Podemos ainda considerar os casos em que o "quadrado não está completo":

$$S = \frac{1}{2}\vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x} + \vec{b}^T \cdot \vec{x}$$

Pensemos nele como uma ação (o que de fato será, quando voltarmos à física). A solução clássica dada pelo princípio da extrema ação seria (mesmo sem pensar nisso como ação, estamos buscando o mínimo de S):

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{2}x_i A_{ij} x_j + b_i x_i\right) = \frac{1}{2}\delta_{ik} A_{ij} x_j + \frac{1}{2} x_i A_{ij}\delta_{jk} + b_k = 0$$

$$\frac{1}{2}A_{kj}x_j + \frac{1}{2}A_{ik}x_i = -b_k$$

$$A_{ij} = A_{ji} \Rightarrow \underbrace{\vec{x}_c}_{\text{clássico}} = -A^{-1}\vec{b}$$

$$S(\vec{x}_c) = \frac{1}{2}\left(-A^{-1}\vec{b}\right)^T \cdot A \cdot \left(-A^{-1}\vec{b}\right) + \vec{b}^T\left(-A^{-1}\vec{b}\right) = -\frac{1}{2}\vec{b}^T A^{-1}\vec{b}$$

Podemos então escrever:

$$S = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\vec{x}-\vec{x}_c\right)^T \cdot A\left(\vec{x}-\vec{x}_c\right) - \frac{1}{2}\vec{b}^T A^{-1}\vec{b}}_{\text{equação da parábola com mínimo em } \vec{x}_c}$$

$$\int d^n x\, e^{-\overbrace{\left(\frac{1}{2}\vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x} + \vec{b}^T \cdot \vec{x}\right)}^{S(x)}} = e^{-S(x_c)}\int d^n x\, e^{-\frac{1}{2}\left(\vec{x}-\vec{x}_c\right)^T \cdot A \cdot \left(\vec{x}-\vec{x}_c\right)} = \left(2\pi\right)^{n/2}\left(\mathrm{Det}\,A\right)^{-1/2} e^{\frac{1}{2}\vec{b}^T \cdot A^{-1}\vec{b}}$$

(eq. 8.1)

---

Voltando a física, podemos fazer a integral destacada abaixo:

$$F(q't', q t) = \int \mathcal{D}q(t)\, \mathrm{EXP}\left\{-i\int_t^{t'} dt\, V[q(t)]\right\} \underbrace{\int \mathcal{D}p(t)\, \mathrm{EXP}\left\{i\int_t^{t'} dt\left[p(t)\dot{q}(t) - \frac{p(t)^2}{2}\right]\right\}}_{\prod_i^n \frac{dp(t_i)}{2\pi}\mathrm{EXP}\left\{i\epsilon\left[p(t_i)\dot{q}(t_i) - \frac{1}{2}p(t_i)^2\right]\right\}}$$

com: $x_i = p(t_i)$ $\qquad b = -i\epsilon\,\dot{q}(t_i)$ $\qquad (A^{-1})_{ij} = -\frac{i}{\epsilon}\delta_{ij}$

$A_{ij} = i\epsilon\,\delta_{ij}$

podemos usar 8.1 diretamente, obtendo:

$$\int \mathcal{D}p(t)\, \mathrm{Exp}\left\{ i\int_t^{t'} dt \left[ p(t)\,\dot q(t) - \frac{p(t)^2}{2}\right]\right\} = \frac{1}{(2\pi)^n}(2\pi)^{n/2}(i\epsilon)^{-n/2}\,\mathrm{Exp}\left[\frac{1}{2}\left(+i\cancel{\epsilon}\,\dot q(t_i)\right)\left(+\frac{1}{\cancel{\epsilon}}\delta_{ij}\right)\left(+\cancel{i}\epsilon\,\dot q(t_j)\right)\right] =$$

$$= \underbrace{\frac{(i\epsilon)^{-n/2}}{(2\pi)^{n/2}}}_{\mathcal{N}}\,\mathrm{Exp}\left[ i\int_t^{t'} dt\, \frac{\dot q(t)^2}{2}\right] \qquad \text{( eq. 9.1 )}$$

