

O valor esperado de qualquer observável \hat{O} é dado por:

$$\langle \hat{O} \rangle_{\beta} = \text{Tr}(\hat{\rho}_{\beta} \cdot \hat{O}) \quad (\text{eq. 22.1})$$

A matriz de densidade é proporcional ao próprio operador de evolução no espaço Euclidiano:

$$U(t) = e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}} \rightarrow \hat{U}(-i\tau) = e^{-\frac{\tau}{\hbar} \hat{H}} = e^{-\beta \hat{H}}$$

$\tau = \hbar \beta$

$$\tau = \hbar \beta = \frac{\hbar}{k_B T_0}$$

$$k_B T_0 = \frac{\hbar}{k_B \tau}$$

$$\hat{\rho}_{\beta} = \frac{1}{Z} \hat{U}(-i\tau) \quad Z = \text{Tr}[\hat{U}(-i\tau)]$$

Vemos que a "evolução" de um sistema neste "tempo imaginário" serve para descrever as propriedades deste mesmo sistema em equilíbrio com um banho térmico.

Recapitulando:

Partícula (quântica) em eq. com banho de temperatura T

$$\hat{\rho}_{\beta} (e^{-\beta \hat{H}}), \quad Z = \text{Tr}[e^{-\beta \hat{H}}]$$

Partícula (quântica) isolada em tempo imaginário

$$\hat{U}(-i\tau)$$

isto é tudo que preciso saber, e posso obtê-lo daqui

(22.2)

Além disso, a métrica agora é de um espaço Euclidiano:

$$ds^2 = dt^2 - dq^2$$

$$\downarrow t = -i t_E$$

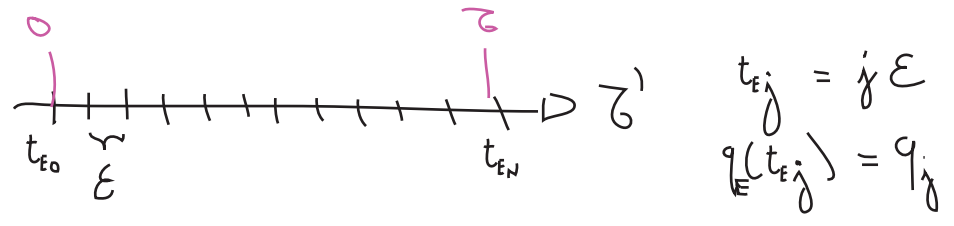
$$- ds_E^2 \equiv -(dt_E^2 + dq^2) \Rightarrow \text{distância Euclidiana em } \mathbb{R}^{n+1}$$

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e portanto, t_E é uma variável tipo espaço. Vejamos o que acontece se pensarmos na variável de integração t_E como uma distância, além disso, consideraremos um sistema simples (oscilador harmônico):

$$S_E[q_E] = \frac{1}{\hbar} \int_0^{\tau} dt_E \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dq_E}{dt_E} \right)^2 + V(q_E) \right] \quad V(q_E) = \frac{\omega^2}{2} q_E^2$$

Discretizando o "tempo Euclideo":



$$\int \mathcal{D}q_E \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \int_0^{\tau_0} dt_E \left[\frac{\dot{q}_E^2}{2} + \frac{1}{2} \omega^2 q_E^2 \right] \right\}$$

$$\downarrow$$

$$\int \prod dq_j \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \sum_j \epsilon \left[\frac{1}{2} \left(\frac{q_{j+1} - q_j}{\epsilon} \right)^2 + \frac{1}{2} \omega^2 q_j^2 \right] \right\}$$

