado é codificado nos vetor de polarização, então conforme o espalhamento estudado é preciso somar ou tirar a média sobre as polarizações. O caso do fóton é um pouco mais complicado que o dos férmions, pois em geral temos polarizações não-físicas em ϵ_μ . Notemos, no entanto que cada fóton externo vai estar ligado em um diagrama mais geral da seguinte forma:



$$= i \mathcal{M}(k) \equiv i \tilde{\mathcal{M}}^\nu(k) \epsilon_\nu^*(k)$$

então, se estivermos somando sobre as polarizações a seção de choque incluirá:

$$\sum_{\epsilon} |\mathcal{M}|^2 = \sum_{\epsilon} |\epsilon_\nu^*(k) \tilde{\mathcal{M}}^\nu(k)|^2 = \sum_{\epsilon} \epsilon_\nu^* \epsilon_\nu \tilde{\mathcal{M}}^\nu(k) \mathcal{M}^{\nu*}(k)$$

podemos escolher uma direção para k e somar só sobre as polarizações físicas:

$$k^\mu = (k, 0, 0, k) \quad \sum_{\epsilon} \rightarrow \sum_{\epsilon=1,2} \leftrightarrow \begin{aligned} \epsilon_1^\nu &= (0, 1, 0, 0) \\ \epsilon_2^\nu &= (0, 0, 1, 0) \end{aligned}$$

$$\sum_{\epsilon} |\mathcal{M}|^2 = |\tilde{\mathcal{M}}^1(k)|^2 + |\tilde{\mathcal{M}}^2(k)|^2 \quad (\text{eq. 68.1})$$

mas seria mais conveniente manter a invariância relativística explícita. Isso é possível lembrando da identidade de Ward (que será provada com mais rigor em campos II, veja Peskin sec 7.4):

$$k_\nu \tilde{\mathcal{M}}^\nu(k) = 0$$

no referencial acima esta equação fica: $k \tilde{\mathcal{M}}^0(k) - k \tilde{\mathcal{M}}^3(k) = 0 \Rightarrow \tilde{\mathcal{M}}^0(k) = \tilde{\mathcal{M}}^3(k)$ (eq. 68.2)

logo:

$$\sum_{\epsilon} |\mathcal{M}|^2 = |\tilde{\mathcal{M}}^1(k)|^2 + |\tilde{\mathcal{M}}^2(k)|^2 + \overbrace{|\tilde{\mathcal{M}}^3(k)|^2 - |\tilde{\mathcal{M}}^0(k)|^2}^0$$

$$\sum_{\epsilon} \epsilon_\nu^* \epsilon_\nu \tilde{\mathcal{M}}^\nu(k) \tilde{\mathcal{M}}^{\nu*}(k) = -g_{\nu\nu} \tilde{\mathcal{M}}^\nu(k) \tilde{\mathcal{M}}^{\nu*}(k) \quad (\text{eq. 68.3})$$

que vale em qualquer referencial. Como não especificamos $\tilde{\mathcal{M}}$ a conclusão é que em geral podemos fazer a soma através da substituição:

$$\sum_{\epsilon} \epsilon_\nu^* \epsilon_\nu \rightarrow -g_{\nu\nu} \quad (\text{eq. 68.4})$$

Voltando a nosso calculo, queremos obter a chamada **seção de choque despolarizada** para produção de muons. Usando as somas de spins (eqs. 67.1 e 67.2):

$$\sum_S u_i^S(p) \bar{u}_j^S(p) = \not{p}_{ij} + m \hat{1}_{ij} \quad \sum_S v_i^S(p) \bar{v}_j^S(p) = \not{p}_{ij} - m \hat{1}_{ij}$$

Explicitando os índices spinoriais em 66.2 temos:

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4^4} (\bar{u}_i^{s'}(p') \gamma_{ij}^\mu u_j^s(p)) (\bar{u}_k^\pi(k) \gamma_{kl}^\nu u_l^{\pi'}(k')) (\bar{u}_m^{\pi'}(k') \gamma_{mn}^\rho u_n^\pi(k)) (\bar{u}_o^s(p) \gamma_{op}^\nu u_p^{s'}(p'))$$

$$\frac{1}{2} \sum_s \frac{1}{2} \sum_{s'} \sum_\pi \sum_{\pi'} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4^4} \gamma_{ij}^\mu \gamma_{kl}^\nu \gamma_{mn}^\rho \gamma_{op}^\nu (\not{k}' - m_\nu)_{lm} (\not{k} + m_\nu)_{nk} (\not{k} + m_e)_{jo} (\not{k}' - m_e)_{pi}$$

$$\text{Tr}[\gamma_\mu (\not{k}' - m_\nu) \gamma_\nu (\not{k} + m_\nu)] \quad \text{Tr}[\gamma^\mu (\not{k} + m_e) \gamma^\nu (\not{k}' - m_e)]$$

estes traços não são coincidência, notem que aparece um deles por linha fermiônica e isto vai sempre acontecer.

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{SPINS}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4^4} \text{Tr}[\gamma_\mu (\not{k}' - m_\nu) \gamma_\nu (\not{k} + m_\nu)] \text{Tr}[\gamma^\mu (\not{k} + m_e) \gamma^\nu (\not{k}' - m_e)] \quad (\text{eq. 69.1})$$

Para calcular os traços acima precisamos desenvolver um certo arsenal de identidades envolvendo matrizes de Dirac (note que há até quatro delas em cada traço). Fazemos uma pausa no presente cálculo para desenvolver este arsenal.

Identidades com Matrizes de Dirac

Dado que: $(\gamma^5)^2 = 1$
 $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$ } propriedades independentes de representação

$$\text{Tr}[\gamma^\mu] = \text{Tr}[(\gamma^5)^2 \gamma^\mu] = -\text{Tr}[\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^5] = -\text{Tr}[\gamma^\mu] = 0$$

$$\text{Tr}[\gamma^5] = \text{Tr}[\pm (\gamma^\mu)^2 \gamma^5] = \text{Tr}[\pm \gamma^\mu \gamma^5 \gamma^\mu] = -\text{Tr}[\gamma^5] = 0$$

↳ depende de repr. e de $\mu \rightarrow (\gamma^\mu)^2 = \pm 1$

$$\text{Tr}[\gamma^\mu] = \text{Tr}[\gamma^5] = 0 \quad (\text{eq. 69.2})$$

Note que o mesmo que fizemos para provar as identidades acima poderia ser usado para provar:

$$\text{Tr}[\underbrace{\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \dots \gamma^p}_{\text{ímpar}}] = 0 \quad (\text{eq. 69.3})$$

$$\text{Tr}[\underbrace{\gamma^5 \gamma^5 \dots \gamma^5}_{\text{ímpar}}] = \text{Tr}[\gamma^5] = 0 \quad (\text{eq. 69.4})$$

$$\boxed{\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu]} = \text{Tr} \left[\frac{1}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu + \frac{1}{2} \overset{\text{CICL.}}{\gamma^\nu \gamma^\mu} \right] = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\underbrace{\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}}_{2g^{\mu\nu} \cdot \hat{1}_{4 \times 4}} \right] = 4g^{\mu\nu} \quad (\text{eq. 70.1})$$

De uma forma geral, o que fazemos com um produto de matrizes de Dirac é expandir na base:

$$\mathcal{V}_{\mathbb{F}} = \{ \hat{1}, \gamma^5, \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma^5, \gamma^{\mu\nu} \}$$

e vale: $\boxed{\mathcal{V}_{\mathbb{F}} \neq \hat{1} \leftrightarrow \text{Tr}[\mathcal{V}_{\mathbb{F}}] = 0}$ (eq. 70.2)

Já provamos isso para o segundo e o terceiro e: $\text{Tr}[\underbrace{\gamma^\mu \gamma^5}_{(-1)}] = -\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^5] = 0$

$$\text{Tr}[\gamma^{\mu\nu}] \leftarrow \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu] = 4g^{\mu\nu} - 4g^{\nu\mu} = 0$$

Produtos mais complicados podem ser expandidos na base usando:

$$\begin{aligned} \gamma^{\mu\nu} \gamma^5 &= -\frac{i}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_{\rho\sigma} \\ \gamma^{\mu\nu\rho} &= -i \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_\sigma \\ \gamma^{\mu\nu\rho} \gamma_5 &= -i \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_\sigma \\ \gamma^{\mu\nu\rho\sigma} &= i \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_5 \end{aligned} \quad (\text{eq. 70.3})$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\underbrace{\gamma^\mu \gamma^\nu}_{2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu} \gamma^\rho \gamma^\sigma] &= \text{Tr}[(2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu) \underbrace{\gamma^\rho \gamma^\sigma}_{g^{\rho\sigma} - \gamma^\sigma \gamma^\rho}] = \\ &= \text{Tr}[2g^{\mu\nu} \underbrace{\gamma^\rho \gamma^\sigma}_{\text{Tr}[\gamma^\rho \gamma^\sigma] = 4g^{\rho\sigma}} - 2g^{\mu\rho} \gamma^\nu \gamma^\sigma + 2g^{\mu\sigma} \gamma^\nu \gamma^\rho] - \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] \\ 2\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] &= 2[4g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - 4g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + 4g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}] \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma]} = 4[g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}] \quad (\text{eq. 70.4})$$

Como $\gamma^5 = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$

$$\boxed{\text{Tr}[\underbrace{\gamma^\mu \dots \gamma^\nu}_{\text{ÍMPAR}} \gamma^5]} = 0 \quad (\text{eq. 70.4})$$

Já o produto com 2 γ_s :

$$\text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5] = \text{Tr} [\underbrace{\pm (\gamma^\alpha)^2}_{\substack{\text{cicl} \\ \alpha \neq \mu; \alpha \neq \nu}} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5] = -\text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5] = 0 \quad (\text{eq. 71.1})$$

o que não funciona para 4 γ_s , caso sejam as 4 diferentes, uma vez que já não existe uma quinta para inserir como identidade.

$$\text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^5]$$

$\{\mu, \nu, \alpha, \beta\} = \text{alguma perm. de } \{0, 1, 2, 3\}$ \Leftarrow antissim sobre a troca de quaisquer dois índices

$$\text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^5] \propto \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \left(\text{para achar a constante de proporcionalidade basta escolher uma das permutações, ex: } \{\mu, \nu, \alpha, \beta\} = \{0, 1, 2, 3\} \right)$$

$$\text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^5] = 4i \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \quad (\text{eq. 71.2})$$

Também é útil conhecer as contrações entre os ϵ_s :

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = 4! \epsilon^{0123} \epsilon_{0123} = -24$$

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\mu} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\nu} = 3! \delta_\nu^\mu \epsilon^{0123} \epsilon_{0123} = -6 \delta_\nu^\mu$$

$$\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \epsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} = 2! (\delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu - \delta_\sigma^\mu \delta_\rho^\nu) \epsilon^{0123} \epsilon_{0123} = -2 (\delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu - \delta_\sigma^\mu \delta_\rho^\nu)$$

e notar que é possível inverter a ordem das γ_s no traço:

$$\begin{aligned} \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \dots] &= \text{Tr} [\underbrace{C \gamma^\mu C^{-1}}_{\hat{1} = C^{-1}C} C \gamma^\nu C^{-1} \dots \gamma^\rho C^{-1}] = (-1)^n \text{Tr} [\gamma^{\mu T} \gamma^{\nu T} \dots] = \\ &= (-1)^n \text{Tr} [(\dots \gamma^\nu \gamma^\mu)^T] = (-1)^n \text{Tr} [\dots \gamma^\nu \gamma^\mu] \end{aligned}$$

\hookrightarrow se n é ímpar o traço é zero.

$$\text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \dots] = \text{Tr} [\dots \gamma^\nu \gamma^\mu] \quad (\text{eq. 71.3})$$

Finalmente, listamos algumas contrações entre γ_s que nos permitem simplificar o argumento do traço antes de fazê-lo:

$$g_{\mu\nu} (\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}) \Rightarrow \gamma^\mu \gamma_\mu = \delta^\mu_\mu = 4 \quad (\text{eq. 71.4})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_\mu + 2g^{\mu\nu} \gamma_\mu = -2\gamma^\nu \quad (\text{eq. 71.5})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\nu = -\gamma^\nu \underbrace{\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma_\nu}_{-2\gamma^\rho} + 2g^{\mu\nu} \gamma^\rho \gamma_\nu = 2\gamma^\nu \gamma^\rho + 2\gamma^\rho \gamma^\nu = 4g^{\nu\rho} \quad (\text{eq. 72.1})$$

(segundo a mesma lógica)

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\nu = -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\mu \quad (\text{eq. 72.2})$$



Voltando ao cálculo da seção de choque, podemos simplificar bastante a equação 69.1

$$\begin{aligned} (\text{eq. 69.1}) \rightarrow \frac{1}{4} \sum_{\text{SPINS}} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{e^4}{4q^4} \text{Tr}[\gamma_\mu (\not{k}' - m_e) \gamma_\nu (\not{k} + m_e)] \text{Tr}[\gamma^\mu (\not{p} + m_e) \gamma^\nu (\not{p}' - m_e)] = \\ &\text{do quatro termos aqui, apenas dois tem o traço não nulo:} \\ &\sim \gamma_\mu \not{k}' \gamma_\nu \not{k} \quad \& \quad \sim m_e^2 \gamma_\mu \gamma_\nu \end{aligned}$$

logo:

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\gamma_\mu (\not{k}' - m_e) \gamma_\nu (\not{k} + m_e)] &= +k'^\alpha \not{\epsilon}^\beta \text{Tr}[\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta] - m_e^2 \text{Tr}[\gamma_\mu \gamma_\nu] = \\ &= 4k'^\alpha k^\beta (g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} + g_{\mu\beta} g_{\alpha\nu}) - 4m_e^2 g_{\mu\nu} = \\ &= 4(+k'_\mu k_\nu - k' \cdot k g_{\mu\nu} + k_\mu k'_\nu - m_e^2 g_{\mu\nu}) \end{aligned}$$

da mesma forma:

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\gamma^\mu (\not{p} + m_e) \gamma^\nu (\not{p}' - m_e)] &= 4(+p^\mu p'^\nu + p'^\mu p^\nu - p' \cdot p g^{\mu\nu} - \underbrace{m_e^2 g^{\mu\nu}}_{\text{como os momentos são da ordem de } m_e \text{ e } \frac{m_e}{m_e} \sim \frac{1}{200} \text{ podemos desprezar este termo}}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\text{SPINS}} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{4e^4}{q^4} \left[k'_\mu k_\nu + k_\mu k'_\nu - g_{\mu\nu} (m_e^2 + k' \cdot k) \right] \left[p^\mu p'^\nu + p'^\mu p^\nu - p' \cdot p g^{\mu\nu} \right] = \\ &= \frac{4e^4}{q^4} \left[2k' \cdot p k \cdot p' + 2k' \cdot p' k \cdot p - 2\cancel{k' \cdot k} p' \cdot p - (m_e^2 + \cancel{k' \cdot k}) (\underbrace{2p \cdot p' - 4p' \cdot p}_{-2p' \cdot p}) \right] = \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{SPINS}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{8e^4}{q^4} (k' \cdot p k \cdot p' + k' \cdot p' k \cdot p + m_e^2 p' \cdot p) \quad (\text{eq. 72.3})$$

Esta expressão pode ser calculada em qualquer referencial, tomemos o do centro de massa.

Seção de Choque no ref. do CM

Dado que: $2E_e > 2m_\mu \sim 400 m_e$ estamos falando de elétrons ultra-relativísticos e podemos desprezar sua massa, ou seja, no centro de massa:

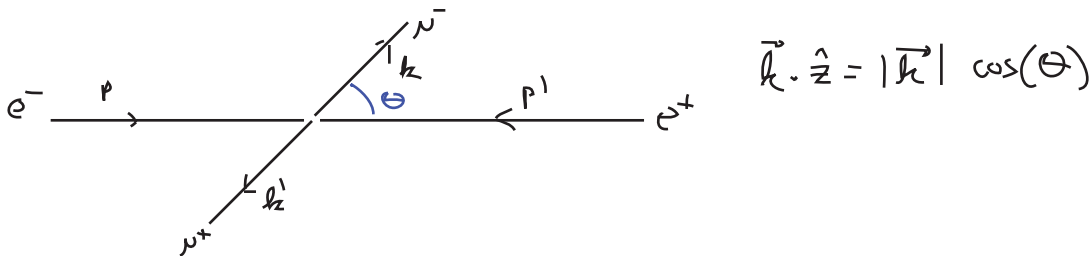
$$p = (E, E\hat{z}) \quad p' = (E, -E\hat{z})$$

Como a massa do muon e do anti-muon são iguais: $E_\mu = E_{\mu^+} = E$

(conserv. energia) $2E = E_{\mu^-} + E_{\mu^+}$ $m_\mu = m_{\mu^+}$
 (conserv. momento) $0 = \vec{k} + \vec{k}' \Rightarrow |\vec{k}| = |\vec{k}'| \Rightarrow E_{\mu^-} = E_{\mu^+}$ } $2E_\mu = 2E$

Então: $k = (E, \vec{k}) \quad k' = (E, -\vec{k})$
 $|\vec{k}| = \sqrt{E^2 - m_\mu^2}$

Definimos então o ângulo entre os elétrons e os muons:



$$q^2 = (p + p')^2 = \underbrace{p_\mu p^\mu}_0 + \underbrace{p'_\mu p'^\mu}_{\sim m_e \rightarrow 0} + 2 p_\mu p'^\mu = 4E^2 \quad (\text{eq. 73.1})$$

$$p_\mu p'^\mu = (E^2 + E^2) = 2E^2 \quad (\text{eq. 73.2})$$

$$\begin{aligned} p \cdot k &= p' \cdot k' = +E^2 - \vec{k} \cdot (E\hat{z}) = +E^2 - E|\vec{k}|\cos\theta \\ p \cdot k' &= p' \cdot k = +E^2 + \vec{k} \cdot (E\hat{z}) = +E^2 + E|\vec{k}|\cos\theta \end{aligned} \quad (\text{eq. 73.3})$$

Voltando com estas identidades em 72.3, temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\text{SPINS}} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{8e^4}{(4E)^4} \left[\underbrace{(+E^2 + E|\vec{k}|\cos\theta)^2}_{E^2 (E + |\vec{k}|\cos\theta)^2} + \underbrace{(+E^2 - E|\vec{k}|\cos\theta)^2}_{E^2 (E - |\vec{k}|\cos\theta)^2} + m_\mu^2 (2E^2) \right] = \\ &= \frac{e^4}{4E^2} \left[\underbrace{(E + |\vec{k}|\cos\theta)^2 + (E - |\vec{k}|\cos\theta)^2}_{2E^2 + 2|\vec{k}|^2 \cos^2\theta} + 2m_\mu^2 \right] = \\ &= e^4 \left[1 + \frac{m_\mu^2}{E^2} + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) \cos^2\theta \right] \quad (\text{eq. 73.4}) \end{aligned}$$

Voltaremos com este resultado na seção de choque para dois corpos (eq. 38.4):

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} = \frac{1}{2\bar{E}_A 2\bar{E}_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \frac{|\bar{P}_1|}{4\pi^2 \bar{E}_{cm}} \underbrace{|\mathcal{M}(P_A, P_B \rightarrow P_1, P_2)|^2}_{\frac{1}{4} \sum_{\text{SPINS}} |\mathcal{M}|^2}$$

no nosso caso: $P_A = p$ $P_B = p'$ $P_1 = k$ $P_2 = k'$

$$2E_A = 2E_B = 2E = E_{cm}$$

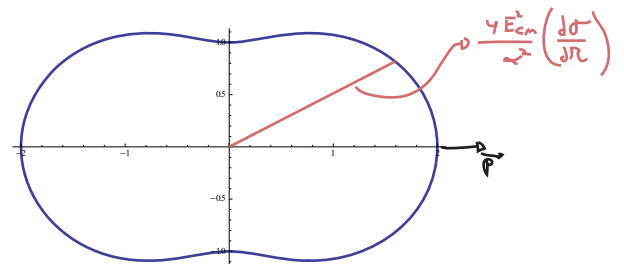
$$\vec{v}_A = \frac{\vec{p}}{E} = \hat{z} \quad \vec{v}_B = \frac{\vec{p}'}{E} = -\hat{z} \Rightarrow |\vec{v}_A - \vec{v}_B| = 2$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} = \frac{1}{2E_{cm}^2} \frac{|\vec{k}|}{4\pi^2 2E} \left[1 + \frac{m_N^2}{E^2} + \left(1 - \frac{m_N^2}{E^2}\right) \cos^2 \theta \right]$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} = \frac{\alpha^2}{4E_{cm}^2} \sqrt{1 - \frac{m_N^2}{E^2}} \left[1 + \frac{m_N^2}{E^2} + \left(1 - \frac{m_N^2}{E^2}\right) \cos^2 \theta \right] \quad (\text{eq. 74.1})$$