Com isso, nossa amplitude de transição fica em uma forma bastante reveladora:

$$F(q't', q\,t) = \mathcal{N}\int \mathcal{D}q(t)\, \mathrm{Exp}\left\{ i\int_t^{t'} dt \left[\frac{\dot q(t)^2}{2} - V[q(t)]\right]\right\} = \mathcal{N}\int \mathcal{D}q(t)\, \mathrm{Exp}\left\{ i\int_t^{t'} dt\, L(q,\dot q)\right\}$$

$$\boxed{F(q't', q\,t) = \mathcal{N}\int \mathcal{D}q(t)\, e^{iS[q]}} \qquad \text{( eq. 9.2 )}$$

Paremos aqui um momento para notar duas coisas:

(1) As equações 6.1 e 9.2 nos dão formas bastante curiosas de calcular um objeto essencialmente quântico: a amplitude de probabilidade de transição. Curiosas porque, no lado direito da equação temos as funções Langrangeana e Hamiltoniana clássicas do sistema (notem que trocamos os operadores $\hat{q}$ e $\hat{p}$ por seus valores esperados no meio da dedução). O comportamento quântico vem do fato de estarmos integrando sobre todas as trajetórias possíveis para *q(t)* e *p(t)* (a exponencial complexa também desempenha um papel)

(2) Na equação 9.2 fica claro que a soma sobre trajetórias é ponderada pela exponencial da ação, e diferentes trajetórias vão ter interferências construtivas ou destrutivas dependendo de diferença entre suas ações.

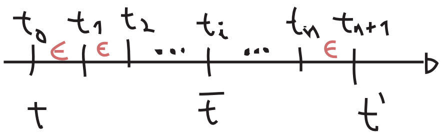
Temos então uma forma alternativa de quantizar um sistema, especialmente útil quando estamos falando de amplitudes de transição. Ao invés de definir operadores e relações de comutação, usamos as integrais de trajetória. Note que os dois métodos são completamente equivalentes, acima usamos a evolução temporal que se obtem como solução da equação de Schrödinger para chegar nas integrais de trajetória. Feynman fez o oposto, ele partiu de expressão 9.2 e mostrou que as funções de onda em 3.3 satizfazem a equação de Schrödinger (o que só vale para Hamiltonianas do tipo 7.1).

## Funções de Correlação

Podemos também usar o método acima para obter outros observáveis, o mais simples sendo a função de um ponto:

$$\langle q', t' | \hat{q}(\bar{t}) | q, t \rangle \qquad\qquad t < \bar{t} < t'$$

É fácil imaginar como tratar este objeto no procedimento anterior. Discretizamos o tempo da mesma forma mas, assumindo que a discretização é "fina" o bastante, podemos identificar $\bar{t}$ com um dos $t_i$ intermediários:




Em meio aos diversos $\langle q_i, t_i | q_{i-1}, t_{i-1} \rangle$ que apareceram antes, vai haver um bracket diferente:

$$\langle q_{i+1}, t_{i+1} | \hat{q}(\bar{t}) | q_i, t_i \rangle \overset{t_i = \bar{t}}{=} q(\bar{t}) \langle q_{i+1}, t_{i+1} | q_i, t_i \rangle$$

$q(\bar{t})$ → não é mais um operador

isto é exatamente o que tínhamos antes. Então a conta procede normalmente, lembrando apenas que temos este q(t) dentro das integrais.

$$\therefore \langle q', t' | \hat{q}(\bar{t}) | q, t \rangle = \int \mathcal{D}q \; e^{iS[q]} q(\bar{t})$$

A função de dois (ou mais) pontos é similar, mas há uma sutileza:

$\langle q', t' | \hat{q}(\bar{t}_2) \hat{q}(\bar{t}_1) | q, t \rangle$ → só sabemos tratar isso se de fato: $t < \bar{t}_1 < \bar{t}_2 < t'$

$$\int \mathcal{D}q \langle q', t' | q_n, t_n \rangle \ldots \underbrace{\langle q_{j+1}, t_{j+1} | \hat{q}(\bar{t}_2) | q_j, t_j \rangle}_{\bar{t}_2 = t_j \Rightarrow q(\bar{t}_2) \langle \; | \; \rangle} \ldots \underbrace{\langle q_{i+1}, t_{i+1} | \hat{q}(\bar{t}_1) | q_i, t_i \rangle}_{\bar{t}_1 = t_i \Rightarrow q(\bar{t}_1) \langle \; | \; \rangle} \ldots \langle q_1, t_1 | q, t \rangle$$

$$\langle q', t' | \hat{q}(\bar{t}_2) \hat{q}(\bar{t}_1) | q, t \rangle = \int \mathcal{D}q \; e^{iS[q]} q(\bar{t}_2) q(\bar{t}_1) \qquad \text{(eq. 10.1)}$$

note que são funções e comutam

Por outro lado, poderíamos ter calculado:

$$\langle q', t' | \hat{q}(\bar{t}_1) \hat{q}(\bar{t}_2) | q, t \rangle = \int \mathcal{D}q \; e^{iS[q]} q(\bar{t}_2) q(\bar{t}_1) \qquad \text{(eq. 10.2)}$$

desde que → $t < \bar{t}_2 < \bar{t}_1 < t'$

Logo vemos que, tentando escrever 10.1 e 10.2 como uma única expressão, temos:

$$\boxed{\int Dq \; e^{iS[q]} q(t_2)\, q(t_1) = \langle q', t' | T\{\hat{q}(t_2)\, \hat{q}(t_1)\} | q, t \rangle}$$

( eq. 11.1 )

onde aparece o Produto Temporalmente Ordenado (recorde como estes produtos aparecem na versão canônica):

$$\boxed{T\{\hat{q}(t_2)\,\hat{q}(t_1)\} \equiv \begin{cases} \hat{q}(t_1)\,\hat{q}(t_2) & \leftrightarrow \quad t_2 < t_1 \\ \hat{q}(t_2)\,\hat{q}(t_1) & \leftrightarrow \quad t_1 < t_2 \end{cases}}$$

( eq. 11.2 )

Tanto 11.1 e 11.2 são generalizados de forma direta para um número maior de operadores:

$$T\{\hat{q}(t_1), \dots \hat{q}(t_N)\} \equiv \underbrace{\hat{q}(t_1) \dots \hat{q}(t_N)}_{} \leftrightarrow \underbrace{t_N < \dots < t_1}_{}$$

ordenados temporalmente

$$\boxed{G_n(t_1, \dots t_n) = \langle q', t' | T\{\hat{q}(t_1) \dots \hat{q}(t_n)\} | q, t \rangle = \int Dq \; e^{iS[q]} q(t_1) \dots q(t_n)}$$

( eq. 11.3 )

Função de n-pontos ou Função de Correlação (de n pontos) ou Correlator.

Em breve veremos em que contexto estes correlatores aparecem e porque estamos interessados neles. Definamos um outro objeto que nos será útil, lembrando que para qualquer conjunto $\{a_n\}$ podemos definir a função geradora F(z):

$$F(z) \equiv \sum_n \frac{1}{n!} a_n z^n$$

tal que: $$a_n = \left.\frac{d^n}{dz^n} F(z)\right|_{z=0}$$

(conhecer esta função nos permiter obter qualquer elemento do conjunto, bastando fazer o número apropriado de derivações)

O equivalente para o conjunto de todos os correlatores $\{G_n\}$ seria o funcional gerador:

$$\boxed{Z[J] \equiv \sum_{N\geq 0} \int dt_1 \dots \int dt_N \underbrace{\frac{i^N}{N!}}_{\text{convencional}} \underbrace{G_N(t_1, \dots, t_N)\, J(t_1) \dots J(t_N)}_{}}$$

( eq. 11.4 )

A diferença é que os elementos do conjunto em questão são funções (de vários t's) e por isso a variável em que derivaremos deve ser também uma função (os J's) e o gerador vira um funcional.