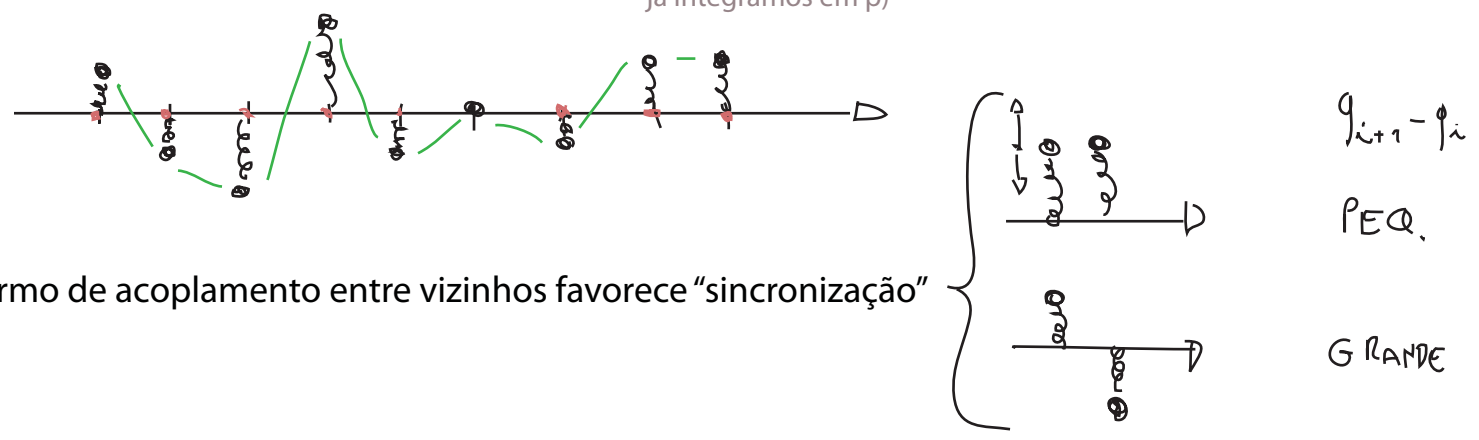
Isso é exatamente a função de partição de um sistema clássico em temperatura T_S

$$Z = \underbrace{\int \prod dq_j}_{\text{"soma" todas as configurações } \{q_i\}} \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \sum_j \epsilon \left[\frac{1}{2} \left(\frac{q_{j+1} - q_j}{\epsilon} \right)^2 + \frac{1}{2} \omega^2 q_j^2 \right] \right\}$$

1 $\frac{1}{k_B T_S}$ energia total energia potencial de um oscilador clássico

acoplamento entre vizinhos

Na prática temos um sistema de osciladores: (falta o termo p^2 de cada oscilador, mas isso é porque já integramos em p)



O termo de acoplamento entre vizinhos favorece "sincronização"

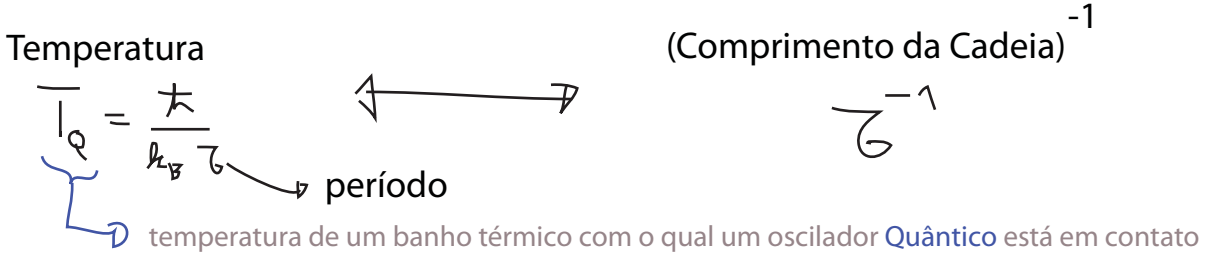
1 Oscilador Quântico (em tempo imaginário) \longleftrightarrow Cadeia de osciladores clássicos acoplados