No limite ultra-relativístico $E \gg m_N$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm, \text{ULTRAREL}} = \frac{\alpha^2}{4E_{cm}^2} (1 + \cos^2 \theta) \quad (\text{eq. 74.2})$$



A seção de choque total é encontrada integrando-se sobre o ângulo sólido:

$$d\Omega = \sin(\theta) d\theta d\varphi = 2\pi \sin(\theta) d\theta = -2\pi d(\cos\theta) \quad \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$$

$0 < \theta < \pi \quad 1 < \cos\theta < -1$

$$\int_{-1}^1 d(\cos\theta) = 2$$

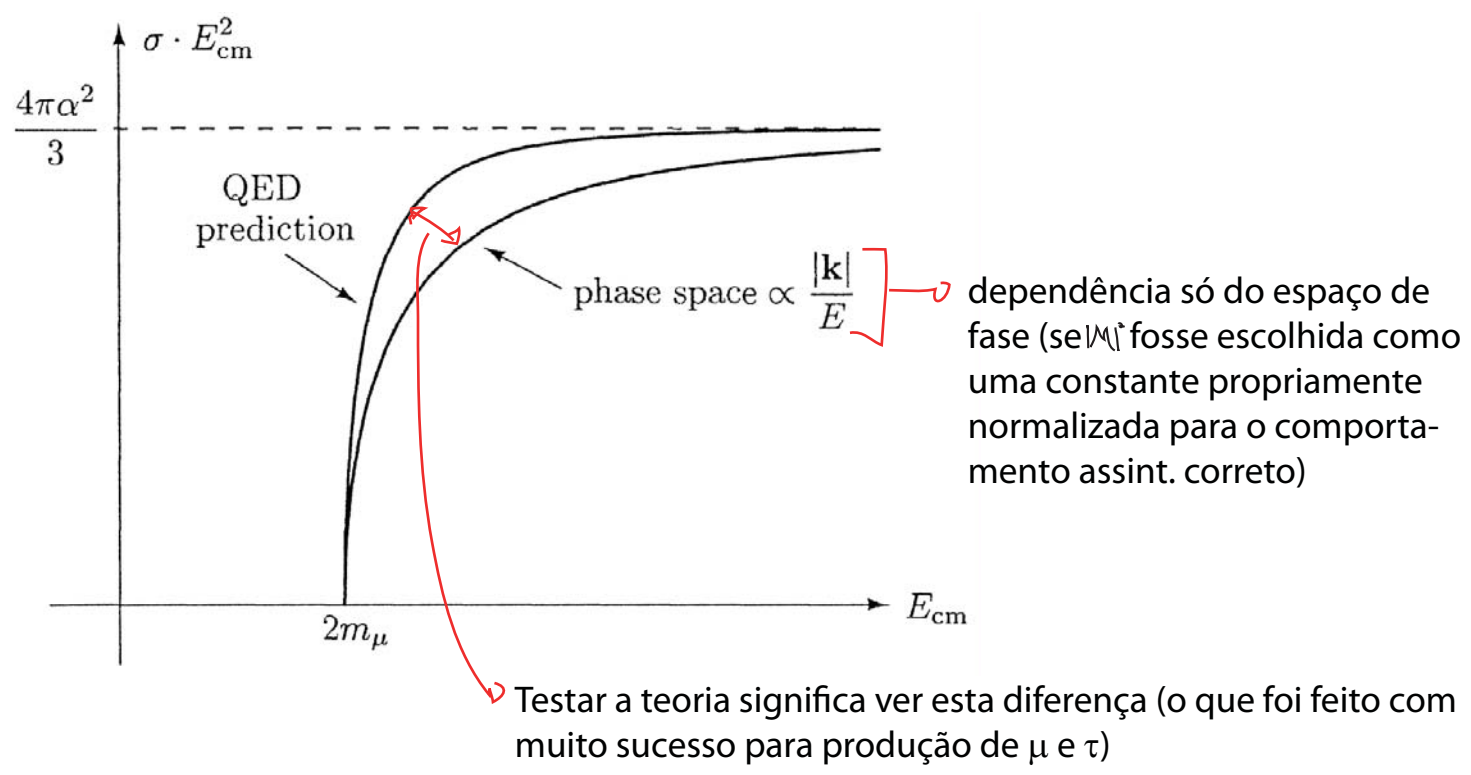
$$\int_{-1}^1 d(\cos\theta) \cos^2\theta = \frac{2}{3}$$

$$\sigma_{TOT} = 2\pi \int_{-1}^1 d(\cos\theta) \frac{\alpha^2}{4E_{cm}^2} \sqrt{1 - \frac{m_N^2}{E^2}} \left[1 + \frac{m_N^2}{E^2} + \left(1 - \frac{m_N^2}{E^2}\right) \cos^2\theta \right] =$$

$$= \frac{\pi \alpha^2}{2E_{cm}^2} \sqrt{1 - \frac{m_N^2}{E^2}} \left[1 + \frac{m_N^2}{E^2} + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{m_N^2}{E^2}\right) \right] = \frac{4\pi \alpha^2}{3E_{cm}^2} \sqrt{1 - \frac{m_N^2}{E^2}} \left[1 + \frac{m_N^2}{2E^2} \right] \quad (\text{eq. 74.3})$$

$\frac{4}{3} + \frac{2}{3} \frac{m_N^2}{E^2}$

Que, no limite ultra-relativístico fica: $\sigma_{TOT} = \frac{4\pi \alpha^2}{3E_{cm}^2} \quad (\text{eq. 74.4})$



Produção de pares Quark-Antiquark

Podemos usar o resultado para o espalhamento $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ para estudar outras produções de partículas iniciadas pela aniquilação elétron-positron, em particular no limite de altíssimas energias, muito maiores do que a massa das partículas produzidas.

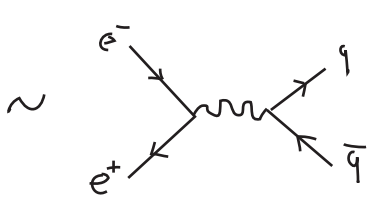
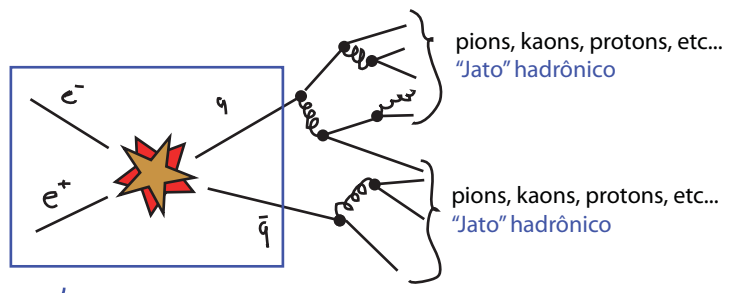
Em particular olharemos agora a produção de Hadrons: partículas que têm interação forte

$$e^+ e^- \rightarrow \text{HADRONS}$$

A QCD nos diz que os Hadrons são feitos de quarks:

q
 \times c
 cor: R, G, B (simetria exata)
 sabor: u, d, s, c, b, t (não são iguais)
 índice espinorial

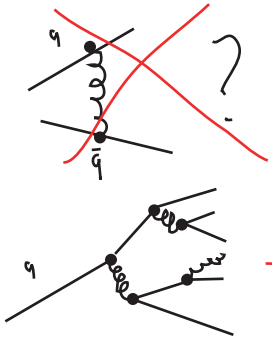
carga diferente: $\begin{cases} u, c, t \rightarrow Q = +2/3 \\ d, s, b \rightarrow Q = -1/3 \end{cases}$
 massas diferentes! $m_u \sim 2 \text{ MeV} \ll m_t \sim 172000 \text{ MeV}$
 $m_u \approx m_d \rightarrow \text{SU}(2)_f$ aproximado
 $m_u \approx m_d \approx m_s \rightarrow \text{SU}(3)_f$ "ainda mais aproximado"



↳ Temos que modificar o nosso cálculo de produção de muons de três formas:

- (I) $e \rightarrow Q |e|$ (fator Q^2)
- (II) $\sigma \sim \sigma(e^+ e^- \rightarrow \bar{q}_R q_K) + \sigma(e^+ e^- \rightarrow \bar{q}_G q_G) + \sigma(e^+ e^- \rightarrow \bar{q}_B q_B)$ (fator 3)

(III) quarks não são léptons! Preciso me preocupar com a interação forte entre eles?



→ em altas energias temos liberdade assintótica

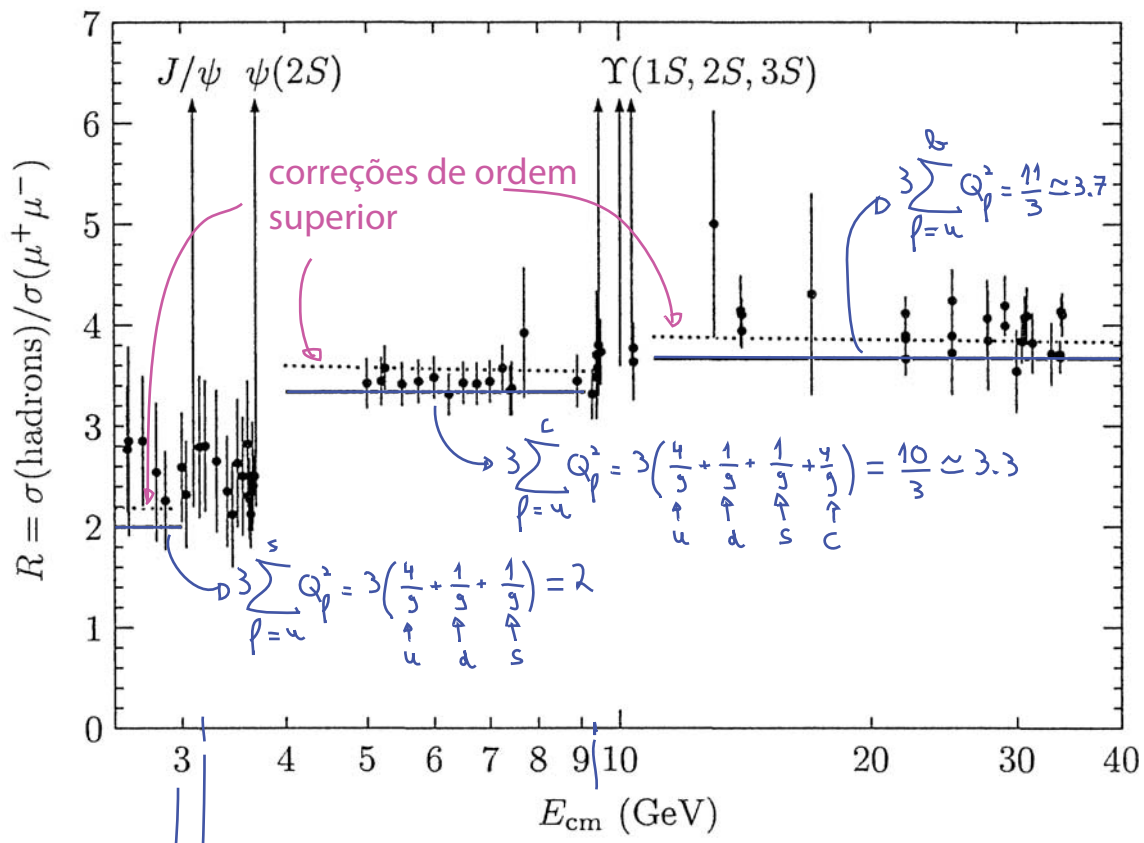
→ podemos separar a produção de dois quarks "independentes" da "hadronização" de cada um deles.

De forma que:

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow q_p \bar{q}_p) \underset{E_{cm} \gg 2m_p}{\sim} 3 Q_p^2 \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{cm}^2} = 3 Q_p^2 R \quad \sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) \underset{E_{cm} \rightarrow \infty}{\rightarrow} R$$

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{HADRONS}) \underset{E_{cm} \rightarrow \infty}{\rightarrow} 3 \left(\sum_p Q_p^2 \right) R \quad \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{HADRONS})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} \rightarrow 3 \left(\sum_p Q_p^2 \right)$$

Quando $E_{cm} \sim 2m_p$ os efeitos de QCD se tornam importantes gerando, por exemplo, estados ligados



↳ $\sim 2m_c$ ↳ $\sim 2m_b$
 ↳ $E_{cm} \gg 2m_s > 2m_d > 2m_u$

A verificação deste fator "3" é uma das evidências para a existência do número quântico de "cor" e da existência do grupo de simetria $SU(3)_c$.

Além da seção de choque total, podemos também testar a distribuição angular dos "jatos". Verifica-se experimentalmente que frequentemente temos dois "jatos" e que a distribuição angular destes segue o $(1 + \cos^2 \theta)$ deduzido na eq. 74.2.

Seção de Choque polarizada e Crossing Symmetry

(Nastase 25; Peskin 5.2-5.3)

Para obter um entendimento um pouco melhor da dependência angular em 74.2 exploraremos novamente o espalhamento $e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+$, analisando agora as polarizações dos estados. Por simplicidade, tomaremos o limite ultra-relativístico onde: $m_e, m_\mu \rightarrow 0$

Lembrando das definições dos projetores de quiralidade feitas anteriormente e que, para férmions sem massa, temos teorias separadas para ψ_L e ψ_R , notamos que estes são estados de **helicidade** bem definida:

$$\lambda \equiv \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{P}}{|\vec{P}|} \quad \begin{aligned} \mathcal{L} \psi_R &= -\frac{1}{2} \psi_R \\ \mathcal{L} \psi_L &= +\frac{1}{2} \psi_L \end{aligned}$$

Para estudar polarizações precisamos definir uma base, e nada mais natural que usar as projeções do spin na direção do movimento da partícula, usando portanto estes autoestados de helicidade.

Notemos que:

$$\overline{\psi_L} \equiv \overline{\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\psi\right)} = \left(\frac{1-\gamma_5}{2}\psi\right)^\dagger \gamma_0 = \psi^\dagger \frac{1-\gamma_5}{2} \gamma_0 = \overline{\psi} \frac{1+\gamma_5}{2} = \overline{\psi} P_R \equiv (\overline{\psi})_R$$

$\psi_L = P_L \psi = \frac{1-\gamma_5}{2} \psi$

$P_L \gamma_\mu = \gamma_\mu P_R$
 $P_R \gamma_\mu = \gamma_\mu P_L$

$(\overline{\psi})_R (\psi)_L = \overline{\psi} P_R P_L \psi = 0$

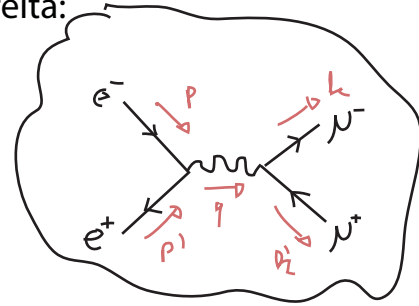
Considere os produtos de spinores aparecendo na equação 66.2 (que queremos calcular), por ex:

$$\overline{u}^{s'}(p') \gamma^\mu u^s(p)$$

queremos calcular este produto usando a base de helicidade: $s, s' \rightarrow u_R, (\overline{v})_L = \overline{v}_R$

Suponha que o elétron inicial estivesse com helicidade de mão direita:

$$u^s(p) = u_R(p) = P_R u(p) = P_R u^s(p)$$



Neste caso podemos introduzir P_R neste produto:

$$\overline{u}^{s'}(p') \gamma^\mu P_R u^s(p) = \overline{u}^{s'}(p') P_L \gamma^\mu P_R u^s(p)$$

De onde vemos que a helicidade do pósitron também está determinada (mão esquerda), de fato, como: $P_R u_L = (\overline{v})_R P_L = 0$

Podemos escrever uma soma sobre spins e, se deixarmos o P_R ali, estaremos somando apenas termos nulos, com exceção do termo que queremos:

$$\overline{u}^{s'}(p') \gamma^\mu u^s(p) = \sum_{s, s'} \overline{u}^{s'}(p') \gamma^\mu P_R u^s(p)$$

Em $|M|^2$:

note que não é uma média, o spin inicial está fixo, somamos um monte de zeros para aparecer com a soma pois ela é conveniente

$$\sum_{s, s'} \overline{u}^{s'}(p') \gamma^\mu P_R u^s(p) \overline{v}^{r'}(k') \gamma^\nu P_R v^r(k) =$$

usando as somas de spin:

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_s u_i^s(p) \overline{u}_j^s(p) &= (\not{p} + m)_{ij} \simeq \not{p}_{ij} \\ \sum_s v_i^s(p) \overline{v}_j^s(p) &= (\not{p} - m)_{ij} \simeq \not{p}_{ij} \end{aligned} \right.$$

$$= \text{Tr} [\not{p}' \gamma^\mu P_R \not{p} \gamma^\nu P_R] = \text{Tr} [\not{p}' \gamma^\mu \not{p} \gamma^\nu P_R] =$$

igual ao obtido no caso não polarizado (eq 69.1)

Calculando o traço obtemos:

$$= 2 (p'^\mu p^\nu + p'^\nu p^\mu - g^{\mu\nu} p \cdot p' - i \epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda} p'_\sigma p_\lambda) \quad (\text{eq. 78.1})$$

Podemos fazer o mesmo para o outro traço (para os muons finais):

$$\sum_{r, r'} | \overline{u}^r(k) \gamma_\mu P_R v^{r'}(k') |^2 = 2 (k'_\mu k_\nu + k'_\nu k_\mu - g_{\mu\nu} k \cdot k' - i \epsilon_{\mu\nu\sigma\lambda} k'^\sigma k^\lambda) \quad (\text{eq. 78.2})$$

Logo:

$$|M|^2 = \frac{e^4}{q^4} \sum_{RR'} |...|^2 \sum_{SS'} |...|^2 = \frac{16e^4}{q^4} (p \cdot k')(p' \cdot k)$$

$\epsilon^{\rho\sigma\tau\nu} \epsilon_{\alpha\mu\rho\nu} = -2 (\delta_{\alpha}^{\rho} \delta_{\mu}^{\sigma} - \delta_{\mu}^{\rho} \delta_{\alpha}^{\sigma})$

novamente (ver pg 73) especializamos para o centro de massa:

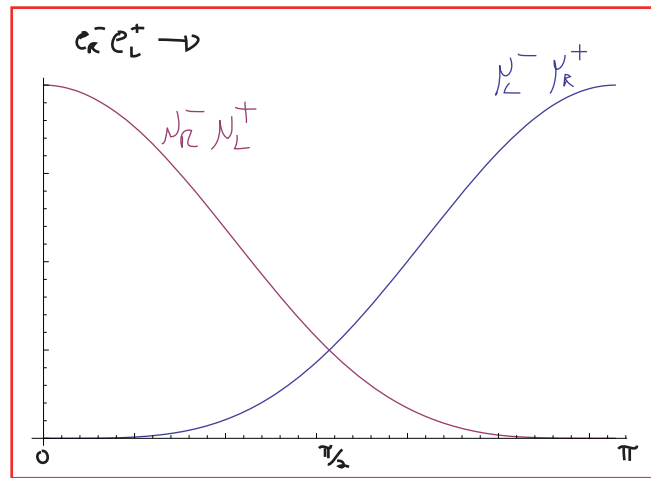
$$\begin{cases} q^2 = 4E^2 \\ p' \cdot k = p \cdot k = E(E + k \cos \theta) \\ E = k \end{cases}$$

$$|M(e_R^- e_L^+ \rightarrow \nu_R^- \nu_L^+)|^2 = e^4 (1 + \cos \theta)^2$$

$$\therefore \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} (e_R^- e_L^+ \rightarrow \nu_R^- \nu_L^+) \right)_{cm, n \rightarrow 0} = \frac{|M|^2}{64\pi^2 E_{cm}^2} = \frac{\alpha^2}{4 E_{cm}^2} (1 + \cos \theta)^2$$

Poderíamos fazer a mesma conta para outras polarizações, no caso $e_R^- e_L^+ \rightarrow \nu_L^- \nu_R^+$ o que muda é $p_R \rightarrow p_L$ em 78.2, o que resulta em um sinal na frente do ϵ e obtemos (exercício):