Podemos escrever ele em uma forma mais conveniente substituindo $G_n$ de 11.3:

$$Z[J] = \sum_{N>0} \int dt_1 \ldots \int dt_N \frac{i^N}{N!} J(t_1)\ldots J(t_N) \int Dq\, e^{iS[q]} q(t_1)\ldots q(t_N) =$$

$$\int dt_1\, i J(t_1)\, q(t_1) \int dt_2\, i J(t_2)\, q(t_2) \ldots$$

$$= \int Dq\, e^{iS[q]} \sum_{N>0} \frac{1}{N!} \left[ \int dt\, i\, q(t)\, J(t) \right]^N = \int Dq\, e^{i \underbrace{\left[ S[q] + \int dt\, q(t) J(t) \right]}_{S[q,J]}}$$

$$\boxed{Z[J] = \int Dq\, e^{iS[q,J]}}$$

( eq. 12.1 )

Para ver como podemos obter qualquer $G_n$, basta fazer as derivadas funcionais:

$$\boxed{\frac{\delta^N}{i\delta J(t_1)\ldots i\delta J(t_N)} Z[J] \Bigg|_{J=0} = \int Dq\, e^{iS[q]} q(t_1)\ldots q(t_N) = G_N(t_1,\ldots,t_N)}$$

( eq. 12.2 )

Para um tratamento um pouco mais longo de derivação funcional, chequem o material adicional [a] no site do curso ( http://www.ift.unesp.br/users/matheus/files/courses/2018tqc2/funcderiv.pdf ), e as referências lá citadas.
Para os nossos fins basta saber que:

$$\frac{\delta f(x)}{\delta f(y)} = \delta(x-y) \qquad\qquad \frac{\delta g(f(x))}{\delta f(y)} = \delta(x-y) \frac{\partial g}{\partial f}\Bigg|_{f=f(x)}$$

De forma que:

$$\frac{\delta^2}{i\delta J(t_1)\, i\delta J(t_2)} Z[J] = \frac{\delta}{i\delta J(t_1)} \left\{ \frac{\delta}{i\delta J(t_2)} \int Dq\, e^{i\left[ S[q] + \int dt\, q(t) J(t) \right]} \right\} =$$

$$= \int Dq \frac{\delta}{i\delta J(t_1)} \left\{ e^{i\left[S[q] + \int dt\, q(t)J(t)\right]} \frac{\delta}{\cancel{i}\delta J(t_2)} \left[ \cancel{i}\left(S[q] + \int dt\, q(t)J(t)\right)\right] \right\} =$$

$$= \int Dq \frac{\delta}{i\delta J(t_1)} \left\{ e^{i\left[S[q] + \int dt\, q(t)J(t)\right]} \int dt\, q(t)\,\delta(t-t_2) \right\} =$$

$$= \int Dq\, q(t_2) \underbrace{\frac{\delta}{i\delta J(t_1)} e^{i\left[S[q] + \int dt\, q(t)J(t)\right]}}_{q(t_1)\, e^{i[\dots]}} = \int Dq\, q(t_2) q(t_1)\, e^{iS[q,J]}$$

$$\therefore \frac{\delta^2}{i\delta J(t_1)\, i\delta J(t_2)} Z[J]\Big|_{J=0} = \int Dq\, q(t_2)q(t_1)\, e^{iS[q]} = G_2(t_1,t_2)$$

Com este conjunto de idéias e ferramentas podemos voltar ao oscilador harmônico.

## O oscilador Harmônico forçado

( Nastase 7 e 8, Ramond 2.3)

Quando definimos o gerador funcional (eqs. 11.4 e 12.1):

$$Z[J] = \int Dq\, e^{iS[q;J]} = \int Dq\, e^{iS[q] + i\int dt\, q(t)J(t)}$$

a partir do qual obtemos os correlatores (16.2):

$$G_n(t_1,\dots,t_n) = \frac{\delta}{i\delta J(t_1)} \cdots \frac{\delta}{i\delta J(t_n)} Z[J]\Big|_{J=0}$$

Não discutimos os significado da função *J(t)*, que não passava de um artifício matemático, introduzida apenas para definir o funcional gerador e igualada a zero assim que possível. No entanto podemos nos perguntar o que acontece se não fizemos *J(t) = 0*. A ação definida com a inclusão do termo com *J* é:

$$S[q;J] = S[q] + \int dt\, J(t)\, q(t)$$

que, pelo princípio da extrema ação: $$\frac{\delta S[q;J]}{\delta q} = \frac{\delta S[q]}{\delta q} + J(t) = 0$$