Futuações quânticas \longleftrightarrow Futuações térmicas

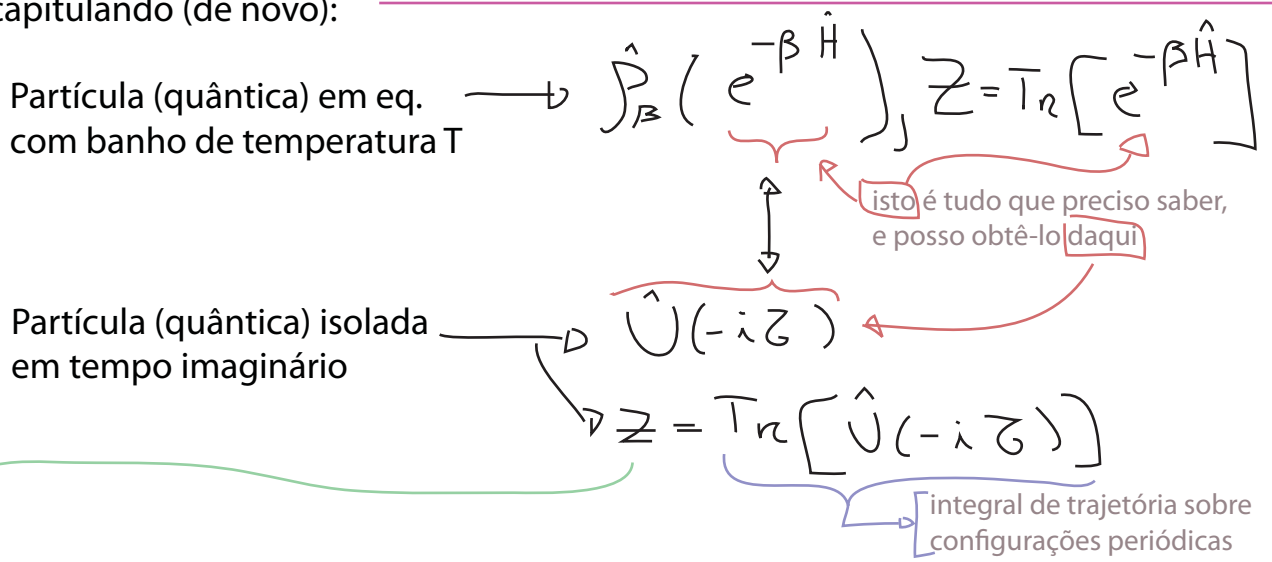
\mathcal{R} \longleftrightarrow $k_B T_S$ } temperatura do Sistema de osciladores clássicos

1 grau de liberdade \longleftrightarrow número grande graus de liberdade clássicos

Lembrando ainda que uma partícula quântica em tempo imaginário pode ser interpretada como uma partícula quântica em contato com um banho T_Q :



Recapitulando (de novo):



É também a função de partição de um sistema clássico (de fato de muitos sistemas clássicos acoplados aos "primeiros vizinhos") \rightarrow Mecânica Estatística

(24.1)

Até agora vimos a relação entre o operador de evolução e a função de partição. E os observáveis?

$\hat{A}(q) \xrightarrow{(22.1) \text{ quântica em T}} \langle \hat{A}(q_\epsilon) \rangle_{\beta} = \text{Tr} [\hat{\rho}_{\beta} \cdot \hat{A}(q_\epsilon)] = \frac{\text{Tr} [e^{-\beta \hat{H}} \hat{A}(q_\epsilon)]}{Z}$

$\beta = \frac{1}{k_B T_Q}$

$= \frac{\text{Tr} [\hat{U}_{\epsilon}(\tau) \hat{A}(q_\epsilon)]}{\text{Tr} [\hat{U}_{\epsilon}(\tau)]}$

$\text{Tr} [\hat{U}_{\epsilon}(\tau)] = \int_{\mathcal{P}} \mathcal{D}q_{\epsilon} e^{-\frac{1}{\hbar} S_{\epsilon}[q_{\epsilon}]}$ (21.1)

$\text{Tr} [\hat{U}_{\epsilon}(\tau) \hat{A}(q_{\epsilon})] = \int_{\mathcal{P}} \mathcal{D}q_{\epsilon} e^{-\frac{1}{\hbar} S_{\epsilon}[q_{\epsilon}]} A(q_{\epsilon}(\tau_1))$