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} (e_R^- e_L^+ \rightarrow \nu_L^- \nu_R^+) \right)_{cm, n \rightarrow 0} = \frac{\alpha^2}{4 E_{cm}^2} (1 - \cos \theta)^2$$



Da mesma forma:

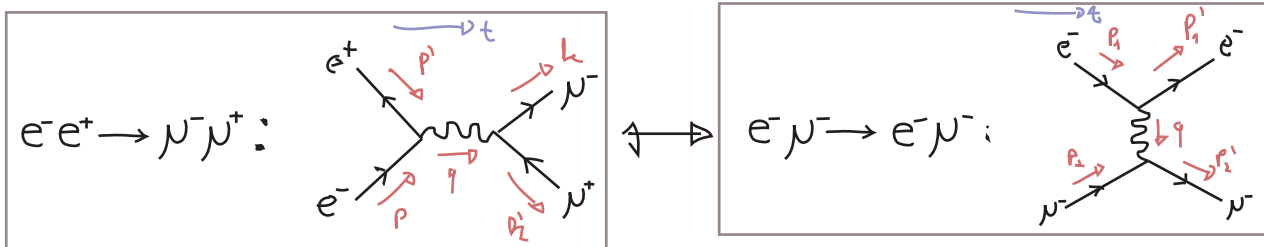
$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} (e_L^- e_R^+ \rightarrow \nu_L^- \nu_R^+) \right)_{cm, n \rightarrow 0} = \frac{\alpha^2}{4 E_{cm}^2} (1 + \cos \theta)^2$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} (e_L^- e_R^+ \rightarrow \nu_R^- \nu_L^+) \right)_{cm, n \rightarrow 0} = \frac{\alpha^2}{4 E_{cm}^2} (1 - \cos \theta)^2$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} (e_L^- e_L^+ \rightarrow \nu_R^- \nu_R^+) = 0 \quad (\text{assim como todas as outras combinações que restam})$$

Crossing symmetry

Dada a natureza das regras de Feynman, é de se esperar que expressões de diagramas bem semelhantes (ainda que representando processos físicos bem diferentes) tenham expressões semelhantes. Considere, por exemplo, os dois diagramas abaixo:



O diagrama da direita, apesar de representar um fenômeno diferente (é um espalhamento elétron-muon, ao passo que o da esquerda é uma aniquilação elétron-pósitron produzindo muon-antimuon), é essencialmente o mesmo que o da esquerda, a menos dos nomes dados aos momentos (basta olhar o da esquerda com o tempo passando de baixo para cima). De fato, as regras de Feynman nos fornecem:

$$i\mathcal{M}(e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-) = \bar{u}(p_1') (-ie\gamma^\mu) u(p_1) \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \bar{u}(p_2') (-ie\gamma^\nu) u(p_2)$$

$$= \frac{ie^2}{q^2} \bar{u}(p_1') \gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p_2') \gamma_\nu u(p_2)$$

$$\therefore \frac{1}{4} \sum_{\text{SPIN}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4q^4} \text{Tr}[(\not{p}_1 + m_e) \gamma^\mu (\not{p}_1 + m_e) \gamma^\nu] \text{Tr}[(\not{p}_2 + m_\mu) \gamma_\mu (\not{p}_2 + m_\mu) \gamma_\nu]$$

(eq. 80.1)

$$q = p_2' - p_2 = p_1 - p_1'$$

Compare esta equação com a eq. 69.1:

$$(eq. 69.1) \Rightarrow \frac{1}{4} \sum_{\text{SPIN}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4q^4} \text{Tr}[\gamma_\mu (\not{k}' - m_\mu) \gamma_\nu (\not{k} + m_\mu)] \text{Tr}[\gamma^\nu (\not{p} + m_e) \gamma^\mu (\not{p}' - m_e)]$$

$\sum \bar{v}(k')$ (pointing to $\not{k}' - m_\mu$)
 $\not{p}_2' + m_\mu$ (pointing to $\not{k} + m_\mu$)
 $\not{p} + m_e$ (pointing to $\not{p} + m_e$)
 $\not{p}' - m_e$ (pointing to $\not{p}' - m_e$)
 $(\not{p}' - m_e) = \ominus(-\not{p} + m_e) \xrightarrow{\sum u \bar{u}(p_2)}$
 $\ominus(-\not{p}_1 + m_e)$ (pointing to $\not{p}' - m_e$)
 se cancelam (arrow from $\ominus(-\not{p}_1 + m_e)$ to $\not{p} + m_e$)

o que mudou é apenas o nome dos momentos:

$$p \rightarrow p_1 \quad p' \rightarrow -p_1' \quad k \rightarrow p_2' \quad k' \rightarrow -p_2 \quad q = p' + p \rightarrow p_1 - p_1'$$

A seção de choque obtida para este diagrama é (ver Nastase, pgs 227 e 228), no limite ultra-relativístico:

$$\left. \begin{matrix} E \gg m_\mu \\ m_\mu, m_e \rightarrow 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} (e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-) \right)_{cm} = \frac{\alpha^2}{2E_{cm}^2 (1 - \cos\theta)^2} [4 + (1 + \cos\theta)^2] \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} \sim \frac{1}{\theta^4}$$

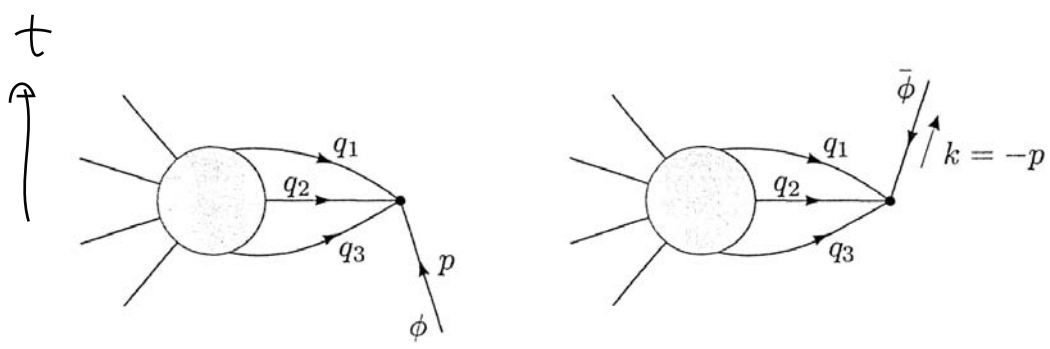
(eq. 80.2)

Note a divergência para ângulos pequenos, este tipo de divergência que aparece no espalhamento de partículas sem massa (neste a partícula em questão é o fóton) é chamada de **divergência IR** (infra-red, pois para pequenos ângulos o momento q trocado é pequeno) e será tratada no curso de TQCII.

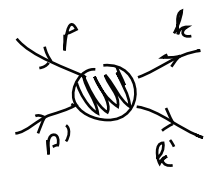
A simetria acima, entre diagramas que podem ser levados um no outro "cruzando" linhas do passado para o futuro é chamada de **Crossing Symmetry** e pode ser generalizada:

$$\mathcal{M}(\phi(p) + \dots \rightarrow \dots) = \mathcal{M}(\dots \rightarrow \bar{\phi}(k) + \dots) \quad k = -p \quad (eq. 216.3)$$

$$\sum u(p) \bar{u}(p) = \not{p} + m = -(\not{k} - m) = -\sum v(k) \bar{v}(k)$$



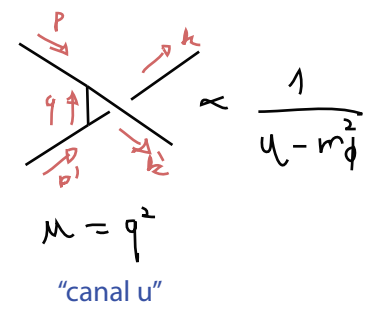
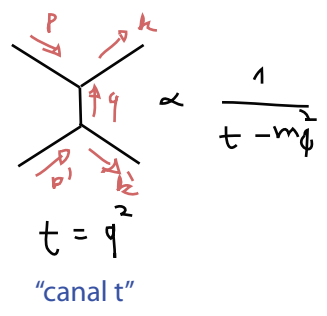
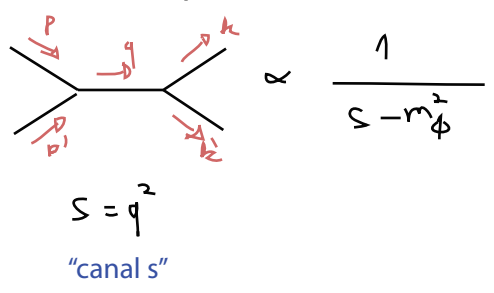
É mais fácil definir bem esta simetria em termos das **Variáveis de Mandelstam**, que definiremos agora. Dado um processo $2 \rightarrow 2$



$$\begin{aligned}
 s &\equiv (p + p')^2 = (k + k')^2 = E_{cm}^2 \\
 t &\equiv (k - p)^2 = (k' - p')^2 \\
 u &\equiv (k' - p)^2 = (k - p')^2
 \end{aligned}$$

"t is the squared difference of the initial and final momenta of the most similar particles"
Variáveis de Mandelstam
 (eq. 81.1)

Note que:



$$s + t + u = p^2 + p'^2 + k^2 + k'^2 = \sum_{i=1}^4 m_i^2 \quad (\text{eq. 81.2})$$

Os três canais terão distribuições angulares diferentes, para ver isso, considere o caso em que todas as massas são iguais:

$$\begin{aligned}
 s &= E_{cm}^2 \quad (\text{independe do ângulo}) \\
 t &\propto (1 - \cos \theta) \quad t \rightarrow 0 / \theta \rightarrow 0 \\
 u &\propto (1 + \cos \theta) \quad u \rightarrow 0 / \theta \rightarrow \pi
 \end{aligned}$$

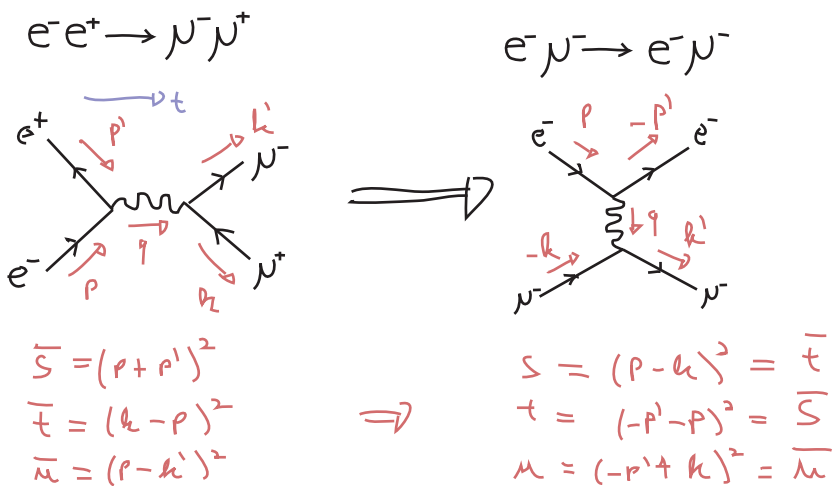
Em termos destas variáveis, podemos re-escrever 72.3 (para o processo $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$):

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}(e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+)|^2 = \frac{8e^4}{s^2} \left[\left(\frac{t}{2}\right)^2 + \left(\frac{u}{2}\right)^2 \right]^{0 \rightarrow 0}$$

$$\begin{aligned}
 s &= q^2 \\
 t &= (k - p)^2 = -2p \cdot k = -2p' \cdot k' \\
 u &= (p - k')^2 = -2p \cdot k' = -2p' \cdot k
 \end{aligned}$$

$m_e \sim 0$
 $m_\mu \sim 0$

Agora façamos:



Logo podemos fazer o crossing direto nas variáveis de Mandelstam e obter:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)|^2 = \frac{8e^4}{s^2} \left[\left(\frac{t}{2}\right)^2 + \left(\frac{u}{2}\right)^2 \right]$$

$$\begin{matrix} s \rightarrow t \\ t \rightarrow s \\ u \rightarrow u \end{matrix} \rightarrow \frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}(e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-)|^2 = \frac{8e^4}{t^2} \left[\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{u}{2}\right)^2 \right]$$

Estrutura de Helicidade em um referencial específico

Façamos novamente o cálculo da seção de choque polarizada de uma forma mais explícita e mais esclarecedora (ainda que mais trabalhosa). Voltamos à amplitude:

$$\mathcal{M} = \frac{e^2}{q^2} (\bar{v}^{s'}(p') \gamma^\mu u^s(p)) (\bar{u}^r(k) \gamma_\mu v^{r'}(k'))$$

No limite: $E_{cm} \gg m_e$

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma^1} \xi \\ \sqrt{p \cdot \sigma^3} \xi \end{pmatrix} \xrightarrow{E \rightarrow \infty} \sqrt{2E} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (1 - \hat{p} \cdot \vec{\sigma}) \xi \\ \frac{1}{2} (1 + \hat{p} \cdot \vec{\sigma}) \xi \end{pmatrix}$$

$$p = (E, E\hat{p}) \Rightarrow \begin{matrix} p \cdot \sigma = E(1 - \hat{p} \cdot \vec{\sigma}) \\ p \cdot \bar{\sigma} = E(1 + \hat{p} \cdot \vec{\sigma}) \end{matrix} \quad \left(\frac{\sqrt{2E}}{2} (1 - \hat{p} \cdot \vec{\sigma}) \right)^2 = \frac{E}{2} (1 - 2\hat{p} \cdot \sigma + \hat{p} \cdot \sigma \hat{p} \cdot \sigma) = E(1 - \hat{p} \cdot \vec{\sigma})$$

(Peskin eqs. 3.49 a 3.54)

$$v(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma^1} \xi \\ -\sqrt{p \cdot \sigma^3} \xi \end{pmatrix} \xrightarrow{E \rightarrow \infty} \sqrt{2E} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (1 - \hat{p} \cdot \vec{\sigma}) \xi \\ -\frac{1}{2} (1 + \hat{p} \cdot \vec{\sigma}) \xi \end{pmatrix}$$

Dada uma direção para o momento:

"mão direita" $\rightarrow (\hat{p} \cdot \vec{\sigma}) \xi^R = +\xi^R$

"mão esquerda" $\rightarrow (\hat{p} \cdot \vec{\sigma}) \xi^L = -\xi^L$

$\hat{p} = \hat{z} \Rightarrow \hat{p} \cdot \sigma = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
 "mão direita" $\rightarrow \xi^R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
 "mão esquerda" $\rightarrow \xi^L = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lembrando que para anti-partículas a quiralidade do spinor é o oposto da partícula (uma vez que o operador de criação associado produz uma partícula com todos números quânticos invertidos):

anti-partícula de "mão direita" $\rightarrow (\hat{p}' \cdot \vec{\sigma}) \xi^{L'} = -\xi^{L'}$
 espinor de esquerda

anti-partícula de "mão esquerda" $\rightarrow (\hat{p}' \cdot \vec{\sigma}) \xi^{R'} = +\xi^{R'}$
 espinor de direita

mas que também temos que tomar cuidado com o sentido oposto do momento (no ref. do CM):

$\vec{p}' = -\vec{p} \Rightarrow$
 $(\hat{p}' \cdot \vec{\sigma}) \xi^{R'} = \xi^{R'}$ $(\hat{p}' \cdot \vec{\sigma}) \xi^{L'} = -\xi^{L'}$
 $(\hat{p} \cdot \vec{\sigma}) \xi^R = -\xi^R$ $(\hat{p} \cdot \vec{\sigma}) \xi^L = \xi^L$
 $\xi^{R'} = \xi^L$ $\xi^{L'} = \xi^R$

Logo a linha do eletron:

$$\bar{v}^{s'}(p') \gamma^{\mu} u^s(p) = \bar{v}^{s'}(p') \gamma^{\mu} \gamma^5 u^s(p) =$$

$$= 2E \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 - \hat{p}' \cdot \vec{\sigma}) \xi^{s'} & -\frac{1}{2}(1 + \hat{p}' \cdot \vec{\sigma}) \xi^{s'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\sigma}^{\mu} & 0 \\ 0 & \sigma^{\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 - \hat{p} \cdot \vec{\sigma}) \xi^s \\ \frac{1}{2}(1 + \hat{p} \cdot \vec{\sigma}) \xi^s \end{pmatrix}$$

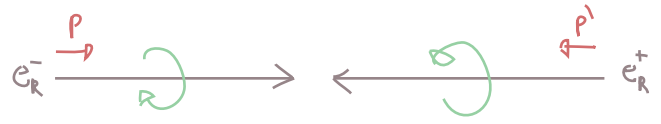
Vai ser zero se um dos espinores for de mão esquerda e outro de direita:

(equivalendo a um par de partícula - anti-partícula de mesma quiralidade)

$\left. \begin{matrix} s' = R' \\ s = L \end{matrix} \right\} \Rightarrow 2E \begin{pmatrix} 0 & -\xi^{R'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\sigma}^{\mu} & 0 \\ 0 & \sigma^{\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^L \\ 0 \end{pmatrix} = 0$



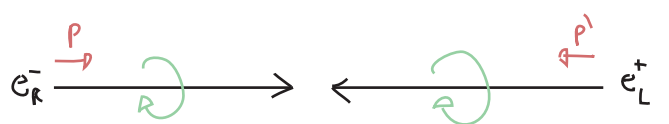
$\left. \begin{matrix} s' = L' \\ s = R \end{matrix} \right\} \Rightarrow 2E \begin{pmatrix} \xi^{L'} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\sigma}^{\mu} & 0 \\ 0 & \sigma^{\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi^R \end{pmatrix} = 0$



Tomemos a direção inicial no eixo z: $\hat{p} = \hat{z}$

e consideremos um elétron de mão direita ($s = R$) e um positron de mão esquerda ($s' = R' = L$):

$\xi^S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (\hat{p} \cdot \vec{\sigma}) \xi^S = \sigma_3 \xi^S = \xi^S$



$$\xi^{\prime} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (\hat{p}^{\prime} \cdot \vec{\sigma}) \xi^{\prime} = \underbrace{-\sigma_3}_{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \xi^{\prime} = \xi^{\prime}$$

$$u(p) = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v(p') = \sqrt{2E'} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{v}(p') \not{\sigma} u(p) = 2E \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^0 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2E \begin{pmatrix} 0, 1, i, 0 \end{pmatrix}$$

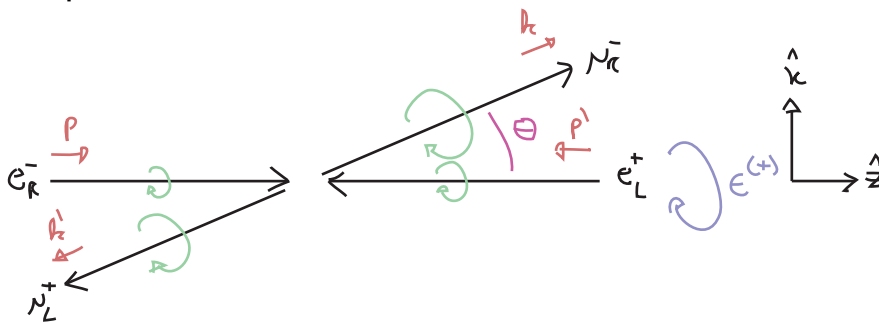
vectores de Dirac vetor de Lorentz

(eq. 84.1)

o que nos leva a interpretação de que o fóton virtual **emitido** vai ter uma polarização circular:

$$\epsilon^{(+)\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} + i\hat{y})$$

Resta fazer o mesmo para a linha do muon, consideremos o muon da mão direita (e anti-muon de mão esquerda):



Poderíamos refazer toda a conta para o muon, mas isto iria ser complicado por conta da direção do momento, é bem mais fácil fazer uma rotação no resultado 84.1 (que se comporta como um vetor):

$$\bar{u}(k) \not{\sigma} v(k') = (\bar{u}(k') \not{\sigma} u(k))^* = [-2E (0, \cos \theta, i, -\sin \theta)]^* = -2E (0, \cos \theta, -i, -\sin \theta)$$

(eq. 84.2)

que pode ser vista como a polarização do foton virtual **absorvido**. Se a projeção desta em 84.1 for zero a amplitude será zero. Nossa amplitude ficou:

$$\mathcal{M}(e^-_R e^-_L \rightarrow \mu^-_R \mu^-_L) = \frac{e^2 (2E)^2}{q^2} (-\cos \theta - 1) = -e^2 (1 + \cos \theta)$$