Se $$L(q) = \frac{1}{2}\left(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2\right) \Rightarrow \boxed{-\omega^2 q - \ddot{q} + J(t) = 0}$$ ( eq. 14.1 )

Oscilador Harmônico Forçado

Note que *J(t)* é uma força externa ao sistema descrito por esta eq. de movimento, no sentido de que sua dinâmica não é influenciada pelo valor de *q(t)* (ou suas derivadas). Todo o comportamento desta "Fonte" é estabelecido a priori por fatores externos e o que resolvemos é a resposta do oscilador a isto. Neste sentido vemos que os correlatores da teoria descrevem o comportamento do sistema isolado, na ausência de fontes.

A ação $S[q;J] = \frac{1}{2}\left(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2\right) + qJ$ é quadrática em *q* e portanto podemos fazer a integral de trajetória usando o resultado da pg 8.1 para integrais gaussianas. Há, no entanto, um sutil problema ligado às condições de contorno de q(t), vamos primeiro fingir que não notamos este problema (ou de fato ser honestos a respeito):

$$S[q] = \int dt \left[\frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{dq}{dt}\right)^2}\, - \frac{\omega^2 q^2}{2} + Jq\right] = \int dt\left[-\frac{1}{2}\, q\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right) q + Jq\right]$$

$$\int \frac{dq}{dt}\frac{dq}{dt} = \underbrace{\int \frac{d}{dt}\left(q\frac{dq}{dt}\right)}_{0} - \int q\,\frac{d^2 q}{dt^2}$$

O que leva à integral de trajetória:

$$Z[J] = \int Dq\, \mathrm{EXP}\left\{\left[-\frac{1}{2}\, q\cdot\Delta^{-1} q + i J\cdot q\right]\right\}$$

$$\Delta^{-1} = i\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right)$$

$$J\cdot q = \int dt\, J(t)\, q(t)$$

Comparando com 8.1:

$$\int d^N x\, e^{-\left(\frac{1}{2}\vec{x}^T\cdot A\cdot\vec{x} + \vec{b}^T\cdot\vec{x}\right)} = (2\pi)^{N/2}\left(\mathrm{DET}\, A\right)^{-1/2} e^{\frac{1}{2}\vec{b}^T\cdot A^{-1}\vec{b}} \Rightarrow \begin{array}{l} b = -iJ(t) \\ A = \Delta^{-1}\end{array}$$

$$Z[J] = \underbrace{\mathcal{N}'}_{\left(\mathrm{DET}\,\Delta^{-1}\right)^{-1/2}}\, e^{-\frac{1}{2}J\cdot\Delta\cdot J}$$

( por enquanto usaremos este resultado, mas cuidado! Veja eq 17.2 para a versão correta )

( não depende de J)

$$J\cdot\Delta\cdot J = \int dt \int dt'\, J(t)\, \Delta(t,t')\, J(t')$$

$$\Delta^{-1}\Delta(t,t') = i\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega^2\right] \underbrace{i\int \frac{dp}{2\pi}\, \frac{e^{-ip(t-t')}}{p^2-\omega^2}}^{\text{ANSATZ P/ }\Delta} = \cancel{-}\int \frac{dp}{2\pi}\, \frac{\cancel{-p^2+\omega^2}}{\cancel{p^2-\omega^2}}\, e^{-ip(t-t')}$$

$$= \delta(t-t')$$

$$\boxed{\Delta(t,t') = i\int \frac{dp}{2\pi}\, \frac{e^{-ip(t-t')}}{p^2-\omega^2}} \quad \text{( eq. 15.1 )}$$

No entanto temos uma singularidade aqui, que seria evitada (como fizemos antes) escolhendo caminhos apropriados no plano complexo.

Esta singularidade invalida a inversão que fizemos de $\Delta^{-1}$? A pergunta pode ser respondida pensando em que espaço de funções $\Delta^{-1}$ está agindo, pois neste caso podemos pensar no operador como uma matriz e ver que, se existem funções que satisfaçam:

$$\boxed{\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega^2\right] q_0(t) = 0} \quad \text{( eq. 15.2 )}$$

isto significaria que o operador tem autovalores iguais a zero e é singular, não pode ser invertido! Para piorar, estes modos de autovalor zero são justamente as soluções clássicas do oscilador livre.