$\hat{A}(q_{\epsilon}) |q_{\epsilon}(\tau_1)\rangle = A(q_{\epsilon}(\tau_1)) |q_{\epsilon}(\tau_1)\rangle$ (em caminhos periódicos)

$$\langle \hat{A} \rangle = \frac{\int_{\mathcal{P}} \mathcal{D}q_E e^{-\frac{1}{\hbar} S_E[q_E]} A(q_E(\tau_1))}{\int_{\mathcal{P}} \mathcal{D}q_E e^{-\frac{1}{\hbar} S_E[q_E]}}$$

Note que qualquer fator multiplicativo indeterminado vindo da integral de trajetória (tal como o volume do espaço) vai ser cancelado

(eq. 25.1)

Notem que, pensando em $\int \mathcal{D}q_E$ como a soma sobre as configurações de uma cadeia clássica, esta mesma definição dá o valor esperado em Mecânica Estatística para observáveis de um sistema de temperatura $T_s = \frac{\hbar}{k_B \tau}$

$$T_Q = \frac{\hbar}{\tau k_B}$$

O que acontece quando fazemos $T_Q \rightarrow 0$?

$$\tau = \hbar \beta = \frac{\hbar}{k_B T_Q}$$

$$T_Q \rightarrow 0 \left\{ \begin{array}{l} \beta \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow \infty \end{array} \right.$$

$$\text{Tr} [\hat{U}_E(\tau)] = \sum_n e^{-\frac{\tau}{\hbar} E_n}$$

$$\tau \rightarrow \infty \Rightarrow e^{-\frac{\tau}{\hbar} E_0} \gg e^{-\frac{\tau}{\hbar} E_1} \gg e^{-\frac{\tau}{\hbar} E_2}$$

Seleciono a configuração de menor energia

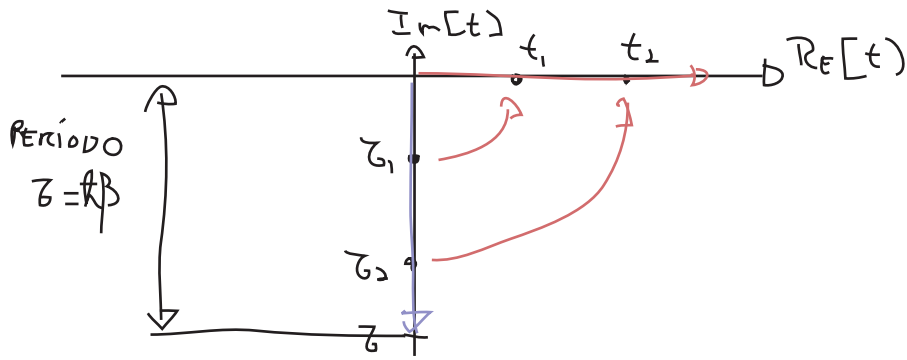
$$\text{Tr} [\hat{U}_E(\tau \rightarrow \infty)] = \langle 0 | e^{-\frac{\tau}{\hbar} E_0} | 0 \rangle$$

$$\text{Tr} [\hat{U}_E(\tau) \hat{A}(q_E)] = \langle 0 | \hat{A}(q_E) | 0 \rangle e^{-\frac{\tau}{\hbar} E_0}$$

$$\langle 0 | \hat{A}(q_E) | 0 \rangle = \langle \hat{A} \rangle_{\beta \rightarrow \infty}$$

Mandar a temperatura para zero **projeta os operadores no vácuo da teoria**. Com isso podemos entender outra forma de obter as funções de Green de interesse (a função de dois pontos abaixo é um exemplo dos chamados **Propagadores de Feynman**):

$$\Delta_F(t_1 - t_2) = \langle 0 | T \{ \hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2) \} | 0 \rangle$$



Podemos obter primeiro o valor $\langle \hat{q}_E(z_1) \hat{q}_E(z_2) \rangle_{\beta = \frac{\tau}{\hbar}} = \int_{\mathcal{P}} \mathcal{D}q_E e^{-\frac{i}{\hbar} S_E} q_E(z_1) q_E(z_2)$

$(z_1 < z_2) \Rightarrow (t_1 < t_2)$

e então voltar ao tempo real fazendo: $z_1 \rightarrow i t_1$
 $z_2 \rightarrow i t_2 \Rightarrow \langle \hat{q}(t_2) \hat{q}(t_1) \rangle_{\beta}$