(eq. 84.3)

o que concorda com o resultado obtido na página 79. Podemos fazer a mesma conta invertendo as helicidades:

$$e^-_L e^-_R \rightarrow \bar{v}(p') \not{\sigma} u(p) = -2E (0, 1, -i, 0) = -2E \sqrt{2} \epsilon^{(-)\mu}$$

(eq. 84.4)

$$\bar{N}_L^- \bar{N}_R^+ \rightarrow \bar{u}(k) \gamma^\mu v(k') = -2E (0, \cos \theta, i, -\sin \theta) \quad (\text{eq. 85.1})$$

e combinando 84.1, 84.2, 84.4 e 85.1 obtemos as amplitudes que faltam:

$$\mathcal{M}(\bar{e}_L^- e_R^+ \rightarrow N_L^- N_R^+) = -e^2 (1 + \cos \theta) \quad (\text{eq. 85.2})$$

$$\mathcal{M}(\bar{e}_R^- e_L^+ \rightarrow N_L^- N_R^+) = \mathcal{M}(\bar{e}_L^- e_R^+ \rightarrow N_R^- N_L^+) = -e^2 (1 - \cos \theta) \quad (\text{eq. 85.3})$$

Limite não relativístico (para o muon)

Estudemos agora o regime em que $E_{cm} \simeq 2 m_\mu$ $E \simeq m_\mu$

da equação 74.1 temos:

$$\left. \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{cm} = \frac{\alpha^2}{4E_{cm}^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \left[\underbrace{1 + \frac{m_\mu^2}{E^2}}_{\simeq 2} + \underbrace{\left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right)}_{\simeq 0} \cos^2 \theta \right] = \right.$$

$$\left. \simeq \frac{\alpha^2}{2E_{cm}^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} = \frac{\alpha^2}{2E_{cm}^2} \frac{|\vec{k}|}{E} \quad (\text{eq. 85.4}) \right.$$

Tratemos os espinores explicitamente, como na seção anterior, para os eletrons nada muda (ainda são ultra relativísticos), da eq. 84.1:

$$\bar{v}(p') \gamma^\mu u(p) = -2E (0, 1, i, 0) \simeq -2 m_\mu (0, 1, i, 0)$$

Já no caso dos muons, temos que usar as expressões não relativísticas:

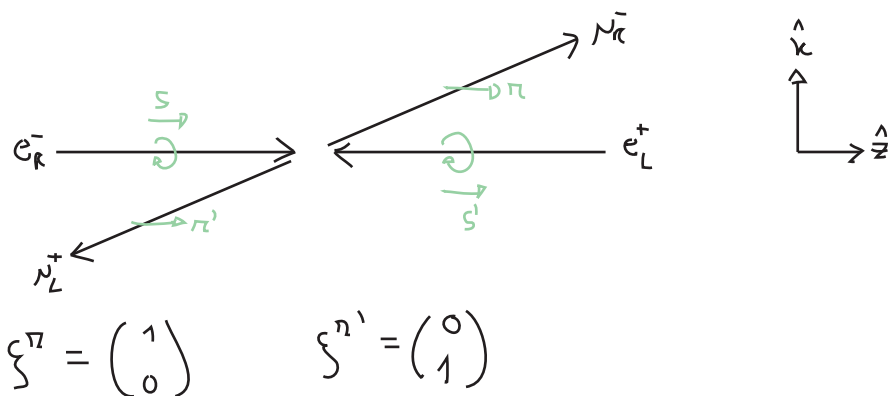
$$u(k) = \sqrt{m_\mu} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix} \quad v(k') = \sqrt{m_\mu} \begin{pmatrix} \xi' \\ -\xi' \end{pmatrix}$$

$$\bar{u}(k) \gamma^\mu v(k') = m_\mu (\xi^\dagger, \xi^\dagger) \begin{pmatrix} \bar{\sigma}^\mu & 0 \\ 0 & \sigma^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi' \\ -\xi' \end{pmatrix} = \underbrace{(0, -2m_\mu \xi^\dagger \vec{\sigma} \xi')}_{\text{vetor de Lorentz}}$$

assim:

$$\mathcal{M}(\bar{e}_R^- e_L^+ \rightarrow N^+ \mu^-) = \frac{e^2}{q^2} \bar{v}(p') \gamma^\mu u(p) \bar{u}(k) \gamma_\mu v(k') = \frac{e^2}{4m_\mu^2} \underbrace{(-2m_\mu)}_{\substack{\text{cancela} \\ \rightarrow 4E^2 \simeq 4m_\mu^2}} \xi^\dagger \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\sigma_1 & -i\sigma_2 \end{pmatrix} \xi' = -2e^2 \xi^\dagger \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xi' \quad (\text{eq. 85.5})$$

Não há dependência angular, portanto a distribuição dos muons emitidos é esfericamente simétrica, ou seja, estão sendo emitidos em onda s , com momento angular orbital zero. A conservação do momento angular exige que a soma de spins do estado final seja 1. De fato, o elemento de matriz está dando zero a não ser que tanto o spin do muon quanto do anti-muon estejam alinhados ao longo do eixo z positivo:



Somando sobre os spins dos muons:

$$\sum_{\pi, \pi'} |\mathcal{M}|^2 = 4e^2$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} (e_r^- e_L^+ \rightarrow \mu^- \mu^+) \right)_{cm} = \frac{1}{2E_{cm}^2} \frac{|\vec{k}|}{16\pi^2 2E} \overbrace{\sum_{\pi, \pi'} |\mathcal{M}|^2}^{4e^2} = \frac{\alpha^2}{E_{cm}^2} \frac{|\vec{k}|}{E}$$

pg 74

O mesmo resultado se aplica se iniciarmos com helicidades invertidas para o elétron e o pósitron. Então:

$$\frac{1}{4} \sum_{\substack{\pi, \pi' \\ s, s'}} |\mathcal{M}|^2 = 2e^2$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} (e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+) \right)_{cm} = \frac{\alpha^2}{2E_{cm}^2} \frac{|\vec{k}|}{E}$$

reproduzindo o resultado de 85.4

Estados Ligados

O que acontece se levarmos em conta que, perto do limiar de produção do par muon - anti-muon, as duas partículas são produzidas quase paradas e a atração coulombiana entre eles se torna importante? De fato, o estado ligado ("muonium") deve ter energia menor do que os dois muons livres, e poderia aparecer abaixo deste limiar. Vejamos como tratar estados ligados no limite não relativístico.

Baseado na discussão acima, sabemos que:

$$\mathcal{M}(\uparrow\uparrow \rightarrow k_1\uparrow, k_2\uparrow) = -2e^2$$

spins na direção z , de forma que o estado ligado tem spin 1 neste sentido

Definimos as coordenadas do centro de massa e relativa:

$$\vec{R} \equiv \frac{1}{2} (\vec{r}_1 + \vec{r}_2) \quad \vec{r} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

e seus momentos conjugados:

$$\vec{K} \equiv \vec{k}_1 + \vec{k}_2 \quad \vec{k} \equiv \frac{1}{2} (\vec{k}_1 - \vec{k}_2)$$

$$\vec{K}_{cm} = 0$$

queremos encontrar

$$\tilde{\Psi}(\vec{k}) = \int d^3x e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \psi(\vec{r})$$

↳ pode ser obtido resolvendo a eq. de Schrödinger para um potencial de Coulomb

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |\tilde{\Psi}(\vec{k})|^2 = 1$$

dada a normalização correta para $\psi(\vec{r})$, $\tilde{\Psi}(\vec{k})$ dá a amplitude de probabilidade de medirmos \vec{k} . Considere o estado ligado B:

$$B \left\{ \begin{array}{l} \text{massa: } M \approx 2m_e \\ \vec{K} = 0 \\ \text{spin: } \uparrow\uparrow \end{array} \right. \quad \text{↳ vou suprimir esta notação}$$

Podemos escrever explicitamente:

$$|B\rangle = \sqrt{2M} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{\Psi}(\vec{k}) \frac{1}{\sqrt{2m}} \frac{1}{\sqrt{2m}} |\vec{k}\uparrow, -\vec{k}\uparrow\rangle$$

(volta para a normalização relativística que usamos na seção de choque)

(compensam a normalização relativística dos estados livres)

$$|B\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{\Psi}(\vec{k}) \frac{1}{2m} |\vec{k}\uparrow, -\vec{k}\uparrow\rangle \Rightarrow \langle B|B\rangle = 1$$

$$|B\rangle \rightarrow \langle B|B\rangle = 2M$$

Com isso podemos imediatamente escrever a amplitude de produção:

$$\langle B|\uparrow\uparrow\rangle \sim \mathcal{M}(\uparrow\uparrow \rightarrow B) = \sqrt{2M} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\tilde{\Psi}^*(\vec{k})}{2m} \underbrace{\mathcal{M}(\uparrow\uparrow \rightarrow \vec{k}\uparrow, -\vec{k}\uparrow)}_{-2e^2} = (-2e^2) \sqrt{\frac{2}{M}} \underbrace{\psi^*(\vec{x}=0)}_{\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{\Psi}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}$$

$$\mathcal{M}(\uparrow\uparrow \rightarrow B) = \sqrt{\frac{2}{M}} (-2e^2) \psi^*(0)$$

(eq. 87.1)

Antes de seguir adiante, vamos generalizar isto para configurações de spin quaisquer. O raciocínio da pg 85 (até a eq. 85.5) vai colocar qualquer elemento da matriz S para produção de férmions não-relativísticos com momentos \vec{k} e $-\vec{k}$ na forma:

$$i\mathcal{M}(\text{ALGO} \rightarrow \vec{k}, \vec{k}') = \xi^\dagger \left[\Gamma(\vec{k}') \right] \xi \quad (\text{eq. 88.1})$$

Onde $\Gamma(\vec{k}')$ é uma matriz 2 x 2. Podemos ver a passagem:

$$\mathcal{M}(\uparrow\uparrow \rightarrow k, \vec{k}') = -2e^2 \xi^\dagger \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xi$$



$$\mathcal{M}(\uparrow\uparrow \rightarrow B) = -2e^2 \sqrt{\frac{2}{M}} \psi^*(0)$$

como uma substituição dos espinores de Weyl por uma função de onda para os spins, feita da seguinte forma:

$$i\mathcal{M}(\text{ALGO} \rightarrow \vec{k}, \vec{k}') = \xi^\dagger \left[\Gamma(\vec{k}') \right] \xi$$



$$i\mathcal{M}(\text{ALGO} \rightarrow \vec{k}, \vec{k}') = \sqrt{\frac{2}{M}} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{\psi}^*(\vec{k}) \text{Tr} \left[\xi \xi^\dagger \Gamma(\vec{k}) \right] \quad (\text{eq. 88.2})$$

Onde $\xi \xi^\dagger$ carregam a informação sobre o estado de spin final, de fato:

$$\xi \xi^\dagger \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{n}^* \cdot \vec{\sigma} \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} + i\hat{y}) \leftrightarrow \uparrow\uparrow \\ \hat{n} = \hat{z} \leftrightarrow (\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow)/\sqrt{2} \\ \hat{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} - i\hat{y}) \leftrightarrow \downarrow\downarrow \end{array} \right\} \text{SPIN } 1$$

$$\xi \xi^\dagger \rightarrow \frac{1_{2 \times 2}}{\sqrt{2}} \leftrightarrow \frac{\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow}{\sqrt{2}} \quad (\text{SPIN } 0)$$

Podemos checar que para $\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} + i\hat{y})$ $\Gamma(\vec{k}) = -2e^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2e^2 (\hat{x} + i\hat{y}) \cdot \vec{\sigma}$

$$\xi \xi^\dagger \rightarrow \frac{1}{2} (\hat{x} - i\hat{y}) \cdot \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Tr} \left[\xi \xi^\dagger \Gamma(\vec{k}') \right] = -2e^2 \Rightarrow \mathcal{M}(\uparrow\uparrow \rightarrow B) = -2e^2 \sqrt{\frac{2}{M}} \psi^*(0)$$

Produção e decaimento de mésons vetoriais

Podemos re-escrever a eq. 87.1 em uma forma que deixa mais claro o alinhamento entre o vetor de polarização para o spin inicial ϵ_+ e o do estado ligado \hat{n}

$$\epsilon_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} + i\hat{y}) \quad \hat{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} + i\hat{y}) \quad \hat{n}^* \cdot \epsilon_+ = 1$$

$$\mathcal{M}(e^+e^- \rightarrow B) = \sqrt{\frac{2}{M}} (-2e^2) \Psi^*(0) = \sqrt{\frac{2}{M}} (-2e^2) \underbrace{(\hat{n}^* \cdot \epsilon_+)}_{\text{L0 que podemos generalizar para outros n}} \Psi^*(0) \quad (\text{eq. 89.1})$$

Se tivéssemos elétrons inicialmente despolarizados, apareceria a média sobre as polarizações:

$$\frac{1}{4} (|\hat{n}^* \cdot \epsilon_+|^2 + |\hat{n}^* \cdot \epsilon_-|^2) = \frac{1}{4} ((n_x)^2 + (n_y)^2)$$

Somando sobre todas as três direções possíveis de n (soma sobre a polarização final), temos:

$$\sum_{n=n_x, n_y, n_z} \frac{1}{4} [(n_x)^2 + (n_y)^2] = \frac{1}{2} \Rightarrow |\mathcal{M}(e^+e^- \rightarrow B)|^2 = \frac{2}{M} 4e^4 \frac{1}{2} |\Psi(0)|^2$$

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow B) = \underbrace{\frac{1}{2} \frac{1}{2m} \frac{1}{2m} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p+p'-k)}_{\text{espaço de fase 2} \rightarrow 1} \cdot \frac{4e^4}{M} |\Psi(0)|^2$$

A integrais são resolvidas usando as funções delta, mas sobra uma delta que escrevemos na forma:

$$\delta(p^0 - k^0) = 2k^0 \delta(p^2 - k^2) = 2E_k \delta(E_{cm}^2 - M^2)$$

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow B) = \frac{1}{2} \frac{1}{2m} \frac{1}{2m} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} (2\pi)^4 \cancel{2E_k} \delta(E_{cm}^2 - M^2) \frac{4e^4}{M} |\Psi(0)|^2$$

$\int p^0 e^1 = 16\pi^2 \alpha^2$

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow B) = 64 \pi^3 \alpha^2 \frac{|\Psi(0)|^2}{M^3} \delta(E_{cm}^2 - M^2) \quad (\text{eq. 89.2})$$

Se B pode ser produzido em choques elétron - pósitron, ele também pode decair de volta para elétron - pósitron (de fato para qualquer par de fermions suficientemente leve). O decaimento é dado por:

$$\Gamma(B \rightarrow e^+e^-) = \frac{1}{2M} \int d\Omega_2 |\mathcal{M}|^2$$

onde \mathcal{M} é o complexo conjugado de 89.1

$$\Gamma = \frac{1}{2M} \int \left(\frac{1}{2\pi} \frac{d\cos\theta}{2} \right) \frac{8e^4}{M} |\Psi(0)|^2 (|\hat{n} \cdot \epsilon|^2 + |\hat{n} \cdot \epsilon^*|^2)$$

lembrando que somamos sobre as polarizações do elétron e tiramos a média sobre os 3 valores de n:

$$\Gamma(B \rightarrow e^+e^-) = \frac{16\pi^3 \alpha^2}{3} \frac{|\Psi(0)|^2}{M^2} \quad (\text{eq. 89.3})$$

a semelhança entre a seção de choque de produção e a largura de decaimento não é coincidência, afinal de contas as duas envolvem o mesmo elemento de matriz invariante, a diferença entre elas vem apenas de somas diferentes sobre as polarizações e espaço de fase (e não da teoria em si). Isso quer dizer que a relação:

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow B) = 4\pi^2 \frac{3\Gamma(B \rightarrow e^+e^-)}{M} \delta(E_{cm}^2 - M^2) \quad (\text{eq. 90.1})$$

é bastante geral e deve depender de teoria (ou detalhes de M). Podemos generalizar ainda mais substituindo o fator de soma sobre as orientações do spin 1:

$$\text{Spin } 1 \quad \longrightarrow \quad \text{Spin } J \\ 3 \quad \quad \quad (2J+1)$$

Mais uma vez há uma aplicação importante em física de hadrons, que é a produção de quarkôniums. Devemos modificar as eqs. 89.2 e 89.3 multiplicando ambas por um fator 3 (por conta da cor) e corrigindo a carga:

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow H_{q\bar{q}}) = 3 \cdot 2 \cdot \pi^3 \alpha^2 Q^2 \frac{|\Psi(0)|^2}{M^3} \delta(E_{cm}^2 - M^2)$$

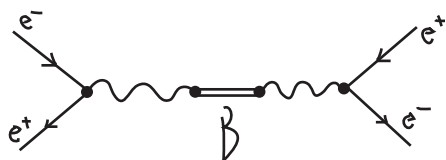
$$\Gamma(H_{q\bar{q}} \rightarrow e^+e^-) = 16\pi \alpha^2 Q^2 \frac{|\Psi(0)|^2}{M^2} \quad (\text{eq. 90.2})$$

Não conseguimos computar $\Psi(0)$ de primeiros princípios, mas podemos usar a expressão do decaimento acima para medi-lo. Por exemplo:

$$\left. \begin{array}{l} \text{meson } \phi: \quad s\bar{s}, 1S, \text{ spin } 1 \\ \Gamma_{\phi \rightarrow e^+e^-} = 1.4 \text{ keV} \\ M_\phi = 1.02 \text{ GeV} \end{array} \right\} |\Psi(0)|^2 = (1.2 \text{ fm})^{-3}$$

↳ escala de tamanho típica de hadrons

Como a presença deste estado muda o espalhamento Bhabha? O processo em que o estado é produzido e então decai certamente contribui para o espalhamento:



Mas, se ao invés de fazer este procedimento misto entre MQ e TQC que fizemos nas últimas páginas, tivéssemos simplesmente calculado o espalhamento Bhabha em teoria de perturbação, em que ponto apareceria o estado ligado?

$$\mathcal{M}(e^-e^+ \rightarrow e^-e^+) = \text{[Diagram 1]} + \text{[Diagram 2]} + \dots$$

↳ e aqui?

↳ não há muons aqui!

