$$= (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \dots + p_n)\, \underbrace{G_n}\,(\underbrace{p_1}, \dots, p_n)$$

tendo em mente que a dependencia de p_1 entra por meio da soma dos outros momentos $p_1 = p_2 + \dots + p_n$

nestas funções a conservação de momento já está garantida

Um resultado importante, chamado de fórmula de Dyson, pode ser obtido começando com o VEV (valor esperado no vácuo) de operadores quaisquer no vácuo da teoria livre:

$$\langle 0 | \hat{O}[\{\hat\phi\}] \underbrace{|0\rangle}_{\text{vácuo da teoria livre}} = \int \mathcal{D}\phi \, e^{-S_0[\phi]}\, O[\{\phi\}]$$

vácuo da teoria livre

deste lado a informação vácuo está no fato de tomarmos configurações periódicas $\phi(\vec{x}, t_E + \beta) = \phi(\vec{x}, t_E)$ com β infinito e sabemos que é o vácuo da teoria livre pois usamos S_0 na função de partição

Suponha que: $\hat{O} = e^{-S_I[\phi]}$

temos então:

$$\boxed{\langle 0 | e^{-S_I[\phi]} |0\rangle = \int \mathcal{D}\phi \, e^{-S_0[\phi] - S_I[\phi]}}$$

(eq. 31.1)

e se: $\hat{O} = \hat\phi(x_1)\dots\hat\phi(x_n)\, e^{-S_I[\phi]}$

$$\boxed{\langle 0 | \hat\phi(x_1)\dots\hat\phi(x_n)\, e^{-S_I[\phi]} |0\rangle = \int \mathcal{D}\phi \, e^{-S_0[\phi] - S_I[\phi]}\, \phi(x_1)\dots\phi(x_n) = G_n(x_1, \dots, x_n)}$$

(lembre que quando rodarmos de volta para o espaço de Minkowski vamos obter o ordenamento temporal)

(eq. 31.2)

finalmente, se: $\hat{O} = e^{-S_I[\phi]}\, e^{\int d^4x\, J(x)\phi(x)}$

$$\boxed{\langle 0 | e^{-S_I[\phi]}\, e^{\int d^4x\, J(x)\phi(x)} |0\rangle = \int \mathcal{D}\phi \, e^{-S_0[\phi] - S_I[\phi] + J\cdot\phi} = Z[J]}$$

Fórmula de Dyson

(eq. 31.3)

Solução da Teoria Livre

Para $S_I[\phi] = 0$

$$Z_0[J] = \int \mathcal{D}\phi \, e^{-S_0[J] + J\cdot\phi} = \int \mathcal{D}\phi \, \exp\left\{ -\frac{1}{2}\int d^4x \left[\partial_\mu\phi\,\partial_\mu\phi + m^2\phi^2\right] + J\cdot\phi \right\}$$

$$= \int \mathcal{D}\phi \, \exp\left\{ -\frac{1}{2}\int d^4x\, \phi \overbrace{\left[-\partial_\mu\partial_\mu + m^2\right]}^{\Delta^{-1}} \phi + J\cdot\phi \right\}$$

Note que:

$$-\frac{1}{2}\left(\phi - J\cdot\Delta\right)\cdot\Delta^{-1}\cdot\left(\phi - \Delta\cdot J\right) = -\frac{1}{2}\phi\,\Delta^{-1}\phi + \underbrace{\frac{1}{2}\phi\cdot J + \frac{1}{2}J\cdot\phi}_{J\cdot\phi} \underbrace{-\frac{1}{2}J\cdot\Delta\cdot J}_{\text{sobrando}}$$