Se tivéssemos calculado a mesma coisa com $z_2 < z_1$ (note que na integral de trajetória não há diferença), teríamos voltado para: $\langle \hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2) \rangle_{\beta}$

ou seja, voltamos sempre no produto temporalmente ordenado:

$$\langle T \{ \hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2) \} \rangle_{\beta}$$

Para projetar no vácuo basta tomar temperatura zero

$$\left. \begin{matrix} \beta \rightarrow \infty \\ T \rightarrow 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \langle 0 | T \{ \hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2) \} | 0 \rangle$$

Podemos também obter uma expressão para o propagador/correlator livre em temperaturas finitas:

$$\Delta_{FREE}^E(t_E) = \langle T \{ \hat{q}(-i t_E) \hat{q}(0) \} \rangle_{\beta}$$

considerando a equação de movimento (Oscilador Harmônico):

$$\left[\frac{d^2}{dt_1^2} + \omega^2 \right] \Delta_{FREE}^E(t_{E1} - t_{E2}) = \delta(t_{E1} - t_{E2}) \quad (\text{eq. 26.1})$$

$$-\frac{d^2}{dt_{E1}^2} + \omega^2$$

1 (já podemos voltar para unidades naturais)

Lembrando que, como o espaço Euclideo é cíclico de período $\tau = \hbar\beta$, vale:

$$\Delta_{FREE}^E(t_E \pm \beta) = \Delta_{FREE}^E(t_E)$$

A eq. 45.1 tem somente uma solução para $(t_{E1} - t_{E2}) \in [0, \beta]$:

$$\Delta_{F \neq E E}(t_E) = \frac{1}{2\omega} \left[(1 + n(\omega)) e^{-\omega t_E} + n(\omega) e^{\omega t_E} \right] \quad (\text{eq. 27.1})$$

onde:

$$n(\omega) = \frac{1}{e^{\beta|\omega|} - 1} \quad (\text{eq. 27.2})$$

é a distribuição de Bose-Einstein. E no limite de temperatura zero:

$$\begin{aligned} T=0 & \quad n(\omega) \rightarrow 0 \\ \beta \rightarrow \infty & \quad \Delta_{F \neq E E} \rightarrow \Delta_F(t_E) = \frac{e^{-\omega t_E}}{2\omega} = \frac{e^{-i\omega t}}{2\omega} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{(compare com a solução} \\ \text{da pg 18)} \\ \text{voltando para Minkowski} \end{array}$$

O oscilador Harmônico forçado (de novo)

Vejamos como fica o oscilador no espaço Euclideano. Partindo da ação:

$$i S[q] = i \int dt \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 - \frac{\omega^2}{2} q^2 + J q \right]$$

$$\begin{array}{l} W \\ | \\ C \\ | \\ K \end{array} \left\{ \begin{array}{l} t = -it_E \\ q(t) = q(-it_E) = q_E(t_E) \\ J(t) = J(-it_E) = J_E(t_E) \end{array} \right. \quad \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 = \left(\frac{1}{-i} \right)^2 \left(\frac{dq_E}{dt_E} \right)^2$$

$$-S_E[q] = \int dt_E \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{dq_E}{dt_E} \right)^2 - \frac{\omega^2}{2} q_E^2 + J_E q_E \right]$$

Suprimindo todos os índices "E" para simplificar a notação, obtemos a seguinte função de partição:

$$Z_E[J] = \int_{\mathcal{F}} \mathcal{D}q \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int dt \left[\left(\frac{dq}{dt} \right)^2 + \omega^2 q^2 \right] + \int dt J(t) q(t) \right\} \quad (\text{eq. 27.3})$$