As próximas contribuições incluem:

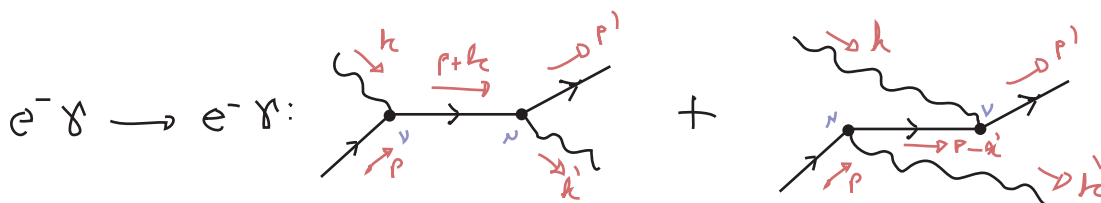


Para a maior parte dos valores de ECM esta série de diagramas dá uma pequena correção ao espalhamento em nível árvore, mas quando $ECM \sim 2mm$ a contribuição destes fica bem grande. É possível mostrar que somar todos os diagramas desta série equivale a resolver a eq. de Schrödinger (neste caso, em que a aproximação relativística é boa). A previsão é que o propagador do fóton desenvolve um novo polo e a seção de choque terá um pico cuja área será dada por 89.2 e a largura por 89.3

Espalhamento Compton

(Peskin 5.5)

Agora nos concentraremos no espalhamento Compton:



a relação entre os dois diagramas é uma troca entre linhas bosônicas, logo não há sinal relativo:

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M} &= \bar{u}(p') \cdot (i e \gamma^\mu) \cdot \frac{i(\not{p} + \not{k} + m)}{(p+k)^2 - m^2} \cdot (i e \gamma^\nu) \cdot u(p) \epsilon_\nu^*(k') \epsilon_\mu(k) + \\
 &+ \bar{u}(p') \cdot (i e \gamma^\nu) \cdot \frac{i(\not{p} - \not{k}' + m)}{(p-k')^2 - m^2} \cdot (i e \gamma^\mu) \cdot u(p) \epsilon_\mu^*(k') \epsilon_\nu(k) = \\
 &= -i e^2 \epsilon_\nu^*(k') \epsilon_\mu(k) \bar{u}(p') \cdot \left[\underbrace{\gamma^\nu \frac{(\not{p} + \not{k} + m)}{(p+k)^2 - m^2} \gamma^\mu}_{2p \cdot k} + \underbrace{\gamma^\mu \frac{(\not{p} - \not{k}' + m)}{(p-k')^2 - m^2} \gamma^\nu}_{-2p \cdot k'} \right] u(p)
 \end{aligned}$$

$p^2 = m^2$
 $k^2 = 0$

$$\left. \begin{aligned}
 (p+k)^2 &= m^2 + 2p \cdot k \\
 (p-k')^2 &= m^2 - 2p \cdot k'
 \end{aligned} \right\}$$

Para simplificar os numeradores usamos uma técnica muito útil, que consiste em usar a equação de Dirac para u e v :

$$\begin{aligned}
 (\not{p} + m) \gamma^\nu u(p) &= (\underbrace{\not{p}_\alpha \gamma^\alpha}_{p_\alpha \gamma^\alpha \gamma^\nu = 2p^\nu - p_\alpha \gamma^\alpha \gamma^\nu} + m) \gamma^\nu u(p) = (2p^\nu - \gamma^\nu \not{p} + \gamma^\nu m) u(p) = \\
 &= 2p^\nu u(p) - \underbrace{\gamma^\nu (\not{p} - m)}_0 u(p)
 \end{aligned}$$

(eq. de Dirac)

Obtemos:

$$i\mathcal{M} = -ie^2 \epsilon_{\nu}^{\lambda*}(k) \epsilon_{\nu}^{\lambda}(k) \bar{u}_{i'}^s(p') \cdot \left[\frac{\gamma^{\nu} \not{k} \gamma^{\nu} + \gamma^{\nu} \not{2p}^{\nu}}{2p \cdot k} + \frac{+\gamma^{\nu} \not{k} \gamma^{\nu} - \gamma^{\nu} \not{2p}^{\nu}}{+2p \cdot k'} \right]_{ij} u_j^s(p)$$

$$-i\mathcal{M}^* = ie^2 \epsilon_{\rho}^{\lambda'}(k') \epsilon_{\sigma}^{\lambda'*}(k) u^{\sigma\dagger}(p) \left[\frac{\gamma^{\rho} \not{k} \gamma^{\sigma} + \gamma^{\rho} \not{2p}^{\sigma}}{2p \cdot k} + \frac{\gamma^{\rho} \not{k} \gamma^{\sigma} - \gamma^{\rho} \not{2p}^{\sigma}}{2p \cdot k'} \right]^{\dagger} \gamma^0 u^{s'}(p') =$$

$\underbrace{\gamma^{\sigma\dagger} \gamma^{\sigma} \gamma^0}_{\gamma^0} u^{s'}(p')$

$$= ie^2 \epsilon_{\rho}^{\lambda'}(k') \epsilon_{\sigma}^{\lambda'*}(k) \bar{u}_{i'}^{s'}(p') \cdot \left[\frac{\gamma^{\sigma} \not{k} \gamma^{\rho} + \gamma^{\sigma} \not{2p}^{\rho}}{2p \cdot k} + \frac{\gamma^{\sigma} \not{k} \gamma^{\rho} - \gamma^{\sigma} \not{2p}^{\rho}}{2p \cdot k'} \right]_{i'j'} u_j^s(p')$$

Fazendo a média e soma sobre polarizações:

$$\sum_s u_j^s(p) \bar{u}_{i'}^s(p) = (\not{p} + m)_{j i'}$$

$$\sum_{s'} u^{s'}(p')_{j'} \bar{u}_{i'}^{s'}(p') = (\not{p}' + m)_{j' i'}$$

$$\sum_{\lambda} \epsilon_{\sigma}^{\lambda*}(k) \epsilon_{\nu}^{\lambda}(k) \rightarrow -g_{\sigma\nu}$$

$$\sum_{\lambda'} \epsilon_{\rho}^{\lambda'}(k') \epsilon_{\nu}^{\lambda'*}(k') \rightarrow -g_{\rho\nu}$$

obtemos:

$$\frac{1}{2} \frac{1}{2} \sum_{s, s', \lambda, \lambda'} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4} g_{\rho\mu} g_{\nu\sigma} \text{Tr} \left\{ (\not{p} + m) \left[\frac{\gamma^{\mu} \not{k} \gamma^{\rho} + \gamma^{\mu} \not{2p}^{\rho}}{2p \cdot k} + \frac{\gamma^{\mu} \not{k} \gamma^{\rho} - \gamma^{\mu} \not{2p}^{\rho}}{2p \cdot k'} \right] \times \right.$$

$$\left. \times (\not{p}' + m) \cdot \left[\frac{\gamma^{\nu} \not{k} \gamma^{\nu} + \gamma^{\nu} \not{2p}^{\nu}}{2p \cdot k} + \frac{\gamma^{\nu} \not{k} \gamma^{\nu} - \gamma^{\nu} \not{2p}^{\nu}}{+2p \cdot k'} \right] \right\} =$$

$$= \frac{e^4}{4} \left\{ \frac{1}{(2p \cdot k)^2} \text{Tr} \left[(\not{p} + m) (\gamma_{\mu} \not{k} \gamma_{\nu} + \gamma_{\mu} \not{2p}_{\nu}) (\not{p}' + m) (\gamma^{\nu} \not{k} \gamma^{\nu} + \gamma^{\nu} \not{2p}^{\nu}) \right] + \right.$$

$$+ \frac{1}{(2p \cdot k)(2p \cdot k')} \text{Tr} \left[(\not{p} + m) (\gamma_{\mu} \not{k} \gamma_{\nu} + \gamma_{\mu} \not{2p}_{\nu}) (\not{p}' + m) (\gamma^{\nu} \not{k} \gamma^{\nu} - \gamma^{\nu} \not{2p}^{\nu}) \right] +$$

$$+ \frac{1}{(2p \cdot k')(2p \cdot k)} \text{Tr} \left[(\not{p} + m) (\gamma_{\mu} \not{k} \gamma_{\nu} - \gamma_{\mu} \not{2p}_{\nu}) (\not{p}' + m) (\gamma^{\nu} \not{k} \gamma^{\nu} + \gamma^{\nu} \not{2p}^{\nu}) \right] +$$

$$\left. + \frac{1}{(2p \cdot k')^2} \text{Tr} \left[(\not{p} + m) (\gamma_{\mu} \not{k} \gamma_{\nu} - \gamma_{\mu} \not{2p}_{\nu}) (\not{p}' + m) (\gamma^{\nu} \not{k} \gamma^{\nu} - \gamma^{\nu} \not{2p}^{\nu}) \right] \right\}$$

notando que:

$$\text{I} (k \rightarrow -k') = \text{Tr} \left[(\not{p} + m) (-\gamma_{\mu} \not{k}' \gamma_{\nu} + \gamma_{\mu} \not{2p}_{\nu}) (\not{p}' + m) (-\gamma^{\nu} \not{k}' \gamma^{\nu} + \gamma^{\nu} \not{2p}^{\nu}) \right] = \text{IV}$$

$$II = \text{Tr} \left[(\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu - \gamma^\nu \not{p}') (\not{p}' + m) (\gamma_\mu \not{k} \gamma_\nu + \gamma_\nu \not{p}) (\not{p} + m) \right] = III$$

↳ revertendo a ordem das matrizes, conforme eq 71.3

vemos que só é necessário calcular I e II

$$I = \text{Tr} \left[(\not{p} + m) (\gamma_\mu \not{k} \gamma_\nu + \gamma_\nu \not{p}) (\not{p}' + m) (\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu + \gamma^\nu \not{p}') \right]$$

que podemos resolver usando a tecnologia de traços mostrada nas páginas 69 a 72, por exemplo:

$$\text{Tr} \left[\not{p} \gamma_\mu \not{k} \gamma_\nu \not{p}' \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu \right] = -2 \text{Tr} \left[\not{p} \gamma_\nu \not{k} \not{p}' \not{k} \gamma^\nu \right] = 4 \text{Tr} \left[\not{p} \not{k} \not{p}' \not{k} \right] = 32 (p \cdot k) (p' \cdot k)$$

$\gamma_\mu \gamma^\mu \gamma_\nu \gamma^\nu = -2 \gamma^\mu \gamma^\mu = -2 \cdot 4 = -8$ (eq. 71.5)
 $\gamma_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\mu = -2 \gamma^\mu \gamma^\mu = -8$ (eq. 72.2)

Ou usamos uma implementação mais moderna desta tecnologia:

```
<< FeynCalc`
ScalarProduct[k, k] = 0;
(GS[p]).(GA[\[Nu]].GS[k].GA[\[Mu]]).(GS[p\Prime])).(GA[\[Mu]].GS[k].GA[\[Nu]]) // TR
```

No caso do traço completo:

```
ScalarProduct[k, k] = 0; ScalarProduct[p, p] = m^2;
ScalarProduct[p\Prime, p\Prime] = m^2;
(GS[p] + m).(GA[\[Nu]].GS[k].GA[\[Mu]] +
  2 GA[\[Mu]] FV[p, \[Nu]]).(GS[p\Prime] +
  m).(GA[\[Mu]].GS[k].GA[\[Nu]] + 2 FV[p, \[Nu]] GA[\[Mu]]) // TR
```

↳ $I = 32(2m^2(k \cdot p) - m^2(k \cdot p') + (k \cdot p)(k \cdot p') - m^2(p \cdot p') + 2m^4)$

Isso fica mais simples em termos de variáveis de Mandelstam:

$$\begin{aligned} s &= (p+k)^2 = 2p \cdot k + m^2 = 2p' \cdot k' + m^2 \\ t &= (p'-p)^2 = -2p \cdot p' + 2m^2 = -2k \cdot k' \\ u &= (k'-p)^2 = -2k' \cdot p + m^2 = -2k \cdot p' + m^2 \end{aligned}$$

podemos sempre escrever a resposta em termos de apenas duas usando $s+t+u=2m^2$

```
SetMandelstam[s, t, u, p, k, -p\Prime, -k\Prime, m, 0, m, 0];
TrickMandelstam[TrI, {s, t, u, 2 m^2}]
```

↳ $I = 8(m^4 + m^2(3s+u) - su) = 16(2m^4 + m^2(s-m^2) - \frac{1}{2}(s-m^2)(u-m^2))$

Podemos obter IV fazendo as mudanças:

$$k \rightarrow -k' \Rightarrow \begin{aligned} S &= (P+k)^2 \rightarrow (P-k')^2 = u \\ u &= (k'-P)^2 \rightarrow (-k-P)^2 = S \end{aligned}$$

$$\text{IV} = 16 \left(2m^4 + m^2(u-m^2) - \frac{1}{2}(u-m^2)(S-m^2) \right)$$

Obtemos os outros dois da mesma forma:

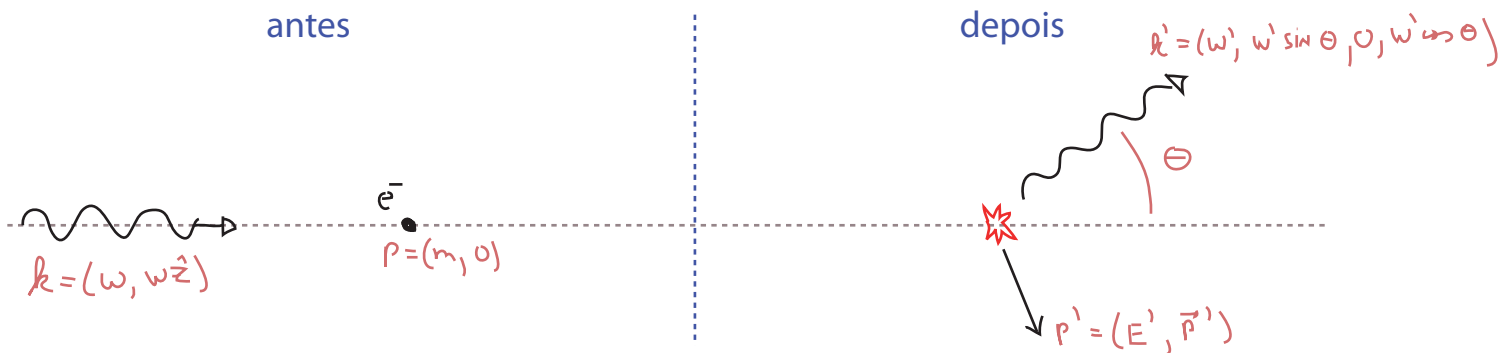
$$\text{II} = \text{III} = -8 \left(4m^4 + m^2(S-m^2) + m^2(u-m^2) \right)$$

Juntando tudo e voltando para as variáveis $(P \cdot k)$ e $(P \cdot k')$ temos:

$$\frac{1}{4} \sum |M|^2 = 2e^4 \left[\frac{P \cdot k'}{P \cdot k} + \frac{P \cdot k}{P \cdot k'} + 2m^2 \left(\frac{1}{P \cdot k} - \frac{1}{P \cdot k'} \right) + m^4 \left(\frac{1}{P \cdot k} - \frac{1}{P \cdot k'} \right)^2 \right]$$

(eq. 94.1)

Escolhemos agora um referencial (que é o de repouso do elétron inicial):



$$P \cdot k = m\omega$$

$$S = 2P \cdot k + m^2 = 2m\omega + m^2$$

$$P \cdot k' = m\omega'$$

$$u = -2k' \cdot P + m^2 = -2m\omega' + m^2$$

esta seção de choque pode ser expressa apenas em termos de ω e θ , para eliminar ω' :

$$\begin{aligned} m^2 &= (P')^2 = (P + k - k')^2 = P^2 + \underbrace{2P \cdot (k - k')}_{2m(\omega - \omega')} - \underbrace{2k \cdot k'}_{-2\omega \cdot \omega'(1 - \cos \theta)} = \\ &= m^2 + 2m(\omega - \omega') - 2\omega \cdot \omega'(1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega} = \frac{1}{m} (1 - \cos \theta) \quad (\text{eq. 94.2})$$

que é justamente a fórmula de Compton para a mudança no comprimento de onda do fóton espalhado. Usaremos a na seguinte forma:

$$\omega' = \frac{\omega}{1 + \frac{\omega}{m} (1 - \cos \theta)} \quad (\text{eq. 94.3})$$

$$d\sigma = \frac{1}{2\omega 2m |\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_p|} \frac{1}{8\pi} \int_{-1}^1 d(\cos\theta) \frac{(\omega')^2}{\omega m} \left(\frac{1}{4} \sum |M|^2 \right)$$

$\left| \frac{k_z}{\omega} - \frac{p_z}{m} \right| = 1$

(eq. 95.1)

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{(\omega')^2}{32\pi\omega^2 m^2} \frac{2e^4}{\omega^2 \omega'^2} \left[m^2(\omega - \omega')^2 + 2m\omega\omega'(\omega' - \omega) + \omega\omega'(\omega^2 + \omega'^2) \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\cos\theta} &= \frac{\pi\alpha^2}{m^2} \frac{1}{\omega^4} \left[m^2(\omega - \omega')^2 + 2m\omega\omega'(\omega' - \omega) + \omega\omega'(\omega^2 + \omega'^2) \right] = \\ &= \frac{\pi\alpha^2}{m^2} \frac{1}{\omega^4} \left[m^2\omega^2 - 2m^2\omega\omega' + m^2\omega'^2 - 2m\omega^2\omega' + 2m\omega\omega'^2 + \omega^3\omega' + \omega\omega'^3 \right] = \\ &= \frac{\pi\alpha^2}{m^2} \frac{\omega'^2}{\omega^2} \left[\frac{m^2}{\omega'^2} - \frac{2m^2}{\omega\omega'} + \frac{m^2}{\omega^2} - \frac{2m}{\omega'} + \frac{1}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} \right] \\ &= \frac{m^2\omega^2 - 2m^2\omega\omega' + m^2\omega'^2 - 2m\omega^2\omega' + 2m\omega\omega'^2 + \omega^3\omega' - \omega\omega'^2}{\omega^2\omega'^2} = \cos^2\theta - 1 \end{aligned}$$

$\omega' = \frac{m\omega}{m + \omega - \omega\cos\theta} \rightarrow \cos\theta = \frac{-m\omega + m\omega' + \omega\omega'}{\omega\omega'}$

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{m^2} \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \left[\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - \sin^2\theta \right] \quad (\text{eq. 96.1})$$

Fórmula de Klein-Nishina

No limite $\omega \rightarrow 0$ (grandes comprimentos de onda) vemos que:

$$\omega' = \frac{m\omega}{m + \omega - \omega\cos\theta} \Rightarrow \frac{\omega'}{\omega} = \frac{m}{m + \omega(1 - \cos\theta)} \approx 1$$

$\omega \sim 0$

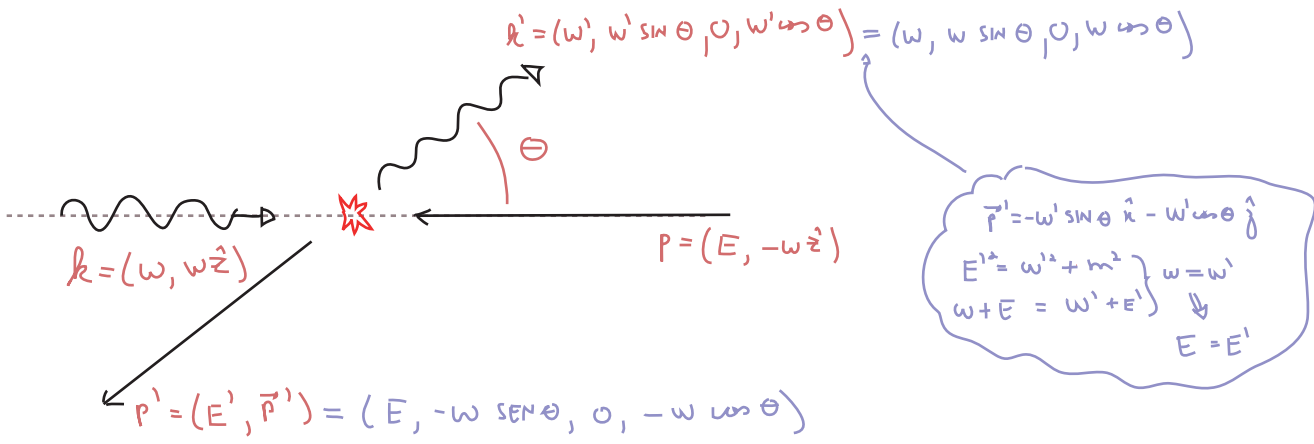
$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{m^2} \left[1 + \cos^2\theta \right] \quad (\text{eq. 96.2})$$

$$\sigma_{\text{TOT}} = \frac{8\pi\alpha^2}{3m^2} \quad (\text{eq. 96.3})$$

Espalhamento Thomson

Comportamento em altas energias

Para analisar o comportamento em altas energias vamos adotar o referencial do CM:



$$p \cdot k = w(E + w)$$

$$S = (p + k)^2 = (E + w)^2$$

$$p \cdot k' = w(E + w \cos \theta)$$

$$u = (k' - p)^2 = (w - E)^2 - w^2 \sin^2 \theta - w^2 (\cos \theta + 1)^2 = (E - w)^2 - 2w^2(1 + \cos \theta)$$

$$t = (k' - k)^2 = -2k \cdot k' = -2w^2(1 - \cos \theta)$$

Tomemos o limite para altas energias e $\theta \approx \pi$:

$$\frac{p \cdot k}{p \cdot k'} = \frac{E + w}{E + w \cos \theta} \underset{\theta \approx \pi}{\approx} \frac{E + w}{E - w} \gg 1 \Rightarrow \frac{p \cdot k'}{p \cdot k} \ll 1$$

$$E^2 - w^2 = m^2 \Rightarrow E - w = E - \sqrt{E^2 - m^2} \approx 0 \quad \begin{matrix} \uparrow \\ E \gg m \end{matrix}$$

$$\frac{1}{p \cdot k} - \frac{1}{p \cdot k'} = \frac{1}{w(E + w)} - \frac{1}{w(E + w \cos \theta)} \underset{\theta \approx \pi}{\approx} \frac{1}{w(E + w)} - \frac{1}{w(E - w)} = \frac{E - w - E - w}{w(E^2 - w^2)} = -\frac{2}{m^2}$$

logo o termo $\frac{p \cdot k}{p \cdot k'}$ domina a eq 94.1:

$$\frac{1}{4} \sum |M|^2 = 2e^4 \left[\frac{p \cdot k'}{p \cdot k} + \frac{p \cdot k}{p \cdot k'} + 2m^2 \left(\frac{1}{p \cdot k} - \frac{1}{p \cdot k'} \right) + m^4 \left(\frac{1}{p \cdot k} - \frac{1}{p \cdot k'} \right)^2 \right] = 2e^4 \frac{E + w}{E + w \cos \theta}$$

