$$\overbrace{x=\{x_1,\dots,x_n\}}^{\text{vetor}} \to \overbrace{J(x)}^{\text{vetor}}$$

$$y=\{y_1,\dots,y_n\} \to \phi(x)$$

estamos generalizando de um conjunto discreto de variáveis para um contínuo

$$\boxed{F\left[\frac{\delta}{\delta J}\right] G[J] = G\left[\frac{\delta}{\delta \phi}\right]\left[F[\phi]\, e^{J\cdot\phi}\right]_{\phi=0}} \quad \text{(eq. 39.1)}$$

Logo, partindo do teorema de Wick na forma anterior:

$$Z[J] = \underbrace{e^{-\int d^dx\, V\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)}}_{F\left[\frac{\delta}{\delta J}\right]} \underbrace{\left\{ e^{\frac{1}{2} J\cdot\Delta\cdot J} \right\}}_{G[J]} = \underbrace{e^{\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\phi}\cdot\Delta\cdot\frac{\delta}{\delta\phi}}}_{G\left[\frac{\delta}{\delta\phi}\right]} \underbrace{\left\{ e^{-\int d^dx\, V(\phi)}\, e^{J\cdot\phi} \right\}_{\phi=0}}_{\left[F[\phi]\, e^{J\cdot\phi}\right]_{\phi=0}}$$

que é a eq. 38.1

Podemos então obter as regras de Feynman para um potencial mais geral:

$$V(\phi) = \lambda \phi^p$$

$$G_n(x_1,\dots,x_n) = \left.\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1)\dots\delta J(x_n)}\right|_{J=0} =$$

$$= \frac{\delta^n}{\delta J(x_1)\dots\delta J(x_n)} \left\{ e^{\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\phi}\cdot\Delta\cdot\frac{\delta}{\delta\phi}} \left[e^{-\int d^dx\, V(\phi) + J\cdot\phi} \right]_{\phi=0} \right\}_{J=0} =$$

$$= e^{\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\phi}\cdot\Delta\cdot\frac{\delta}{\delta\phi}} \left\{ \phi(x_1)\dots\phi(x_n)\, e^{-\int d^dx\, V(\phi) + \cancel{J\cdot\phi}} \right\}_{\phi=0;\, J=0}$$

este termo já se tornou obsoleto, pois depois das derivadas em ϕ, qualquer termo que sobrar com *J* multiplicado vai ser nulo (quando *J=0*)

$$\boxed{G_n(x_1,\dots,x_n) = e^{\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\phi}\cdot\Delta\cdot\frac{\delta}{\delta\phi}}\left\{\phi(x_1)\dots\phi(x_n)\, e^{-\int d^4x\, V(\phi)}\right\}_{\phi=0}}$$ (eq. 40.1)

Em ordem *N* de perturbação:

$$G_n^{(N)}(x_1,\dots,x_n) = e^{\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\phi}\cdot\Delta\cdot\frac{\delta}{\delta\phi}}\left\{\phi(x_1)\dots\phi(x_n)\frac{(-\lambda)^N}{N!}\int d^4y_1\dots d^4y_N\,\phi^p(y_1)\dots\phi^p(y_N)\right\}_{\phi=0}$$

estas derivadas vão agir sobre um produto de *Q* campos ϕ, onde:

$$Q = n + pN$$

Se aplicarmos mais do que *Q* derivadas a função se anula e se aplicamos menos do que *Q* derivadas também (pois nesse caso sobram ϕ's que serão levados a zero). Assim, da expansão da exponencial contendo Q derivadas temos (e note Q deve ser obrigatóriamente par pois temos duas derivadas na exponencial):