A vantagem agora é que estamos fazendo esta integral em trajetórias fechadas, por isso não há problema com bordas quando integramos por partes (compare com a pg 14):

$$\begin{aligned} Z_E[J] &= \int_{\mathcal{F}} \mathcal{D}q \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{z_1}^{z_1+\beta} dt q \left[-\left(\frac{dq}{dt} \right)^2 + \omega^2 q \right] + \int_{z_1}^{z_1+\beta} dt J(t) q(t) \right\} = \\ &= N \exp \left\{ \frac{1}{2} \int ds \int ds' J(s) \Delta_E(s, s') J(s') \right\} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} z_1 \rightarrow -\infty \\ z_1+\beta \rightarrow \infty \quad \leftrightarrow \quad \beta \rightarrow \infty \\ J(t) \neq 0 \quad -T < t < T \\ J(t) = 0 \quad |t| > |T| \end{array} \quad (\text{eq. 27.4})$$

note que este Δ é a função de Green que soluciona o problema clássico:

$$-\frac{d^2 q_0}{dt^2} + \omega^2 q_0 = J(t)$$

$$q_0(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \Delta_F(t, t') J(t')$$

$$\Delta_E(s, s') \equiv \left(-\frac{d^2}{ds^2} + \omega^2\right)^{-1}(s, s') = \int \frac{dE_E}{2\pi} \frac{e^{-i E_E (s-s')}}{E_E^2 + \omega^2} \quad (\text{eq. 28.1})$$

$$\left(-\frac{d^2}{ds^2} + \omega^2\right) \Delta_E(s, s') = \int \frac{dE_E}{2\pi} \left(-(-i E_E)^2 + \omega^2\right) \frac{e^{-i E_E (s-s')}}{E_E^2 + \omega^2} = \delta(s-s')$$

Note que a integral feita da primeira para a segunda linha de 27.4 é uma Gaussiana tradicional (nenhuma exponencial complexa por ali). Além disso o propagador Euclidiano em 28.1 não tem pólos para E_E real e portanto não precisamos falar nada sobre o caminho de integração. Os polos foram movidos para o eixo complexo pela rotação de Wick:

polos de Δ_E : $E_E = \pm i \omega$

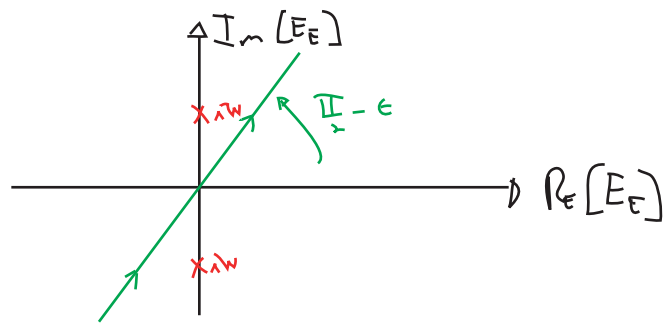
Queremos, finalmente, voltar para o espaço de Minkowski. Já sabemos que $t = -i t_E$ mas como rodamos E_E ? Primeiramente exigimos que $E t = E_E t_E$, então:

$$E \approx i E_E \approx e^{i \frac{\pi}{2}} E_E \quad E t = (i E_E)(-i t_E) = E_E t_E$$

(o que é arbitrário, mas vai garantir que ondas planas se propagem na mesma direção espacial com t ou t_E crescente quando passarmos para mais dimensões, uma vez que:

$$e^{i p_\mu x^\mu} = e^{-i (\vec{E} t - \vec{p} \cdot \vec{x})} = e^{-i (E_E t_E - \vec{p} \cdot \vec{x})}$$

Além disso, para que a extensão analítica seja válida, não podemos cruzar os polos, portanto não podemos rodar totalmente para $E_E = -i E$ mas sim parar antes de chegar no polo:



$$E = e^{i(\frac{\pi}{2} - \epsilon)} E_E = i(E_E - i \epsilon)$$

ou

$$E_E = e^{-i(\frac{\pi}{2} - \epsilon)} E = -i(E + i \epsilon)$$

Com esta rotação temos:

$$(\text{eq. 28.1}) \Rightarrow \Delta_E(t_E = i t) = \int \frac{dE_E}{2\pi} \frac{e^{-i E_E t_E}}{E_E^2 + \omega^2} = \int \frac{i dE}{2\pi} \frac{e^{-i E t}}{E^2 - \omega^2 + i \epsilon} = \Delta_F(t)$$

$$E_E^2 = [-i(E + i \epsilon)]^2 = -(E^2 + i \epsilon E + \epsilon^2)$$

compare com o fim da pg 17 (lembrando que lá $p = p^0 = E$)

De forma que, mais uma vez, somos levados à prescrição de Feynman.