Para altas energias podemos fazer a aproximação:

$$E = \sqrt{w^2 + m^2} = w \sqrt{1 + \frac{m^2}{w^2}} = w \left(1 + \frac{m^2}{2w^2} + \mathcal{O}\left(\frac{m^4}{w^4}\right) \right) \rightarrow E \approx w \gg m$$

$$E + w \cos \theta \approx w \left(1 + \cos \theta + \frac{m^2}{2w^2} \right)$$

manteremos este fator de m apenas aqui, quando $E + w \cos \theta$ aparecer no denominador, pois neste caso ele regulariza uma divergência em $\theta = \pi$. Em todos os outros lugares ele é desprezível

Logo: $S = (E + \omega)^2 \simeq 4\omega^2$

$$\frac{1}{4} \sum |M|^2 \simeq \frac{4e^4}{1 + \cos\theta + \frac{m^2}{2\omega^2}}$$

A seção de choque neste referencial fica:

(eq. 38.4)

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \frac{1}{2E \cdot 2\omega} \frac{1}{|v_A - v_B|} \frac{\omega}{16\pi^2 (E + \omega)} \left(\frac{1}{4} \sum |M|^2\right)$$

$v_A = \frac{\omega}{E}$ $v_B = -\frac{\omega}{E}$ $v_A - v_B = \frac{E + \omega}{E} \simeq 2$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\cos\theta}\right) \simeq 2\pi \frac{1}{16\omega^2} \frac{1}{16\pi^2} \frac{4e^4}{1 + \cos\theta + \frac{m^2}{2\omega^2}} = \frac{2\pi\alpha^2}{2m^2 + S(1 + \cos\theta)}$$

(eq. 98.1)

Onde vemos que sem a massa do elétron teríamos uma divergência para $\theta = \pi$. Fazendo a integral angular:

$$\int_{-1}^1 d(\cos\theta) \frac{d\sigma}{d\cos\theta} \simeq \frac{2\pi\alpha^2}{S} \int_{-1}^1 d(\cos\theta) \frac{1}{2\frac{m^2}{S} + (1 + \cos\theta)} \simeq \frac{2\pi\alpha^2}{S} \text{Log} \left(\frac{m^2 + S}{m^2} \right)$$

Fazendo o limite sem massa na eq. 94.1:

(94.1)

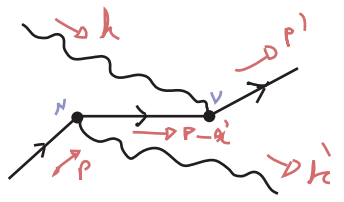
$$\frac{1}{4} \sum |M|^2 = -2e^4 \left[\frac{u}{S} + \frac{S}{u} \right]$$

(eq. 98.2)

e lembrando que: $S \simeq 4\omega^2$

$$u = (E - \omega)^2 - 2\omega^2(1 + \cos\theta) \simeq -2\omega^2(\cos\theta + 1)$$

vemos que esta divergência vem do segundo termo de 98.2, da troca de fótons no "canal u". Isto não é muito surpreendente, uma vez que na amplitude da pg 91 tínhamos:



$$= \bar{u}(p') \cdot (ie\gamma^\nu) \cdot \frac{i(p-k+m)}{(p-k)^2 - m^2} \cdot (ie\gamma^\mu) \cdot u(p) \epsilon_\mu^*(k') \epsilon_\nu(k)$$

(eq. 98.3)

Logo era de se esperar uma divergência no caso em que $u \simeq m^2 \ll S$

O que é um pouco inesperado é que temos apenas $1/u$, ao invés de $1/u^2$ (lembre se que $\sigma \sim |M|^2$)

Vamos definir $\chi \equiv \pi - \theta$

e olhar valores $\chi \gg \frac{m}{\omega}$ mas que ainda: $\cos \chi \simeq 1 - \frac{\chi^2}{2}$

$$\cos(\theta) = \cos(\chi + \pi) = -\cos(\chi)$$

$$(p - k')^2 - m^2 = -2p \cdot k' = -2\omega(E + \omega \cos \theta) \simeq -2\omega^2 \left(1 + \frac{m^2}{2\omega^2} - \cos(\chi) \right) \simeq -(m^2 + \omega^2 \chi^2)$$

Isto é pequeno comparado com s para diversos valores de χ , de fato sempre que $\frac{m}{\omega} \ll \chi \ll 1$ este denominador será dominado por χ^2 e era de se esperar que a seção de choque fosse dominada por χ^4 . Deve haver algo introduzindo um fator χ no numerador do elemento de matriz. Olhemos a seção de choque polarizada.

Suponha: $e_{\text{INICIAL}}^- = e_R^-$

pode ser desprezado na região em questão

o elemento de matriz em questão: $\bar{u}(p') \cdot (i e \gamma^\nu) \cdot \lambda(p - k + m) \cdot (i e \gamma^\mu) \cdot u(p)$

há sempre três matrizes γ aqui

logo: $\bar{u}(p') \not{\epsilon} \not{\epsilon} \not{\epsilon} P_R u_R(p) = \bar{u}(p') P_L \not{\epsilon} \not{\epsilon} \not{\epsilon} u^R(p) = \bar{u}_R(p') \not{\epsilon} \not{\epsilon} \not{\epsilon} u^R(p)$

ou seja: $e_{\text{INICIAL}}^- = e_R^- \rightarrow e_{\text{FINAL}}^- = e_R^-$

agora: $u_R(p) = P_R \sqrt{2E} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 - \hat{p} \cdot \vec{\sigma}) \xi \\ \frac{1}{2}(1 + \hat{p} \cdot \vec{\sigma}) \xi \end{pmatrix} = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}(1 + \hat{p} \cdot \vec{\sigma}) \xi \end{pmatrix} = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi \end{pmatrix} = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(\hat{p} \cdot \vec{\sigma}) \xi = \xi$ $\hat{p} = -\hat{z}$ $\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\hat{p}' \simeq \hat{z} \rightarrow \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\bar{u}_R(p') = u_R^+(p') \gamma^0 = \sqrt{2E'} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2E'} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

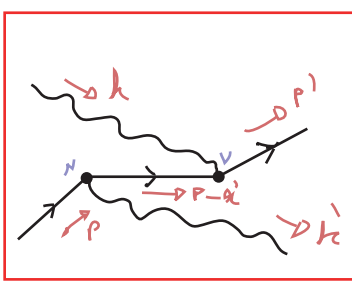
$$\gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\mu P_R = \gamma^\nu \gamma^\alpha P_L \gamma^\mu = P_L \gamma^\nu P_R \gamma^\alpha P_L \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\nu \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \bar{\sigma}^\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}$ $P_L \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
 $P_R \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\nu \bar{\sigma}^\alpha \sigma^\mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{u}_R(p') \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\mu u_R(p) = 2E (1 \ 0) \cdot \sigma^\nu \cdot \bar{\sigma}^\alpha \cdot \sigma^\mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

logo:



$$= -ie^2 \epsilon_\mu^*(k') \epsilon_\nu(k) 2E (1 \ 0) \cdot \sigma^\nu \frac{\bar{v} \cdot (p - k')}{-(m^2 + \omega^2 \chi^2)} \sigma^\mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

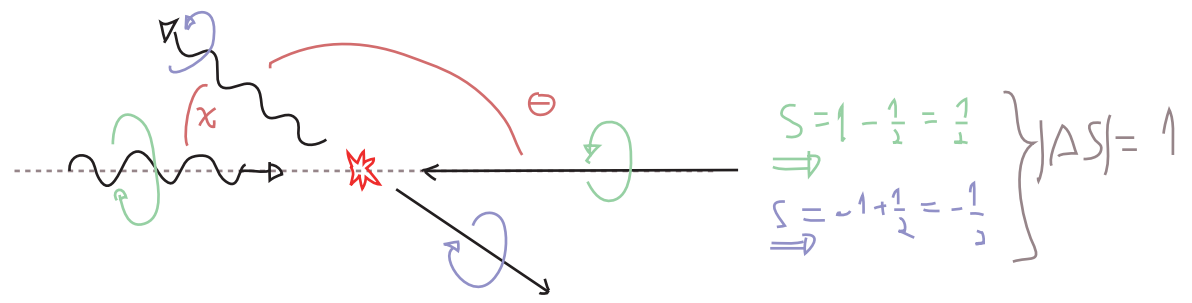
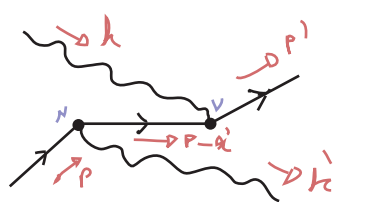
se o fóton inicial for de mão esquerda: $\epsilon_\nu^-(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, -i, 0)$ (eq. 100.1)

$$\sigma^\nu \epsilon_\nu^-(k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} = 0$$

portanto o fóton deve ser de mão direita: $\epsilon_\nu^+(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, i, 0) \Rightarrow (1 \ 0) \cdot (\epsilon_\nu^+(k) \sigma^\nu) = (0 \ \sqrt{2})$

no caso do foton final vale o mesmo (deve ser de mão direita, mas neste caso se propagando na direção -z):

$$\epsilon_\nu^+(k') = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, -i, 0) \rightarrow \epsilon_\nu^*(k') \sigma^\nu = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\approx -ie^2 2E (1 \ 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \frac{\bar{v} \cdot (p - k')}{-(m^2 + \omega^2 \chi^2)} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\approx -ie^2 2E (0 \ \sqrt{2}) \frac{\bar{v} \cdot (p - k')}{-(m^2 + \omega^2 \chi^2)} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$(0 \ \sqrt{2}) \sigma^1 (0 \ \sqrt{2}) = 2$
 $(0 \ \sqrt{2}) \sigma^3 (0 \ \sqrt{2}) = 0$
 $\sigma^2 (p - k')_2 = 0$

$\sigma^1 = -\sigma^2$
 $\Rightarrow +ie^2 \frac{4E (p - k')_1}{-(m^2 + \omega^2 \chi^2)} \Rightarrow (p - k')_1 = +\omega \text{sen}(\theta) = -\omega \text{sen}(\chi)$
 $\approx -\omega \chi$

Que era o fator que procurávamos e indica que o estado final carrega momento angular (em onda p)

$$M(e_R^- \gamma_R \rightarrow e_R^- \gamma_R) \approx \frac{4e^2 \chi}{\chi^2 + \frac{m^2}{\omega^2}}$$

(eq. 101.1)

$$\approx M(e_L^- \gamma_L \rightarrow e_L^- \gamma_L)$$

seguinto basicamente os mesmos passos acima

Note que para $\chi = 0 \rightarrow M(e_R^- \gamma_R \rightarrow e_R^- \gamma_R) = 0$

o que nos força a levar em conta o termo de massa também no numerador:

$$\bar{u}(p') (i e \gamma^\nu) i (\not{p} - \not{k}' + m) (i e \gamma^\nu) u(p)$$

háviamos desprezado esta parte

este termo contém uma matriz de Dirac a menos do que a parte com $\not{p} - \not{k}'$, e portanto converterá um elétron de mão direita em um de mão esquerda:

$$e_{\text{INICIAL}}^- = e_R^- \rightarrow e_{\text{FINAL}}^- = e_L^-$$

$$\vec{p}' \approx \vec{p} \rightarrow \xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_R(p) = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \bar{u}_L(p') = \sqrt{2E'} \left(\frac{1}{2} \xi^\dagger (1 - \vec{p}' \cdot \vec{\sigma}) \quad 0 \quad 0 \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2E'} (0 \ 0 \ 0 \ 1)$$

$$\bar{u}_L(p') \gamma^\nu \gamma^\nu u_R(p) = 2E (0 \ 0 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2E (0 \ 1) \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$iM = -ie^2 \epsilon_\mu^*(k') \epsilon_\nu(k) 2E (0 \ 1) \cdot \frac{m \vec{\sigma}^\nu \sigma^\mu}{-(m^2 + \omega^2 \chi^2)} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

essa diferença nos espinores muda também a polarização do fóton inicial:

$$(0 \ 1) \cdot \epsilon_\nu(k) \vec{\sigma}^\nu = \begin{cases} (\sqrt{2} \ 0) & \leftrightarrow E_V^{(-)}(k) \quad (\text{mão esquerda}) \\ 0 & \leftrightarrow E_V^{(+)}(k) \end{cases}$$

(o fóton final não muda pois continua contraído com eletron de mão direita)

$$M(e_R^- \gamma_L \rightarrow e_L^- \gamma_R) \approx \frac{E 4e^2 m}{(m^2 + \omega^2 \chi^2)} \approx \frac{4e^2 \frac{m}{\omega}}{\chi^2 + \frac{m^2}{\omega^2}} \approx M(e_L^- \gamma_R \rightarrow e_R^- \gamma_L)$$

(eq. 101.2)

Somando todos os espalhamentos em 101.1 e 101.2 e lembrando do fator 1/4 da média sobre as polarizações iniciais, podemos escrever (usando a eq. 38.4):

$$\frac{d\sigma}{d(\omega d\theta)} \approx \underbrace{2\pi}_{\int d\phi} \underbrace{\frac{1}{2\omega 2\omega \cdot 2}}_{\frac{1}{2E_\mu E_\nu |\omega_2 - \omega_1|}} \underbrace{\frac{\omega}{16\pi^2 2\omega}}_{\frac{1}{16\pi^2 E_\mu E_\nu}} \underbrace{\frac{1}{4}}_{\frac{1}{4} \sum |M|^2} \left[\frac{32e^4 \chi^2}{(\chi^2 + \frac{m^2}{\omega^2})^2} + \frac{32e^4 \frac{m}{\omega}}{(\chi^2 + \frac{m^2}{\omega^2})^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2\omega \cdot 2\omega \cdot 2} \frac{e^4}{2\pi} \frac{1}{\left(\chi^2 + \frac{m^2}{\omega^2}\right)^2} \left[\chi^2 + \frac{m^2}{\omega^2} \right] = \frac{4\pi\alpha^2}{s\left(\chi^2 + \frac{m^2}{s}\right)}$$

$$\frac{d\sigma}{d(\omega \theta)} \approx \frac{4\pi\alpha^2}{s\left(\chi^2 + \frac{m^2}{\omega^2}\right)^2} \left[\chi^2 + \frac{m^2}{\omega^2} \right] = \frac{4\pi\alpha^2}{s\left(\chi^2 + \frac{m^2}{s}\right)} \quad (\text{eq. 102.1})$$

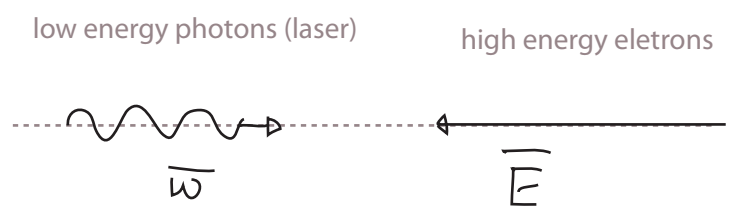
(que concorda com 98.1)

↪ helicity flip part

Esta separação entre a parte que inverte a polarização e a que não inverte nos permite diversas aplicações, imagine a situação:

Espalhamento Compton reverso

Lab Frame



Definimos: $\omega' \equiv \gamma \bar{E}$
 ↪ energia do fóton espalhado

No limite em que $s = 4\bar{E}\omega \gg m^2$ é possível mostrar que: $\gamma \approx \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) \approx 1 - \frac{\chi^2}{4}$ (eq. 102.2)

↪ para $\theta \sim \pi$
 ↪ ângulo no referencial do CM

e podemos colocar a equação 102.1 na forma:

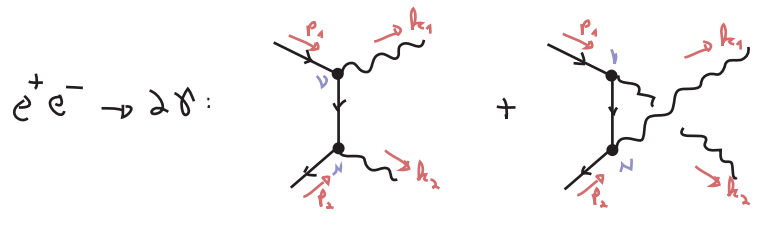
$$\frac{d\sigma}{d\gamma} \approx \frac{2\pi\alpha^2}{s\left((1-\gamma) + \frac{m^2}{s}\right)^2} \left[\underbrace{(1-\gamma)}_{\text{helicidade preservada}} + \underbrace{\frac{m^2}{s}}_{\text{"helicity flip"}} \right] \quad (\text{eq. 102.3})$$

Suponha que o laser seja polarizado em fótons de mão direita, e os eletrons não são polarizados (logo temos eletrons de ambas as helicidades para espalhar o foton nos canais que preservam helicidade e a invertem). Podemos concluir algumas coisas:

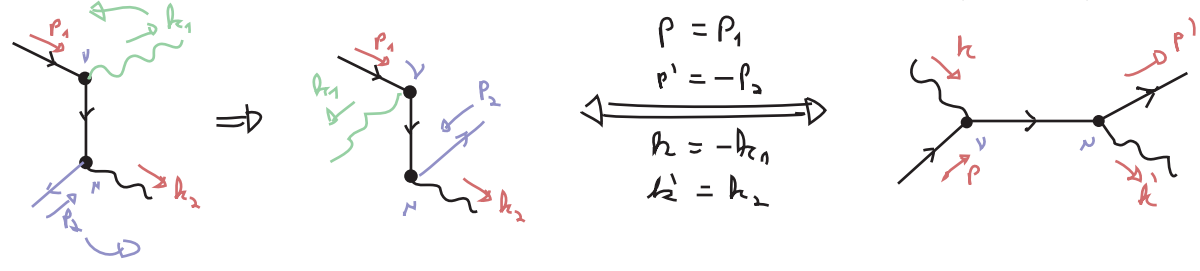
- (1) os fótons com maior energia ($\gamma \sim 1$) sairão na direção $\theta \sim \pi$ (no ref. do CM) e terão polarização de mão esquerda pois a parte que preserva helicidade é praticamente zero.

(2) assim que saímos desta região $\theta \sim \pi$ o canal que preserva a helicidade domina e a maioria dos fótons é de mão direita.

Aniquilação $e^+ e^- \rightarrow 2\gamma$



Este processo está ligado ao espalhamento Compton por crossing symmetry:

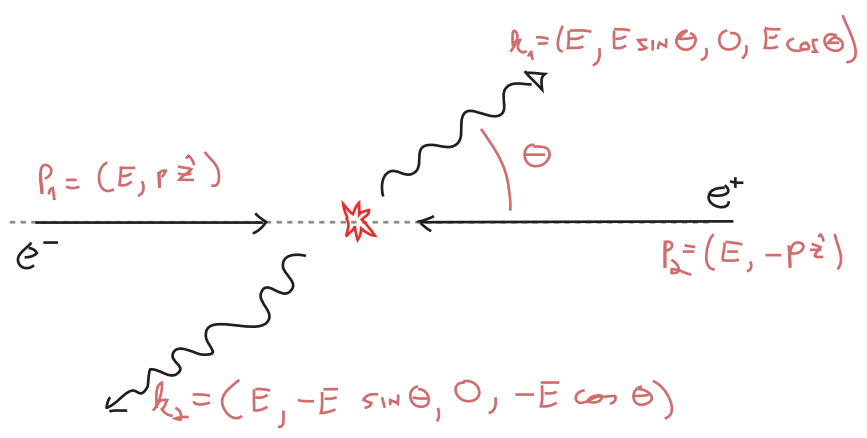


Fazendo estas substituições em 94.1, temos:

$$\frac{1}{4} \sum |M|^2 = -2e^4 \left[\frac{p_1 \cdot k_2}{p_1 \cdot k_1} + \frac{p_1 \cdot k_1}{p_1 \cdot k_2} + 2m^2 \left(\frac{1}{p_1 \cdot k_1} + \frac{1}{p_1 \cdot k_2} \right)^2 - m^4 \left(\frac{1}{p_1 \cdot k_1} + \frac{1}{p_1 \cdot k_2} \right)^2 \right]$$

(eq. 103.1)

este sinal é errado, está aqui porque aplicamos a crossing sym. direto em $|M|^2$ se tivéssemos aplicado isso em M e depois tomado o módulo ele não apareceria.