Logo:

$$Z_0[J] = \int D\phi\, \exp\left\{-\frac{1}{2}\big(\underbrace{\phi - J\cdot\Delta}_{\phi'}\big)\cdot\Delta^{-1}\cdot\big(\phi - \overbrace{\Delta\cdot J}^{\phi_{cl}}\big) + \frac{1}{2}J\cdot\Delta\cdot J\right\} = \quad (D\phi' = D\phi)$$

$$= e^{\frac{1}{2}J\Delta J}\underbrace{\int D\phi'\, e^{-\frac{1}{2}\phi'\Delta^{-1}\phi'}}_{\langle 0|0\rangle_0} \quad \text{(eq 30.1)}$$

$$\boxed{Z_0[J] = e^{\frac{1}{2}J\Delta J}\langle 0|0\rangle_0} \quad \text{(eq. 32.1)}$$

$$Z_0[0] = \langle 0|0\rangle_0 = 1 \quad \text{(normalização)}$$

O propagador é tal que: $\Delta^{-1} = -\partial_\mu\partial_\mu + m^2$

e portanto:

$$\boxed{\Delta(x,y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{ip(x-y)}}{p^2+m^2}} \quad \text{(eq. 32.2)}$$

que não tem polos. A rotação de volta para Minkowski, assim como no caso do oscilador forçado (pg 28) leva a polos ($|p| = \pm i m$), então a rotação feita em p^0 deve ser de $(\pi/2 - \varepsilon)$ ao invés de $(\pi/2)$:

$$p_E^0 = e^{-i\left(\frac{\pi}{2}-\epsilon\right)}p^0 = -i\left(p^0 + i\epsilon\right)$$

$$p_E^2 + m^2 = (p_E^0)^2 + (\vec{p})^2 + m^2 = -(p^0+i\epsilon)^2 + (\vec{p})^2 + m^2 = \underbrace{-(p^0)^2 + (\vec{p})^2}_{-p_\mu p^\mu} + m^2 - i\epsilon' = -p^2 + m^2 - i\epsilon$$

e obtemos (agora tudo no espaço de Minkowski):

$$p_E\cdot x_E = p_4 x_4 + \vec{p}\cdot\vec{x} = (-ip^0)(ix^0) + \vec{p}\cdot\vec{x} \rightarrow -p_\mu x^\mu \qquad p_0 \rightarrow -p_0$$

$$\boxed{\Delta(t_E = it, \vec{x}; y=0) = D_F(t,\vec{x}) = \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{i\,e^{-ipx}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}} \quad \text{(eq. 32.3)}$$

Teorema de Wick:

Vejamos que forma toma o teorema de Wick neste formalismo. Considere a função:

$$F[\{\phi\}] = \phi^2(x_1)\,\phi(x_2)\,\phi^4(x_3)$$

$$\langle 0|F[\{\phi\}]|0\rangle = \int \mathcal{D}\phi \; e^{-S_0[\phi]}\,\phi^2(x_1)\,\phi(x_2)\,\phi^4(x_3)$$

Note que: $$\frac{\delta}{\delta J(x_1)} e^{J\cdot\phi} = e^{J\cdot\phi}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\int d^4x\, J(x)\phi(x) = e^{J\cdot\phi}\,\phi(x_1)$$

$$J\cdot\phi = \int d^4x\; J(x)\phi(x)$$

$$\frac{\delta J(x)}{\delta J(x_1)} = \delta^4(x-x_1)$$

Logo:

$$\langle 0|F[\{\phi\}]|0\rangle = \left(\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\right)^2 \frac{\delta}{\delta J(x_2)}\left(\frac{\delta}{\delta J(x_3)}\right)^4 \underbrace{\int \mathcal{D}\phi\; e^{-S_0[\phi]+J\cdot\phi}\Bigg|_{J=0}}_{Z_0[J=0]}$$

Z_0 → teoria livre

Podemos, de fato, fazer o mesmo para uma função arbitrária (caso ela não seja um polinômio, podemos considerar que está definida por sua série de potências):

$$\boxed{{}_J\langle 0|F[\{\phi\}]|0\rangle_J = F\left[\left\{\frac{\delta}{\delta J}\right\}\right] Z_0[J]} \qquad \text{(eq. 33.1)}$$

Voltando então na fórmula de Dyson (eq. 31.3), temos:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi\, e^{-S_0[\phi]\underbrace{-S_I[\phi]}_{-\int d^4x\, V(\phi(x))}+J\cdot\phi} = {}_J\langle 0|\underbrace{e^{-\int d^4x\, V(\phi(x))}}_{F[\phi]}|0\rangle_J$$

$$\boxed{Z[J] = e^{-\int d^4x\, V\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)} Z_0[J] \overset{30.1}{=} \underbrace{e^{-\int d^4x\, V\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)}}_{\text{interação}}\; \underbrace{e^{\frac{1}{2}J\cdot\Delta\cdot J}}_{\text{parte livre (Δ é o propagador da teoria livre)}}} \qquad \text{(eq. 33.2)}$$