Quantização do Campo Escalar por Path Integrals

(Nastase 9, Peskin 9.2, Ryder 6.1 a 6.5, Ramond 3.1 e 3.2)

Usaremos as idéias usadas no oscilador harmônico para quantizar o campo escalar usando integrais de trajetória. Resumindo, o caminho mais curto e seguro que encontramos para quantizar o oscilador harmônico forçado foi:

- (1) Escrever uma função de partição do sistema como uma integral de trajetória, sobre um caminho fechado, no espaço Euclidiano (esta integral é bem definida e não tem bordas para criar problemas)
- (2) Para projetar sobre os estados do vácuo, tomamos $\beta \rightarrow 0$ (período infinito na integral de traj.)
- (3) Rodamos o resultado para o espaço físico (de Minkowski), tomando cuidado de não tocar os polos (o que nos leva invariavelmente a um propagador de Feynman)

Para passar para uma teoria de campos, faremos a substituição:

$$q_\nu(t) \rightarrow \phi_{\vec{x}}(t) \equiv \phi(\vec{x}, t) \equiv \phi(x)$$

↑ tem uma discretização do espaço aqui

A ação do campo escalar, no espaço de Minkowski, é:

$$i S[\phi] = i \int d^4x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - V(\phi) \right]$$

e as funções de n pontos:

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = \langle \Omega | T \{ \hat{\phi}(x_1) \dots \hat{\phi}(x_n) \} | \Omega \rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{i S[\phi]} \phi(x_1) \dots \phi(x_n)$$

informações sobre o estado (eg. $|\Omega\rangle$ vs $|\Omega\rangle$ ou vácuo vs estado excitado) estão na ação usada e nas condições de contorno da integral

e estas podem ser obtidas a partir de integrais de trajetória sobre trajetórias periódicas de período infinito, usando a seguinte ação Euclidiana:

$$-S_E[\phi] = - \int d^4x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\mu \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + V(\phi) \right] \quad (\text{eq. 106.1})$$

(todos os índices "E" foram suprimidos)

EUCLID: $a_\mu b_\mu = a_\mu b^\mu = a_\mu b_\nu \delta^{\mu\nu}$

$$x^0 = x_0 \equiv -i x^1 \quad x^1 = x_1 = t_E$$

$$x^1 = i x^0$$

$$\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^0} \frac{\partial \phi}{\partial x^0} - \partial_i \phi \partial_i \phi =$$

$$= - \frac{\partial \phi}{\partial x^1} \frac{\partial \phi}{\partial x^1} - \partial_i \phi \partial_i \phi = - \partial_\mu^E \phi \partial_\mu^E \phi$$

As funções de Green Euclidianas são:

$$G_n^{(E)}(x_1, \dots, x_n) = \int \mathcal{D}\phi \ e^{-S_E[\phi]} \phi(x_1) \dots \phi(x_n)$$

Podemos escrever o funcional gerador / função de partição para um período β :

$$Z[\beta, J] = \text{Tr} \left\{ e^{-\beta \hat{H}_3} \right\} = \int \mathcal{D}\phi \ e^{-S_E[\phi] + J\phi}$$

$\phi(\vec{x}, t_E + \beta) = \phi(\vec{x}, t_E)$

$J\phi = \int d^d x \ J(x)\phi(x)$

$\beta \rightarrow \infty$

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \ e^{-S_E[\phi] + J\phi} \equiv \langle 0|0 \rangle_J \quad (\text{eq. 30.1})$$

estamos generalizando o raciocínio a seguir para um número arbitrário de dimensões