A seção de choque será:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\cos\theta} \right)_{cm} = \frac{2\pi\alpha^2}{s} \left(\frac{E}{p} \right) \left[\frac{E^2 + p^2 \cos^2\theta}{m^2 + p^2 \sin^2\theta} + \frac{2m^2}{m^2 + p^2 \sin^2\theta} - \frac{2m^4}{(m^2 + p^2 \sin^2\theta)^2} \right]$$

(eq. 103.2)

No limite de altas energias: $p^2 \simeq E^2 \Rightarrow E^2 + p^2 \cos^2\theta \simeq E^2 (1 + \cos^2\theta)$

E, desde que evitemos a região de θ em que: $\sin \theta \approx \frac{m}{p}$

podemos escrever: $m^2 + p^2 \sin^2 \theta \approx E^2 \sin^2 \theta$

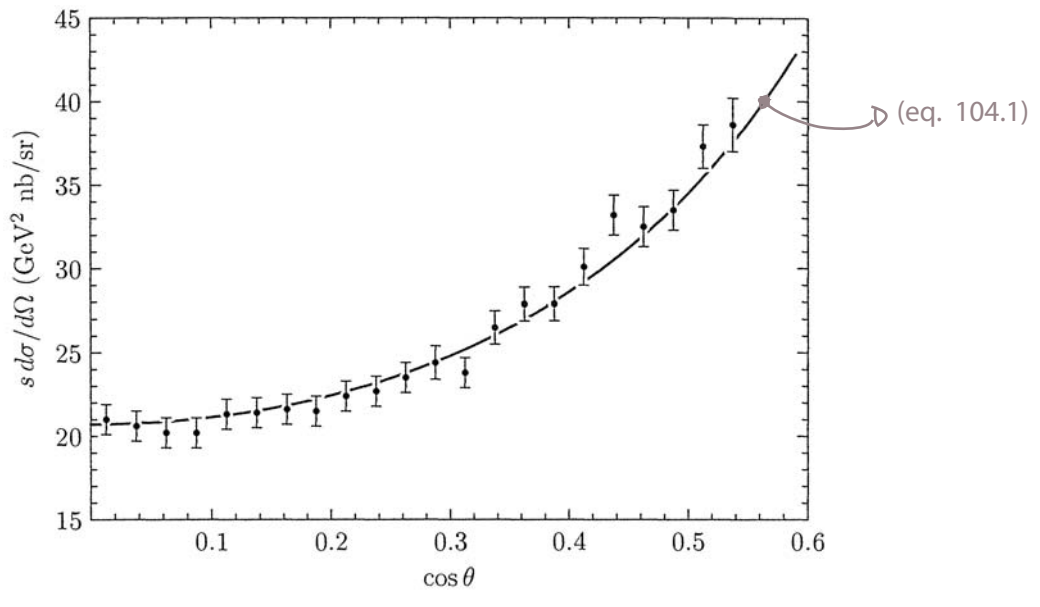
$$\left(\frac{d\sigma}{d\cos\theta} \right)_{cm} = \frac{2\pi\alpha^2}{s} \left(\frac{E}{R} \right) \left[\frac{E^2(1+\cos^2\theta)}{m^2 + p^2 \sin^2\theta} + \frac{2m^2}{m^2 + p^2 \sin^2\theta} - \frac{2m^4}{(m^2 + p^2 \sin^2\theta)^2} \right]$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\cos\theta} \right)_{cm} \approx \frac{2\pi\alpha^2}{s} \frac{(1 + \cos^2\theta)}{\sin^2\theta} \quad (\text{eq. 104.1})$$

Como os dois fótons são idênticos, temos um fator 1/2 a mais depois de integrar:

$$\sigma_{TOT+L} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d(\cos\theta) \frac{2\pi\alpha^2}{s} \frac{(1 + \cos^2\theta)}{(1 - \cos^2\theta)} \quad (\text{eq. 104.2})$$

O resultado da equação 104.1, apesar de ser uma aproximação de um cálculo em primeira ordem de perturbação, descreve bastante bem os dados:



Correções Radiativas

(Peskin 7.1, S. Weinberg QTF - Vol1 - 10.7)

Vamos agora olhar mais profundamente o que acontece com as funções de Green da teoria quando "ligamos" a interação. Começemos com o seguinte objeto:

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | \Omega \rangle$$

estado fundamental (vácuo) da teoria interagente

Como interpretamos este objeto? Tomemos auto-estados de \hat{H} e $\hat{\vec{P}}$:

$$|\lambda_p\rangle$$

Lagrangiana completa

podem ter uma ou mais partículas

Notem que estamos assumindo que \hat{H} e $\hat{\vec{P}}$ comutam. Isto só é verdade porque se tratam de estados livres (a interação corrige o propagador por meio de loops) ou estados representando um conjunto de partículas (ligadas ou não) que tratamos como um único corpo (a energia de ligação já está incluída na massa do estado composto, que por sua vez é livre). Não estamos falando agora de espalhamentos.

Definamos: $|\lambda_0\rangle \rightarrow \hat{\vec{P}} |\lambda_0\rangle = 0$

λ carrega todos os outros números quânticos dos possíveis estados

estado de momento zero

$$\hat{H} |\lambda_0\rangle = E_0(\lambda) |\lambda_0\rangle$$

$$|\lambda_0\rangle \xrightarrow{\text{Boost } \vec{P}} |\lambda_p\rangle$$

A invariância de Lorentz de \hat{H} me diz que $|\lambda_p\rangle$ também é auto-estado de \hat{H}

$$\hat{H} |\lambda_p\rangle = E_p(\lambda) |\lambda_p\rangle$$

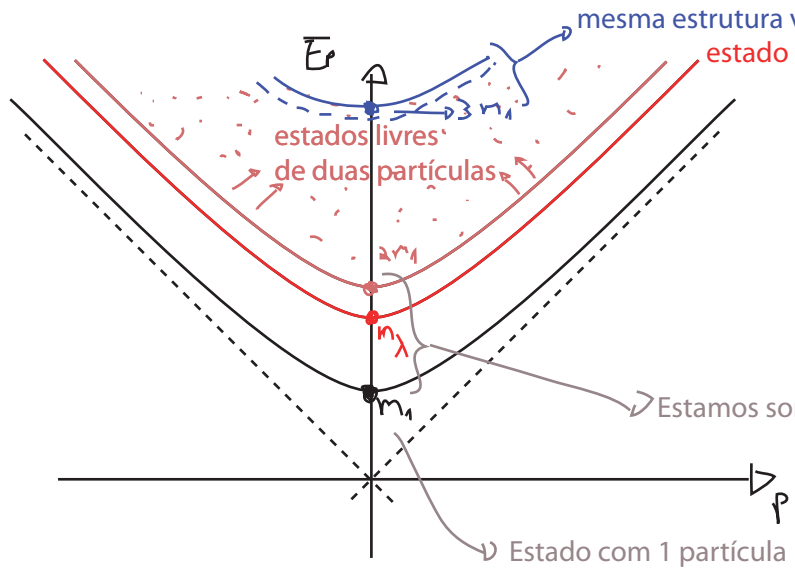
$$E_p(\lambda) \equiv \sqrt{|\vec{p}|^2 + m_\lambda^2}$$

Estou definindo como "massa", a energia do estado em seu referencial de repouso

(o que faz todo sentido para estados de 1 partícula ou mesmo estados ligados)

Qualquer autovalor de H pode ser escrito como um boost de um outro autovalor com momento zero.

Autovalores de $\hat{P}^\mu = (\hat{H}, \hat{\vec{P}})$:



$$\hat{1} = |\Omega\rangle\langle\Omega| + \sum_{\lambda} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p(\lambda)} |\lambda_p\rangle\langle\lambda_p|$$

Estamos somando sobre estes pontos e integrando sobre as curvas

$$x^0 > y^0$$

$$\langle\Omega|T\{\phi(x)\phi(y)\}|\Omega\rangle = \langle\Omega|\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle =$$

$$= \underbrace{\langle\Omega|\phi(x)|\Omega\rangle}_{0} \langle\Omega|\phi(y)|\Omega\rangle + \sum_{\lambda} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p(\lambda)} \langle\Omega|\phi(x)|\lambda_p\rangle \langle\lambda_p|\phi(y)|\Omega\rangle$$

$$\langle\Omega|\phi(x)|\lambda_p\rangle = \langle\Omega| e^{i\hat{P}x} \phi(0) e^{-i\hat{P}x} |\lambda_p\rangle = \langle\Omega|\phi(0)|\lambda_p\rangle e^{-iPx}$$

↳ translação

$P^0 = E_p$

$$= \langle\Omega|U^{-1}U\phi(0)U^{-1}U|\lambda_p\rangle e^{-iPx} = \langle\Omega|\phi(0)|\lambda_0\rangle e^{-iPx}$$

↳ boost de \vec{p} para 0

$U|\lambda_p\rangle = |\lambda_0\rangle$

$P^0 = E_p$ $P^0 = E_p$

$$U\phi(0)U^{-1} = \phi(0) \quad \langle\Omega|U^{-1} = \langle\Omega|$$

↳ para campos de spin maior teríamos que ter mais cuidado aqui (vai para a lista)

$$\langle \Omega | \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p(\lambda)} |\langle \Omega | \phi(\omega) | \lambda_0 \rangle|^2 e^{+i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} e^{-iE_p(x-y_0)} =$$

$$\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{e^{+i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} e^{-iE_p(x-y_0)}}{2E_p(\lambda)} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-i p(x-y)}$$

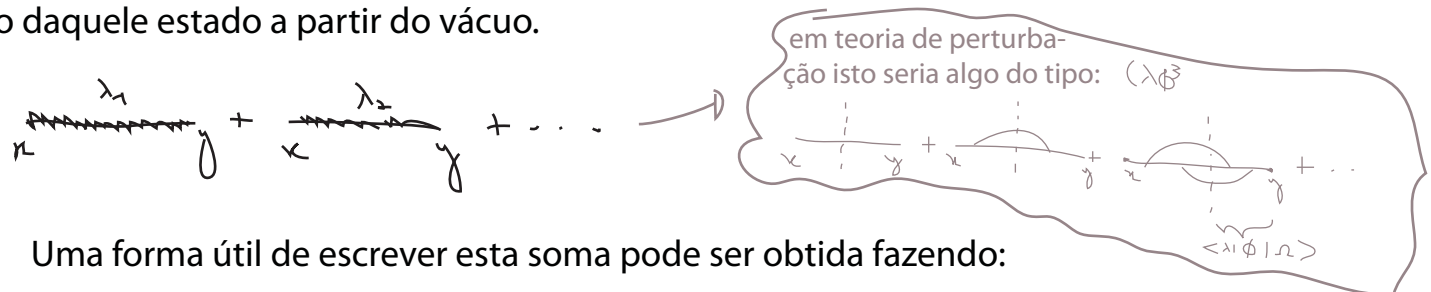
$$D_F(k, m) = \frac{i}{p^2 - m^2}$$

$$= \sum_{\lambda} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m_{\lambda}^2 + i\epsilon} e^{-i p(x-y)} |\langle \Omega | \phi(\omega) | \lambda_0 \rangle|^2$$

Poderíamos fazer o mesmo para o caso $y_0 > x_0$ e obter:

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | \Omega \rangle = \sum_{\lambda} |\langle \Omega | \phi(\omega) | \lambda_0 \rangle|^2 D_F(x-y, m_{\lambda}^2)$$

Note que obtemos o propagador de Feynman com a massa substituída por m_{λ} . Para cada estado λ contribuindo para a função de 2 pontos temos também um "peso" dado pela amplitude de criação daquele estado a partir do vácuo.



Uma forma útil de escrever esta soma pode ser obtida fazendo:

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | \Omega \rangle = \int_0^{\infty} \frac{dM^2}{2\pi} \sum_{\lambda} (2\pi) \delta(M^2 - m_{\lambda}^2) |\langle \Omega | \phi(\omega) | \lambda_0 \rangle|^2 D_F(x-y, M^2) =$$

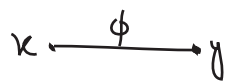
$$\rho(M^2) = \sum_{\lambda} (2\pi) \delta(M^2 - m_{\lambda}^2) |\langle \Omega | \phi(\omega) | \lambda_0 \rangle|^2$$

Densidade espectral

$$= \int_0^{\infty} \frac{dM^2}{2\pi} \rho(M^2) D_F(x-y, M^2)$$

(representação espectral de Källén-Lehmann)

É importante notar que, para um estado intermediário de uma partícula:



teremos $m_\lambda = m$, onde m é o autovalor de energia (para a Hamiltoniana interagente) no referencial de repouso da partícula. Esse estado contribui com uma função $\delta(M^2 - m^2)$ para a densidade espectral

$$\rho(M^2) = 2\pi \delta(M^2 - m^2) \cdot Z + \sigma(M^2)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{|\langle \Omega | \phi(0) | 1_0 \rangle|^2}$

contribuições de estados de 2 ou mais partículas.

estado de 1 partícula com momento zero

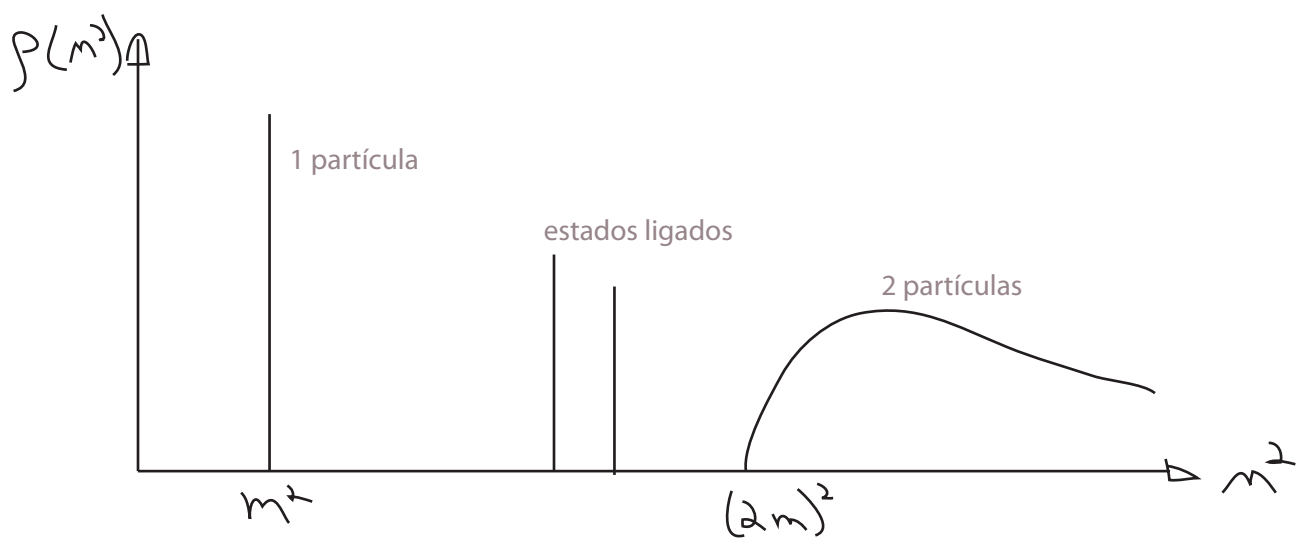
$Z \rightarrow$ Field Strength Renormalization

Esta massa "m" é a massa observável da partícula interagente e vai, em geral, diferir daquela que aparece na lagrangeana, que chamaremos de m_0

$m \rightarrow$ Massa física

$m_0 \rightarrow$ Massa nua (bare mass)

Em relação às contribuições de mais partículas, $\sigma(M^2)$, temos essencialmente duas possibilidades: a partir da energia em que podemos produzir duas ou mais partículas reais "livres" temos um espectro contínuo da massa m_λ . Mas abaixo desta energia podemos, dependendo da interação específica, ter estados ligados de duas ou mais partículas. Neste caso teremos polos adicionais em massas entre m e $2m$. Isto nos leva a uma forma tipicamente do tipo:

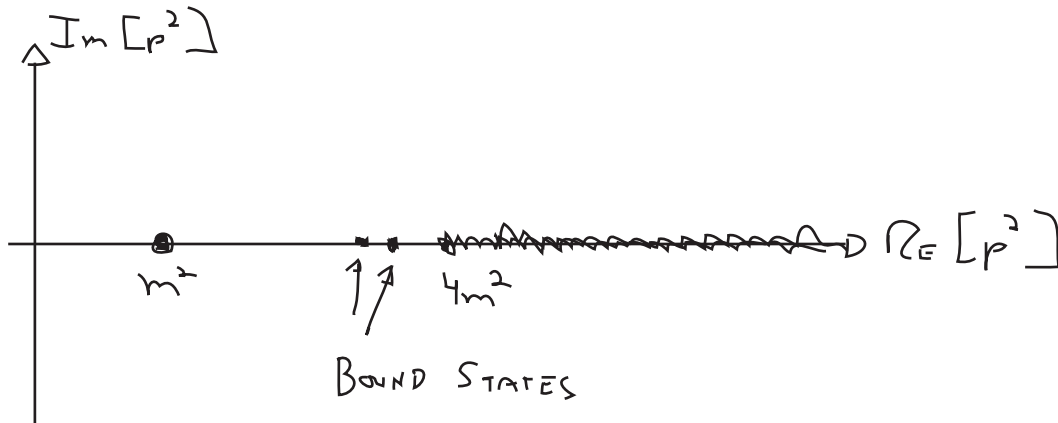


Passando para o espaço dos momentos:

$$\int d^4x e^{iPx} \langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(0) \} | \Omega \rangle = \int_0^\infty \frac{dM^2}{2\pi} \rho(M^2) \frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon}$$

$$= \frac{i Z}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + (\text{BOUND STATES}) + \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dM^2 \sigma(M^2)}{2\pi} \frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon}$$

Que tem a seguinte estrutura analítica no plano complexo:



Comparemos este resultado com o caso de um campo livre:

$$\int d^4x e^{iPx} \langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(0) \} | 0 \rangle = \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon}$$

Os dois são semelhantes e fica claro que temos que levar Z para 1 quando “desligamos” a interação. De fato, é possível mostrar que (veja Weinberg, 10.7):

$$\int_0^{\infty} \rho(M^2) dM^2 = 1$$

&

$$1 = Z + \int_0^{\infty} \sigma(M^2) dM^2$$

O que também nos garante que a contribuição de estados de muitas partículas desaparece na teoria livre.