Não é muito óbvio, mas este é o teorema de Wick no formalismo de integrais de trajetória. De novo temos uma solução exata da teoria interagente (neste caso a função de partição), mas esta só é útil se pudermos expandir a exponencial da interação e truncar a expansão, ou seja, em teoria de perturbação.

Regras de Feynman

Para perceber que a equação 33.2 é de fato equivalente ao teorema de Wick, vamos calcular algumas funções de green usando-a. Definindo a notação:

$$G_n^{(p)}(x_1, \dots, x_n)$$

(p): em ordem *p* da expansão perturbativa

n: função de *n* pontos

Podemos obter estas funções a partir do funcional gerador, também calculado até alguma ordem em teoria de perturbação:

$$\boxed{Z[J] = e^{-\int d^4x\, V\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)}} e^{\frac{1}{2} J\cdot\Delta\cdot J} =$$

$$= \left[1 - \int d^4x\, V\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right) + \frac{1}{2!}\int d^4x\, V\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\int d^4x\, V\left(\frac{\delta}{\delta J(y)}\right) + \dots\right] e^{\frac{1}{2} J\cdot\Delta\cdot J} =$$

$$\boxed{\equiv Z_0[J] + Z_1[J] + Z_2[J] + \dots} \quad \text{(eq. 34.1)}$$

$$\boxed{G_n^{(p)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta J(x_n)} Z_p[J]\Big|_{J=0}} \quad \text{(eq. 34.2)}$$

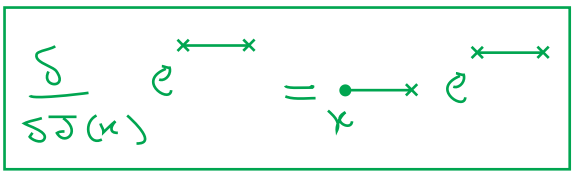
O objeto mais simples que podemos calcular é:

$$G_1^{(0)}(x_1)_J = \frac{\delta}{\delta J(x_1)} e^{\frac{1}{2} J\cdot\Delta\cdot J} = e^{\frac{1}{2} J\cdot\Delta\cdot J} \frac{\delta}{\delta J(x_1)}\left\{\frac{1}{2}\int d^4x\, d^4x'\, J(x)\Delta(x,x')J(x')\right\} =$$

$$= e^{\frac{1}{2} J\cdot\Delta\cdot J} \frac{1}{2}\int d^4x\, d^4x' \left\{\delta^4(x-x_1)\Delta(x,x')J(x') + J(x)\underbrace{\Delta(x,x')}_{\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{ip(x-x')}}{p^2+m^2} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ip(x-x')}}{p^2+m^2}}\delta^4(x'-x_1)\right\} =$$

$$= e^{\frac{1}{2} J\cdot\Delta\cdot J} \underbrace{\int d^4x\, \Delta(x_1,x)J(x)}_{(\Delta\cdot J)(x_1)} =$$

$$= (\Delta\cdot J)(x_1)\, e^{\frac{1}{2} J\cdot\Delta\cdot J}$$



que, para $J = 0$, é nula: $\boxed{G_1^{(0)}(x_1) = 0}$ (eq. 34.3)

É fácil ver que todas as funções com um número ímpar de pontos são nulas, pois temos dois J's em Z e fazendo um número ímpar de derivadas vai sobrar sempre um J multiplicando tudo, o que anula a função quando fazemos $J = 0$.