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{\int \mathcal{D}\phi \ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{-S_E[\phi] + J\phi}}{\int \mathcal{D}\phi \ e^{-S_E[\phi] + J\phi}} \Bigg|_{J=0} \quad (\text{eq. 30.2})$$

e (por definição):

$$Z[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \prod_{i=1}^n d^d x_i \ G_n(x_1, \dots, x_n) J(x_1) \dots J(x_n) \quad (\text{eq. 30.3})$$

Teoria de Perturbação

Vamos assumir agora que este campo tem uma interação tratável em teoria de perturbação, e fazer a divisão usual:

$$S[\phi] = S_0[\phi] + S_I[\phi]$$

A funções de Green no espaço dos momentos são:

$$\tilde{G}_n(p_1, \dots, p_n) = \int d^4 x_1 \dots d^4 x_n \ e^{i(p_1 x_1 + \dots + p_n x_n)} G_n(x_1, \dots, x_n)$$

Qualquer teoria que seja invariante por translações (ou seja, que conserve momento e energia):

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = G_n(x_1 - X, x_2 - X, \dots, x_n - X)$$

escolhendo: $X = x_1$ e mudando as integrais: $x_i \rightarrow x_i + x_1 \quad i \geq 2$

$$\tilde{G}_n(p_1, \dots, p_n) = \left[\int d^4 x_1 \ e^{i x_1 (p_1 + \dots + p_n)} \right] \left[\int d^4 x_2 \dots d^4 x_n \ e^{i(x_2 p_2 + \dots + x_n p_n)} G_n(0, x_2, \dots, x_n) \right]$$

$$= (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \dots + p_n) G_n(p_1, \dots, p_n)$$

↳ tendo em mente que a dependência de p_1 entra por meio da soma dos outros momentos $p_1 = p_2 + \dots + p_n$
 ↳ nestas funções a conservação de momento já está garantida

Um resultado importante, chamado de fórmula de Dyson, pode ser obtido começando com o VEV (valor esperado no vácuo) de operadores **quaisquer** no vácuo da teoria livre:

$$\langle 0 | \hat{O}[\{\hat{\phi}\}] | 0 \rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_0[\phi]} \mathcal{O}[\{\phi\}]$$

↳ vácuo da teoria livre

↳ deste lado a informação vácuo está no fato de tomarmos configurações periódicas $\phi(\vec{x}, t_E + \beta) = \phi(\vec{x}, t_E)$ com β infinito e sabemos que é o vácuo da teoria livre pois usamos S_0 na função de partição

Suponha que: $\hat{O} = e^{-S_I[\phi]}$

temos então: $\langle 0 | e^{-S_I[\phi]} | 0 \rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_0[\phi] - S_I[\phi]}$ (eq. 31.1)

e se: $\hat{O} = \hat{\phi}(x_1) \dots \hat{\phi}(x_n) e^{-S_I[\phi]}$

$$\langle 0 | \hat{\phi}(x_1) \dots \hat{\phi}(x_n) e^{-S_I[\phi]} | 0 \rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_0[\phi] - S_I[\phi]} \phi(x_1) \dots \phi(x_n) = G_n(x_1, \dots, x_n)$$

(lembre que quando rodarmos de volta para o espaço de Minkowski vamos obter o ordenamento temporal) (eq. 31.2)

finalmente, se: $\hat{O} = e^{-S_I[\phi]} e^{\int d^4x \mathcal{J}(x) \phi(x)}$

$$\langle 0 | e^{-S_I[\phi]} e^{\int d^4x \mathcal{J}(x) \phi(x)} | 0 \rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_0[\phi] - S_I[\phi] + \mathcal{J} \cdot \phi} = Z[\mathcal{J}]$$

Fórmula de Dyson (eq. 31.3)

Solução da Teoria Livre

Para $S_I[\phi] = 0$

$$Z_0[\mathcal{J}] = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_0[\mathcal{J}] + \mathcal{J} \cdot \phi} = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4x [\partial_\mu \phi \partial_\mu \phi + m^2 \phi^2] + \mathcal{J} \cdot \phi \right\}$$

$$= \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4x \phi \underbrace{[-\partial_\mu \partial_\mu + m^2]}_{\Delta^{-1}} \phi + \mathcal{J} \cdot \phi \right\}$$