$\longrightarrow q_0(t) = C_\pm e^{\pm i\omega t}$

Para conseguir inverter $\Delta^{-1}$, portanto, precisamos excluir estas soluções do espaço em que $\Delta^{-1}$ está agindo, o que quer dizer que precisamos que elas não sejam varidas pela integral de trajetória. Lembre-se que para definir a intregral de trajetória, temos que também escolher os pontos inicial e final da trajetória, que estão fixos. Note ainda que a equação só tem soluções $q(t)$, $t\in[t_i,t_f]$ não triviais se:

$$q(t_i)\neq 0 \qquad \text{ou} \qquad q(t_f)\neq 0$$

$$q_0(t) = C_+ e^{i\omega t} + C_- e^{-i\omega t}$$

$$q_0(t_i)=0 \Rightarrow \left(C_+ e^{i\omega t_i} + C_- e^{-i\omega t_i}\right)=0$$

&

$$q_0(t_f)=0 \Rightarrow \left(C_+ e^{i\omega t_f} + C_- e^{-i\omega t_f}\right)=0$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (C_+-C_-)\,\mathrm{sen}\left[\frac{\omega(t_f+t_i)}{2}\right]\cos\left[\frac{\omega(t_f-t_i)}{2}\right]=0 \\ (C_++C_-)\cos\left[\frac{\omega(t_f+t_i)}{2}\right]\cos\left[\frac{\omega(t_f-t_i)}{2}\right]=0 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}\forall t_i \\ \forall t_f\end{array}\right\} \Rightarrow C_+ = C_- = 0$$

Vamos então fazer uma mudança de variável e escrever:

$$q(t) = q_{cl}(t) + \tilde{q}(t) \rightarrow \boxed{\tilde{q}(t_i) = \tilde{q}(t_f) = 0}$$ (eq. 16.1)

↳ Trajetória clássica, com condições de contorno não triviais

Do ponto de vista da integral de trajetória, mudar a integração de $q$ para $\tilde{q}$ é o mesmo que uma mudança de variável dada pela adição de uma constante em uma integral usual, estamos apenas somando um caminho fixo. Então:

$$\int Dq\, e^{iS[q_{cl}(t)+\tilde{q};J]} = \int D\tilde{q}\, e^{iS[q_{cl}(t)+\tilde{q};J]}$$

De fato, isto decorre da definição da integral de trajetória de um modo trivial:

$$\prod_i dq_i = \prod_i d(\underbrace{q_i^{cl}}_{\text{número}} + \tilde{q}_i) = \prod_i d\tilde{q}_i$$

Lembrando que (pg 8), se acharmos um extremo $q_0$ de $S[q;J]$, podemos escrever:

$$\left.\begin{array}{l} S[q;J] = \frac{1}{2}Aq^2 + Jq \\ \left.\frac{\delta S}{\delta q}[q;J]\right|_{q=q_0} = 0 \end{array}\right\} = S[q_0;J] + \overbrace{\frac{1}{2}A(q-q_0)^2}^{\text{justamente a ação para } J=0} = S[q_0;J] + S[q-q_0;0]$$

Acontece que $q_{cl}$ é justamente um extremo da ação, de forma que:

$$\boxed{S[q;J] = S[q_{cl};J] + S[\overbrace{q-q_{cl}}^{\tilde{q}};0]} \Rightarrow \boxed{S[q;J] = S[q_{cl};J] + S[\tilde{q};0]}$$ (eq. 16.2)

$$\therefore \boxed{Z[J] = e^{iS[q_{cl};J]}\underbrace{\int D\tilde{q}\, e^{iS[\tilde{q};0]}}}$$ (eq. 16.3)

esta integral agora está bem definida, mas não interessa o seu resultado pois ela independe de J e pode ser absorvida na constante que acompanha Z. O importante é que a Δ que vai parar no determinante é obtida invertendo o operador $\Delta^{-1}$ numa base em que não há modos com autovalor zero

$$\therefore \boxed{Z[J] = N e^{iS[q_{cl};J]}}$$ (eq. 16.4)