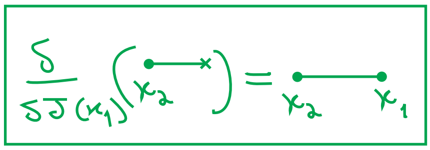
$$k=0,1,2,\ldots \Rightarrow \boxed{G^{(0)}_{2k+1}(x_1,\ldots,x_{2k+1})=0}$$

(eq. 35.1)

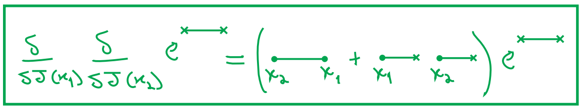
A função de 2 pontos fica:

$$G_2^{(0)}(x_1,x_2)_J = \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \underbrace{\frac{\delta}{\delta J(x_2)} e^{\frac{1}{2} J\cdot\Delta\cdot J}}_{G_1^{(0)}(x_2)_J} = \frac{\delta}{\delta J(x_1)}\left[(\Delta\cdot J)(x_2)\, e^{\frac{1}{2} J\cdot\Delta\cdot J}\right] =$$

$$\frac{\delta}{\delta J(x_1)}(\Delta\cdot J)(x_2) = \frac{\delta}{\delta J(x_1)}\int d^4x\, \Delta(x,x_2)J(x) = \int d^4x\, \Delta(x,x_2)\delta(x-x_1) = \Delta(x_1,x_2)$$



$$= \Delta(x_1,x_2)\, e^{\frac{1}{2} J\cdot\Delta\cdot J} + (\Delta\cdot J)(x_2)(\Delta\cdot J)(x_1)\, e^{\frac{1}{2} J\cdot\Delta\cdot J}$$



$$J=0 \Rightarrow G_2^{(0)}(x_1,x_2) = \Delta(x_1,x_2) \Leftrightarrow$$

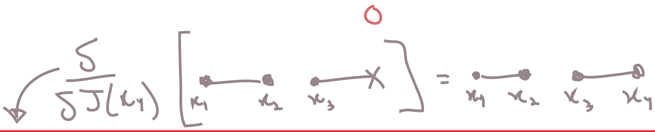
A função de 3 pontos é zero, como já adiantamos, pois:

$$(J=0)$$

$$G_3^{(0)}(x_1,x_2,x_3)_J = \frac{\delta}{\delta J(x_3)} G_2^{(0)}(x_1,x_2)_J = \Big[\Delta(x_1,x_2)\cancelto{0}{(\Delta\cdot J)}(x_3) + \Delta(x_2,x_3)\cancelto{0}{(\Delta\cdot J)}(x_1) +$$

$$+ \cancelto{0}{(\Delta\cdot J)}(x_2)\,\Delta(x_1,x_3) + \underbrace{(\Delta\cdot J)(x_2)(\Delta\cdot J)(x_1)(\Delta\cdot J)(x_3)}_{0}\Big] e^{\frac{1}{2} J\cdot\Delta\cdot J}$$

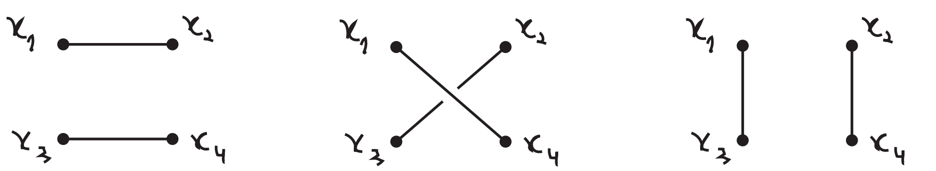
A próxima função não trivial é (exercício):



$$\boxed{\begin{aligned} G_4^{(0)}(x_1,x_2,x_3,x_4) &= \frac{\delta}{\delta J(x_1)}\cdots\frac{\delta}{\delta J(x_4)}\, e^{\frac{1}{2} J\cdot\Delta\cdot J}\Big|_{J=0} = \\ &= \Delta(x_1,x_2)\Delta(x_3,x_4) + \Delta(x_1,x_3)\Delta(x_2,x_4) + \Delta(x_1,x_4)\Delta(x_2,x_3) \end{aligned}}$$

(eq. 35.2)

Que, em diagramas, é exatamente o mesmo que obtivemos na caso canônico:



de onde fica claro que a lógica por trás do Teorema de Wick (conectar os pontos externos de todas as formas possíveis) aqui é implementada pela regra do produto da derivada.