PS: no caso de espinores de Dirac, o mesmo raciocínio nos levaria a:

$$\int d^4x e^{iPx} \langle \Omega | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(0) \} | \Omega \rangle = \frac{i Z_2 \sum_s \psi^s(p) \bar{\psi}^s(p)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \dots = \frac{i Z_2 (\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \dots$$

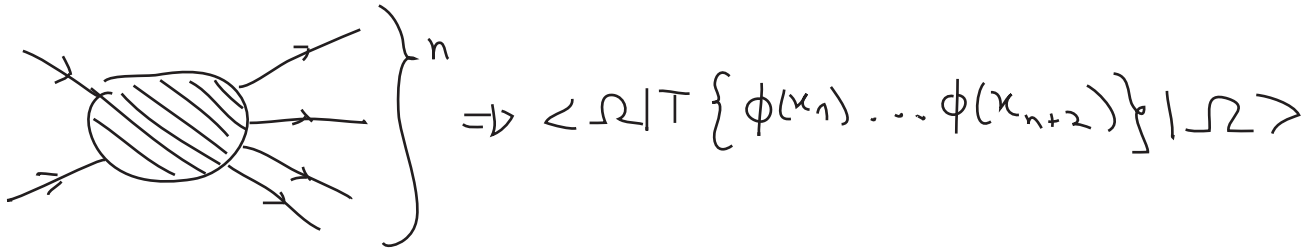
$$\langle \Omega | \psi(0) | p, s \rangle = \sqrt{Z_2} \psi^s(p)$$

PS2: obter de fato a forma da densidade espectral é uma tarefa árdua por tipicamente se tratar de um cálculo não-perturbativo. Um método envolve a utilização de relações de dispersão. Quem estiver interessado pode ler: Weinberg, sec 10.8 ou Peskin, sec 18.4

A matriz S e a fórmula de redução LSZ (Lehmann, Symanzik, Zimmerman)

(Peskin 7.2, Ryder 6.8 e 7.3)

Vamos ver o que acontece quando generalizamos estas idéias para correlatores maiores



Vamos escolher um dos pontos acima (que chamaremos de x) e fazer a transformada de Fourier nele:

$$\int d^4x e^{iPx} \langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

$$\int d^4x = \underbrace{\int_{T_+}^{\infty} dx^0}_{\text{I}} + \underbrace{\int_{T_-}^{T_+} dx^0}_{\text{II}} + \underbrace{\int_{-\infty}^{T_-} dx^0}_{\text{III}}$$

$$T_+ > \forall z_i^0 > T_-$$

Na região I o tempo x^0 é maior que os outros, portanto:

$$\int_{T_+}^{\infty} d^4x \int d^3k e^{iP^0 x^0} e^{-i\vec{P} \cdot \vec{x}} \langle \Omega | \phi(x) T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle = \sum_{\lambda} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{k}}(\lambda)} \langle \Omega | \phi(x) | \lambda_{\vec{k}} \rangle \langle \lambda_{\vec{k}} | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

$$\langle \Omega | \phi(x) | \lambda_k \rangle = \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle e^{-i k x} \quad \left. \begin{array}{l} \text{pg 106} \\ k^0 = E_k(\lambda) \end{array} \right\}$$

$$= \sum_{\lambda} \int_{T_+}^{\infty} d^4 x^0 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \underbrace{\int d^3 x e^{+i \vec{k} \cdot \vec{x}} e^{-i \vec{p} \cdot \vec{x}}}_{(2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{p})} \frac{1}{2E_k(\lambda)} e^{i p^0 x^0} e^{-i E_k x^0} \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle \times \langle \lambda_k | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle =$$

$$= \sum_{\lambda} \int_{T_+}^{\infty} d^4 x^0 \frac{1}{2E_p(\lambda)} e^{-i(E_p - p^0)x^0 - \epsilon x^0} \text{ ← Para garantir convergência} \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle \times \langle \lambda_p | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle =$$

→ será suprimido no que segue, já que próximo ao polo é igual a 1

$$= \sum_{\lambda} \frac{1}{2E_p(\lambda)} \frac{i e^{-i(E_p - p^0)T_+ - \epsilon T_+}}{[p^0 - E_p(\lambda) + i\epsilon]} \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle \langle \lambda_p | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

Esta é uma função de p_0 com singularidades em todos os pontos $E_p(\lambda)$. Se estas singularidades são polos isolados ou cortes vai depender da teoria específica. Vamos nos interessar com o que ocorre próximo ao polo que equivale a uma partícula de massa (física) m .

$$p^2 - m^2 = p_0^2 - |\vec{p}|^2 - m^2 = p_0^2 - \underbrace{(|\vec{p}|^2 + m^2)}_{E_p^2} = (p_0 + E_p)(p_0 - E_p)$$

$$\lim_{p_0 \rightarrow +E_p} p^2 - m^2 = 2E_p(p_0 - E_p)$$

$$\int d^4 x e^{i p x} \langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

$$\underbrace{\lim_{p_0 \rightarrow E_p}}_{\text{estado de 1 partícula com momento } \vec{p}} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \sqrt{Z} \langle \vec{p} | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

$\leftarrow \langle \Omega | \phi_0 | \Omega \rangle \rightarrow$ estado de 1 partícula com momento zero

este símbolo quer dizer "tem polos iguais a" (estamos desprezando os termos finitos)

Se fizermos o mesmo para a região III, veremos que

$$\int d^4x e^{iP \cdot x} \langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

$$\underbrace{P_0 \rightarrow -E_P}_{\sim} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \sqrt{Z} \langle \Omega | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | -\vec{P} \rangle$$

A região II não possui polos em $P_0 \rightarrow E_P$ ou $P_0 \rightarrow -E_P$ se tentássemos o mesmo procedimento chegaríamos a algo na forma:

$$\int d^3k \frac{i}{P_0 - E_{k+p} + E_k}$$

Gostaríamos de continuar fazendo isso para todos os outros campos dentro do produto temporalmente ordenado, mas temos que ter cuidado com o isolamento das partículas externas. A forma de fazer isso é voltar na página 110 e, ao invés da transformada de Fourier, usamos um pacote de onda estreito:

$$\int d^4x e^{iP^0 x_0} e^{-i\vec{P} \cdot \vec{x}} \longrightarrow \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int d^4x e^{iP^0 x_0} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \psi(\vec{k})$$

$\psi(\vec{k})$: distribuição estreita centrada em \vec{p} (voltamos a transformada de Fourier se fizemos esta distribuição virar uma delta de Dirac)

Esta pequena indeterminação no momento da partícula associada faz com que ela fique com a posição contida em uma região do tamanho deste pacote. Retraçando todo o raciocínio acima teremos agora:

$$\sum_{\lambda} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \psi(\vec{k}) \frac{1}{2E_k(\lambda)} \frac{i}{p^0 - E_k(\lambda) + i\epsilon} \langle \Omega | \phi(x) | \lambda_0 \rangle \langle \lambda_k | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

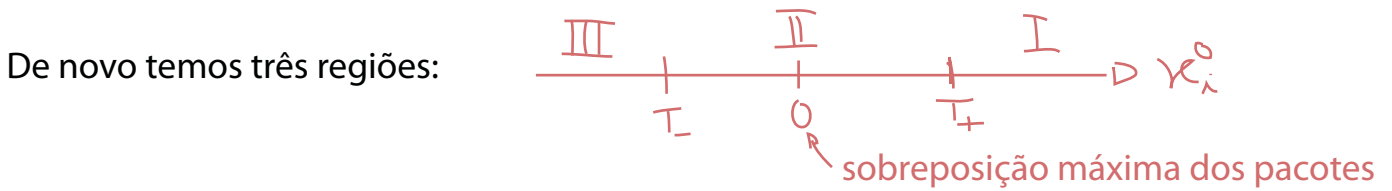
$$\underbrace{\sim}_{P^0 \rightarrow E_P} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{i \psi(\vec{k})}{\tilde{p}^2 - m^2 + i\epsilon} \sqrt{Z} \langle \vec{k} | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

$$\tilde{p} = (P_0, \vec{k})$$

Na prática agora o polo "anda" conforme variamos \vec{k} , ou seja, o polo de uma partícula virou um pequeno corte cujo comprimento é a largura de $\psi(\vec{k})$. A volta ao caso anterior é bem definida conforme estreitamos $\psi(\vec{k})$ até que vire uma delta e o corte volta a ser um polo.

Se fizermos o mesmo para todos os pontos na função de n+2 pontos da página 110, obteremos:

$$\int \prod_{i=1}^{n+2} \left(\frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3} d^4 x_i e^{i \tilde{P}_i x_i} \varphi_i(\vec{k}_i) \right) \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle$$



Se tomarmos os tempos que dividem as regiões suficientemente grandes (para o passado ou futuro) podemos assumir que nestas regiões já não há mais sobreposição alguma dos pacotes e dividir cada uma das integrais anteriores em três regiões, assim como fizemos antes. Mais uma vez, não precisamos nos preocupar com a região II, pois as integrais nessa região resultam em funções analíticas. Pensemos nas regiões I e III, e no caso em que só "empacotamos" dois campos:

$$x_1^0, x_2^0 \in I$$

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle = \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} T \{ \phi(x_3) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle$$

$$\sum_{\lambda} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} \int \prod_{i=1,2} \left(\frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3} d^4 x_i e^{i \tilde{P}_i x_i} \varphi_i(\vec{k}_i) \right)$$

$$\times \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} | \lambda_k \rangle \langle \lambda_k | T \{ \phi(x_3) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle$$

É aqui os pacotes de onda se tornam importantes. Como este estado tem que ser aniquilado por campos que sofrem a restrição de só serem diferentes de zero em locais isolados do espaço ele tem que ser composto de duas excitações distintas e isoladas espacialmente. Neste caso podemos fazer a aproximação:

$$\sum_{\lambda} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} | \lambda_k \rangle \langle \lambda_k | =$$

$$= \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{k_1}} \int \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{k_2}} \langle \Omega | \phi(x_1) | \lambda_{k_1} \rangle \langle \Omega | \phi(x_2) | \lambda_{k_2} \rangle \langle \lambda_{k_1} \lambda_{k_2} |$$

* se pudermos inverter a ordem das duas operações indicadas, fica bem fácil obter os elementos da matriz S. Na prática esquecemos todo o caminho que envolve os pacotes e calculamos o correlator da teoria interagente no espaço dos momentos:

$$\prod_{i=1}^n \int d^4x_i e^{i p_i x_i} \prod_{j=1}^m \int d^4y_j e^{-i k_j y_j} \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \phi(y_1) \dots \phi(y_m) \} | \Omega \rangle$$

$$\sim \left(\prod_{i=1}^n \frac{\sqrt{Z}^i}{p_i^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \left(\prod_{j=1}^m \frac{\sqrt{Z}^i}{k_j^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n | S | \vec{k}_1 \dots \vec{k}_m \rangle$$

(eq. 115.1)

ai basta olhar a função resultante na região em que todas as partículas externas estão "on-shell", perto de seus polos. O coeficiente do produto de todos os polos é o elemento de matriz S.

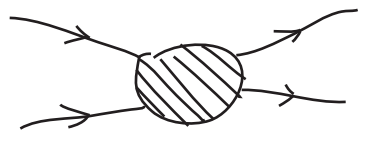
ps: no caso de partículas com spin, teremos fatores tais como $u^s(p)$ acompanhando os propagadores, neste caso temos também que separar estes fatores da matriz S, multiplicando por polarizações que projetem nos estados de spin finais e iniciais do espalhamento que queremos calcular

ps2: também temos que lidar com o fator \sqrt{Z} , podemos identificar quanto ele vale na função de dois pontos de cada partícula e "separá-lo" junto com os propagadores para obter a matriz S

Importante: note que o fator Z e a massa física apareceram neste desenvolvimento geral, mesmo sem termos identificado qualquer divergência nas correções radiativas. Suponha que estivessemos trabalhando em poucas dimensões e as integrais de loop convergissem. Teríamos que introduzir Z e uma massa m diferente daquela na lagrangeana (m_0)?

De fato, a possibilidade de fazer esta inversão foi provada por Lehmann, Symanzik, and Zimmermann e a equação 115.1 acima é conhecida como **Fórmula de Redução de LSZ**

Vamos tentar expressar esta fórmula por meio de diagramas de Feynman. Consideremos um caso simples:



Consideramos apenas os diagramas conectados, já que os desconectados não possuem a multiplicação de 4 polos que procuramos.

lembre-se, por exemplo, da teoria $\lambda\phi^4$ -

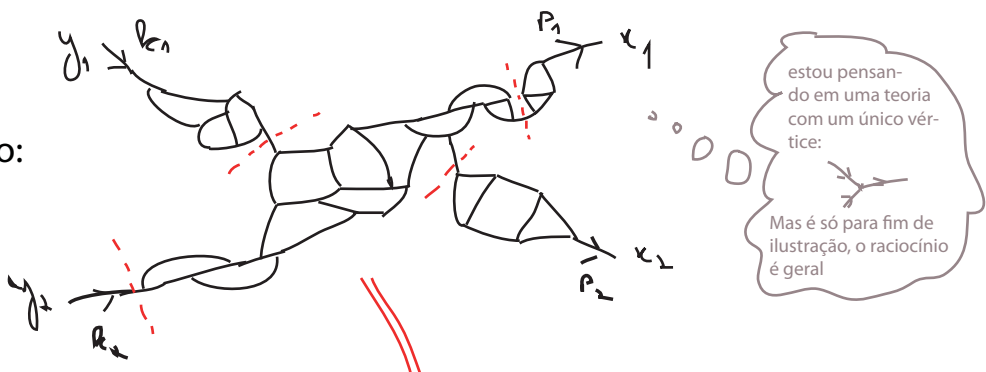
$$\text{X} = \Delta_F(x_1-z) \Delta_F(x_2-z) \Delta_F(x_3-z) \Delta_F(x_4-z)$$

$$\text{---} + \text{---} \sim \Delta_F \Delta_F$$

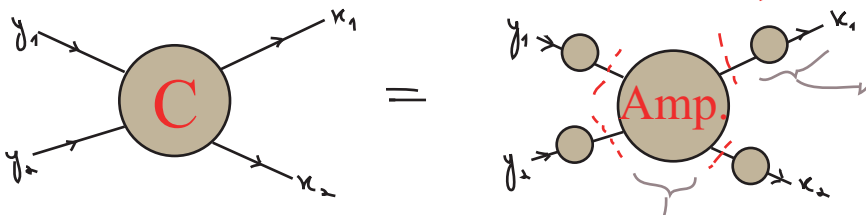
A função de quatro pontos no espaço dos momentos é:

$$\left(\prod_1^2 \int d^4 k_i e^{i P_{\mu} x_{\mu}} \right) \left(\prod_1^2 \int d^4 y_i e^{-i k_i y_i} \right) \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(y_1) \phi(y_2) \} | \Omega \rangle$$

Isso pode ser bem complicado:



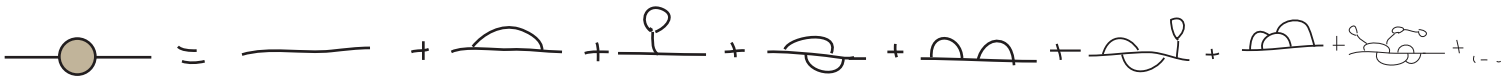
Mas podemos agrupar as correções da seguinte forma



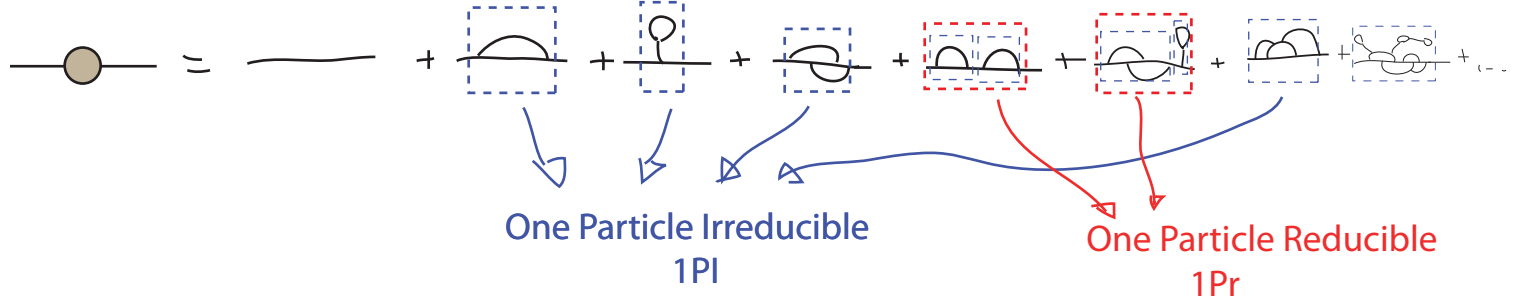
com isso agrupamos todas correções que só modificam o propagador nestas "pernas" - os **Propagadores Vestidos ou Completos**

Resta a parte que modifica o vértice da interação que chamamos de diagrama **Amputado**

Pensemos primeiro na estrutura dos propagadores:



Podemos dividir as correções em dois grupos:



Se definirmos um objeto que coleciona todas as correções 1PI:

$$-i M^2(p^2) = \rightarrow \text{1PI} \rightarrow$$

fica claro que as correções 1Pr serão dadas por: $\text{1PI} + \text{1PI} \text{1PI} + \text{1PI} \text{1PI} \text{1PI} + \dots$

De forma que a função de dois pontos completa pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
 & \int d^4x \langle \Omega | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(0) \} | \Omega \rangle e^{i p x} = \text{Diagrama} = \\
 & = \text{Diagrama} + \text{Diagrama (1PI)} + \text{Diagrama (1PI-1PI)} + \text{Diagrama (1PI-1PI-1PI)} + \dots = \\
 & = \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \frac{i}{p^2 - m_0^2} (-i M^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \frac{i}{p^2 - m_0^2} (-i M^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2} (-i M^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \dots = \\
 & = \frac{i}{p^2 - m_0^2} \left(1 + (-i M^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2} + (-i M^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2} (-i M^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \dots \right) = \\
 & = \frac{i}{p^2 - m_0^2} \left(1 - \frac{M^2}{p^2 - m_0^2} \right)^{-1} = \frac{i}{p^2 - m_0^2 - M(p^2)^2}
 \end{aligned}$$

O propagador completo é dado por uma função complicada, que envolve a **auto energia M**. Conforme a discussão das pags 91-92, sabemos que perto de $p^0 = E_p$ o único polo presente é o da massa física:

$$\frac{i}{p^2 - m_0^2 - M(p^2)^2} \underset{p^0 \rightarrow E_p}{\sim} \frac{i z}{p^2 - m^2} + (\text{função sem polos})$$

Isso quer dizer que se formos para a região: $\left. \begin{array}{l} p_1^0 \rightarrow E_{p_1} \\ p_2^0 \rightarrow E_{p_2} \\ k_1^0 \rightarrow E_{k_1} \\ k_2^0 \rightarrow E_{k_2} \end{array} \right\}$

A função de quatro pontos terá o seu termo mais singular na forma:

$$\text{Diagrama (4 pontos)} = \frac{i z}{p_1^2 - m^2} \frac{i z}{p_2^2 - m^2} \frac{i z}{k_1^2 - m^2} \frac{i z}{k_2^2 - m^2} \text{Diagrama (Amputado)} + \dots$$

termos regulares

onde, do lado direito, resta apenas o vértice e suas correções (diagramas Amputados)

Comparando isto com o lado direito da fórmula de LSZ (eq. 115.1), reconhecemos os produtos dos polos e vemos que a matriz S deve ser:

$$\langle P_1 P_2 | S | k_1 k_2 \rangle = Z^2 \text{ Amp.}$$

Para fins de ilustração, no caso $\lambda\phi^4$, (em teoria de perturbação) tínhamos:

$$\begin{aligned} \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(y_1) \phi(y_2) \} | \Omega \rangle = \\ = -3 \left[\text{diagrama desconectado} \right] - \frac{i\lambda}{4!} \left[\text{diagrama com 2 vértices} \right] + 2i \left[\text{diagrama com 4 vértices} \right] + \mathcal{O}(\lambda^2) \end{aligned}$$

desconectados ($\Delta_F \Delta_F$) $\Delta_F \Delta_F \Delta_F \Delta_F$

$$\begin{aligned} -i\lambda \int \Delta_F(z-x_1) \Delta_F(z-x_2) \Delta_F(z-x_3) \Delta_F(z-x_4) dz \\ = -i\lambda \int dz \int \frac{d^4k_1 d^4k_2 d^4k_3 d^4k_4}{(2\pi)^{16}} \frac{i e^{-ik_1(z-x_1)}}{k_1^2 - m_0^2} \dots \frac{i e^{-ik_4(z-x_4)}}{k_4^2 - m_0^2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int dz e^{-iz(\dots)} \rightarrow (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \\ = -i\lambda \int \frac{d^4k_1 d^4k_2 d^4k_3 d^4k_4}{(2\pi)^{16}} \frac{i}{k_1^2 - m_0^2} \dots \frac{i}{k_4^2 - m_0^2} \delta^4(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) e^{ik_1 x_1} \dots e^{ik_4 y_4} \end{aligned}$$

que é a função no espaço das posições. Passando para o espaço dos momentos:

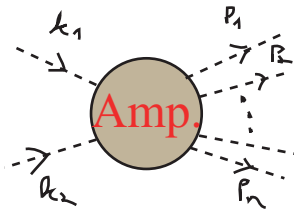
$$\begin{aligned} \int d^4k_1 e^{iP_1 x_1} \int d^4k_2 e^{iP_2 x_2} \int d^4k_3 e^{-ik_3 y_3} \int d^4k_4 e^{-ik_4 y_4} \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(y_1) \phi(y_2) \} | \Omega \rangle = \\ = -i\lambda (2\pi)^4 \delta^4(-P_1 - P_2 + k_1 + k_2) \left[\frac{i}{P_1^2 - m_0^2} \frac{i}{P_2^2 - m_0^2} \frac{i}{k_1^2 - m_0^2} \frac{i}{k_2^2 - m_0^2} \right] \end{aligned}$$

↑ amputação

notem que nessa caso não temos o Z (pois estamos em Leading Order)

Uma análise equivalente para funções de mais pontos nos leva a:

$$\langle p_1 \dots p_n | S | k_1, k_2 \rangle = (\sqrt{Z})^{n+2}$$



Note que para campos com spin teríamos fatores de polarização no lado direito, tal como $u_s(k)$ ou $\epsilon_\mu(k)$