Passemos para o caso com interação, considerando agora a teoria $\lambda\phi^3$:

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{3!}\phi^3$$

(note que só queremos ver como saem as regras de Feynman, esta teoria é problemática pois o potencial não tem mínimo global, e energias infinitamente negativas são permitidas)

Em ordem λ, temos:

$$\boxed{Z_1[J] =} -\int d^4x\, V\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right) e^{\frac{1}{2}J\cdot\Delta\cdot J} = -\int d^4x \frac{\lambda}{3!}\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^3 e^{\frac{1}{2}J\cdot\Delta\cdot J} =$$

$$= -\frac{\lambda}{3!}\int d^4x \left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^2\left[(\Delta\cdot J)(x)\, e^{\frac{1}{2}J\cdot\Delta\cdot J}\right] = -\frac{\lambda}{3!}\int d^4x \left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\left[\Delta(x,x) + (\Delta\cdot J)^2(x)\right] e^{\frac{1}{2}J\cdot\Delta\cdot J} =$$

$$= -\frac{\lambda}{3!}\int d^4x \left[\underline{\Delta(x,x)(\Delta\cdot J)(x)} + \underbrace{\Delta(x,x)(\Delta\cdot J)(x) + (\Delta\cdot J)(x)\,\Delta(x,x) + (\Delta\cdot J)^3(x)}\right] e^{\frac{1}{2}J\cdot\Delta\cdot J} =$$

$$\boxed{= -\frac{\lambda}{3!}\int d^4x \left[3\Delta(x,x)(\Delta\cdot J)(x) + (\Delta\cdot J)^3(x)\right] e^{\frac{1}{2}J\cdot\Delta\cdot J}} \quad \text{(eq. 36.1)}$$

Note que este funcional gerador agora tem sempre potências ímpares de *J*, de forma que as funções de *n* pontos serão nulas para *n* par:

$$\boxed{G^{(1)}_{2k}(x_1, \dots, x_{2k}) = 0} \;\; \lambda\phi^3 \quad \text{(eq. 36.2)}$$

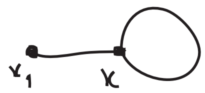
A função de 1 ponto é dada por:

$$G^{(1)}_1(x_1) = \frac{\delta}{\delta J(x_1)} Z_1[J]\Big|_{J=0} = -\frac{\lambda}{3!}\int d^4x \Big[3\Delta(x,x)\Delta(x,x_1) + 3\Delta(x,x)\cancel{(\Delta\cdot J)}^{\to 0}(x)\,\cancel{(\Delta\cdot J)}^{\to 0}(x_1) +$$

$$+ 3\Delta(x,x_1)\cancel{(\Delta\cdot J)^2}^{\to 0}(x) + (\Delta\cdot J)^3(x)\cancel{(\Delta\cdot J)}_{\to 0}(x_1)\Big] e^{\frac{1}{2}J\cdot\Delta\cdot J}\Big|_{J=0} =$$

$$= -\frac{\lambda}{2}\int d^4x\; \Delta(x,x)\,\Delta(x,x_1)$$

Cujo diagrama é:



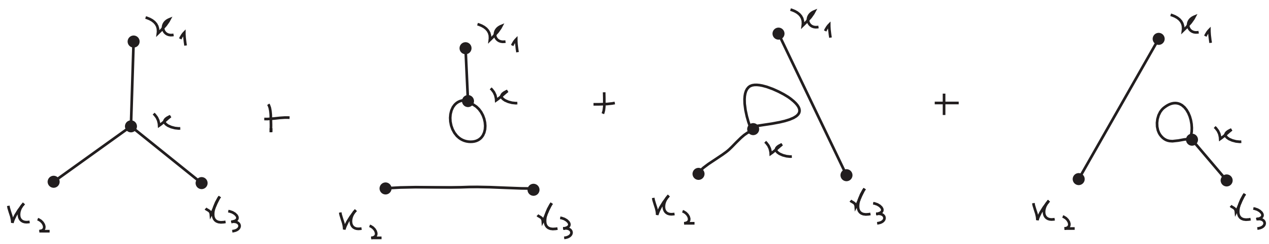
(tadpole diagram)

A função de 2 pontos dá zero (cheque!) e a função de 3 pontos é:

$$G_3^{(1)}(x_1,x_2,x_3) = \frac{\delta}{\delta J(x_1)}\frac{\delta}{\delta J(x_2)}\frac{\delta}{\delta J(x_3)} Z_1[J]\Big|_{J=0} =$$

$$= -\lambda \int d^dx \left\{ \Delta(x,x_1)\Delta(x,x_2)\Delta(x,x_3) + \frac{1}{2}\Delta(x,x)\left[\Delta(x,x_1)\Delta(x_2,x_3) + \Delta(x,x_2)\Delta(x_1,x_3) + \Delta(x,x_3)\Delta(x_1,x_2)\right]\right\}$$

que em diagramas fica:



Podemos obter as bolhas no vácuo calculando diretamente a função de 0 pontos, dada pelo próprio funcional gerador (pois fazemos zero derivadas), que em segunda ordem de perturbação é :

$$Z_2[J] = +\frac{1}{2!}\int d^dx \frac{\lambda}{3!}\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^3 \int d^dy \frac{\lambda}{3!}\left(\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)^3 \underbrace{e^{\frac{1}{2}J\cdot\Delta\cdot J}}$$

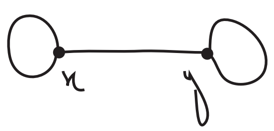
ao invés de fazer a regra da cadeia, posso pensar esta exponencial em termos de sua expansão. Como temos 6 derivadas em *J* e no fim faremos *J = 0*, somente o termo com 6 *J's* vai sobreviver

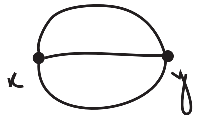
$$Z_2[J=0] = \frac{1}{2!}\int d^dx \frac{\lambda}{3!}\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^3 \int d^dy \frac{\lambda}{3!}\left(\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)^3 \left\{ \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \overbrace{\int d^dz_1 d^dz_2 d^dz_3\, d^dz_1' d^dz_2' d^dz_3' \times J(z_1)\Delta(z_1,z_1')J(z_1')\,J(z_2)\Delta(z_2,z_2')J(z_2')\,J(z_3)\Delta(z_3,z_3')J(z_3')}^{(J\cdot\Delta\cdot J)^3} \right\}\Bigg|_{J=0}$$

exercício

$$Z_2[J=0] = \frac{\lambda^2}{2^3}\int d^dx\, d^dy\, \Delta(x,x)\Delta(x,y)\Delta(y,y) + \frac{\lambda^2}{2\cdot 3!}\int d^dx\, d^dy\, \Delta^3(x,y)$$

em termos de diagramas (note que os fatores de simetria também já saíram certos):





Regras de Feynman no espaço das posições

Primeiramente vamos re-escrever o teorema de Wick em um formato mais útil para obter as regras de Feynman:

$$Z[J] = e^{\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\phi_{cl}}\cdot\Delta\cdot\frac{\delta}{\delta\phi_{cl}}}\left\{e^{-\int d^dx\, V(\phi_{cl}) + J\cdot\phi_{cl}}\right\}\Bigg|_{\phi_{cl}=0} =$$

$$= \mathrm{EXP}\left[\frac{1}{2}\int d^dx\, d^dy\, \Delta(x-y)\frac{\delta}{\delta\phi_{cl}(x)}\frac{\delta}{\delta\phi_{cl}(y)}\right]\left\{e^{-\int d^dx\, V(\phi_{cl}) + J\cdot\phi_{cl}}\right\}\Bigg|_{\phi_{cl}=0} \quad \text{(eq. 38.1)}$$

eq. 33.2 $\rightarrow$ $Z[J] = e^{-\int d^dx\, V\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)}\left\{e^{\frac{1}{2}J\cdot\Delta\cdot J}\right\}$

não ficaremos carregando esta notação, mas perceba que este campo que fazemos ir a zero é o campo clássico, e:

$J \to 0 \Rightarrow \phi_{cl} = 0$

Demonstração

Essencialmente queremos provar que, dadas duas funções de múltiplas variáveis (mesmo número para ambas):

$$F(x) = F(x_1, \dots, x_n) \qquad G(y) = G(y_1, \dots, y_n)$$

$$\Rightarrow \boxed{F\left(\frac{d}{dx}\right) G(x) = G\left(\frac{d}{dy}\right)\left[F(y)\, e^{x\cdot y}\right]_{y=0}} \quad \text{(eq. 38.2)}$$

(Lemma de Coleman)

PROVA: podemos considerar a série de Fourier de *F* e *G* e aí basta provar o Lemma acima para

$$F(x) = e^{a\cdot x} \qquad G(y) = e^{b\cdot y}$$

$$\left(a_1\frac{d}{dx_1} + a_2\frac{d}{dx_2} + \dots\right)^m e^{b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + \dots}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{d}{dx_i} e^{b\cdot x} = b_i e^{b\cdot x} \\ \left(\frac{d}{dx_i}\right)^m e^{b\cdot x} = (b_i)^m e^{b\cdot x}\end{array}\right.$$

$$F\left(\frac{d}{dx}\right) G(x) = e^{a\cdot\frac{d}{dx}} e^{b\cdot x} = \sum_m \frac{1}{m!}\left(a\cdot\frac{d}{dx}\right)^m e^{b\cdot x} = \underbrace{\sum_m \frac{1}{m!}(a\cdot b)^m}_{e^{a\cdot b}} e^{b\cdot x} = e^{b\cdot(a+x)}$$

OK!

$$G\left(\frac{d}{dy}\right)\left[F(y)\, e^{x\cdot y}\right]_{y=0} = e^{b\cdot\frac{d}{dy}}\left[e^{a\cdot y} e^{x\cdot y}\right]_{y=0} = e^{b\cdot(a+x)}\left[e^{a\cdot y} e^{x\cdot y}\right]_{y=0} = e^{b\cdot(a+x)}$$

$$\overbrace{x=\{x_1,\dots,x_n\}}^{\text{vetor}} \to \overbrace{J(x)}^{\text{vetor}}$$
$$y=\{y_1,\dots,y_n\} \to \phi(x)$$

estamos generalizando de um conjunto discreto de variáveis para um contínuo

$$\boxed{F\left[\frac{\delta}{\delta J}\right] G[J] = G\left[\frac{\delta}{\delta \phi}\right]\left[F[\phi]\, e^{J\cdot\phi}\right]_{\phi=0}} \quad \text{(eq. 39.1)}$$

Logo, partindo do teorema de Wick na forma anterior:

$$Z[J] = \underbrace{e^{-\int d^dx\, V\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)}}_{F\left[\frac{\delta}{\delta J}\right]} \underbrace{\left\{ e^{\frac{1}{2} J\cdot\Delta\cdot J} \right\}}_{G[J]} = \underbrace{e^{\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\phi}\cdot\Delta\cdot\frac{\delta}{\delta\phi}}}_{G\left[\frac{\delta}{\delta\phi}\right]} \underbrace{\left\{ e^{-\int d^dx\, V(\phi)}\, e^{J\cdot\phi} \right\}_{\phi=0}}_{\left[F[\phi]\, e^{J\cdot\phi}\right]_{\phi=0}}$$

que é a eq. 38.1

Podemos então obter as regras de Feynman para um potencial mais geral:

$$V(\phi) = \lambda\phi^p$$

$$G_n(x_1,\dots,x_n) = \left.\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1)\dots\delta J(x_n)}\right|_{J=0} =$$

$$= \frac{\delta^n}{\delta J(x_1)\dots\delta J(x_n)} \left\{ e^{\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\phi}\cdot\Delta\cdot\frac{\delta}{\delta\phi}} \left[e^{-\int d^dx\, V(\phi) + J\cdot\phi} \right]_{\phi=0} \right\}_{J=0} =$$

$$= e^{\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\phi}\cdot\Delta\cdot\frac{\delta}{\delta\phi}} \left\{ \phi(x_1)\dots\phi(x_n)\, e^{-\int d^dx\, V(\phi) + \cancel{J\cdot\phi}} \right\}_{\phi=0;\, J=0}$$

este termo já se tornou obsoleto, pois depois das derivadas em ϕ, qualquer termo que sobrar com *J* multiplicado vai ser nulo (quando *J=0*)