$(Q = 2q = n + pN)$

$$\boxed{\begin{aligned} G_n^{(N)}(x_1,\dots,x_n) &= \frac{1}{q!\,2^q}\int d^4z_1\,d^4w_1\dots d^4z_q\,d^4w_q\,\frac{\delta}{\delta\phi(z_1)}\Delta(z_1-w_1)\frac{\delta}{\delta\phi(w_1)}\dots\frac{\delta}{\delta\phi(z_q)}\Delta(z_q-w_q)\frac{\delta}{\delta\phi(w_q)}\times \\ &\times\left\{\phi(x_1)\dots\phi(x_n)\frac{(-\lambda)^N}{N!}\int d^4y_1\dots d^4y_N\,\phi^p(y_1)\dots\phi^p(y_N)\right\}_{\phi=0}\end{aligned}}$$

(eq. 40.2)

Temos que agir com estas derivadas sobre todos os campos. Note que, quando aplicamos o par

$$\int d^4z_i\, d^4w_i\, \frac{\delta}{\delta\phi(z_i)}\Delta(z_i-w_i)\frac{\delta}{\delta\phi(w_i)}$$

sobre um par qualquer: $\phi(x)\phi(y)$

obtemos: $$\int d^4z_i\,d^4w_i\left[\delta^4(x-z_i)\,\delta^4(y-w_i)\,\Delta(z_i-w_i)+\delta^4(y-z_i)\,\delta^4(x-w_i)\,\Delta(z_i-w_i)\right]=$$

$$=\underbrace{2}_{}\,\Delta(x-y)$$

como temos *q* fatores de *2* deste tipo, o 2^q em 40.2 é cancelado

O *q!* é cancelado pelo fato de termos *q!* formas de agir as *2q* derivadas nos *2q* campos (e pelo fato das coordenadas nas derivadas serem variáveis mudas de integração). Notem que novemente o que está acontecendo é que estamos conectando pontos externos e vértices de todas as formas possíveis.

Mesmo depois de levar em conta as repetições que cancelam $q!\,2^q$ ainda sobram muitos termos iguais: o fato de ainda termos N variáveis de integração mudas cancela o $N!$ advindo da expansão da exponencial com a interação e o fato de cada termo de interação conter p campos calculados no mesmo ponto introduz um $(p!)^N$ que cancelamos redefinindo:

$$\lambda = \frac{\lambda_p}{p!}$$

Sabemos (do formalismo canônico), que o cancelamento deste $N!(p!)^N$ não é exato, dependendo de detalhes das contrações escolhidas. Assim como antes definimos um fator de simetria:

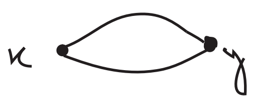
$$S = \frac{N!\,(p!)^N}{\text{(\# de diagramas equivalentes)}}$$

E este fator pode ser maior que 1 se tivermos menos diagramas equivalentes do que inocentemente se esperaria. Para ver como isto aparece aqui, considere o caso $n = 0, p = 2, N = 2$ $(Q = 4, q = 2)$:

$$A = \frac{1}{2!\,2^2}\int dz_i\, dw_i\, dz_j\, dw_j\, dx\, dy\, \frac{\delta}{\delta\phi(z_i)}\Delta(z_i - w_i)\frac{\delta}{\delta\phi(w_i)}\frac{\delta}{\delta\phi(z_j)}\Delta(z_j - w_j)\frac{\delta}{\delta\phi(w_j)}\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)$$

$\to q$ (não confundir o cancelamento destes com o de N! e p!^{N})

de onde podemos extrair todos os termos que contribuem para:

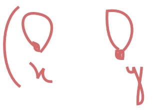


Inocentemente teríamos $2!$ adivindo das integrais em x e y e $(2!)^2$ advindo do fato de termos dois campos em x e dois em y, para um total de 8 termos iguais. Mas veja:

$$A = \frac{1}{\cancel{8}_{\,4}}\int dz_i\, dw_i\, dz_j\, dw_j\, dx\, dy\, \Delta(z_i - w_i)\Delta(z_j - w_j)\frac{\delta}{\delta\phi(z_i)}\frac{\delta}{\delta\phi(w_i)}\frac{\delta}{\delta\phi(z_j)}\times$$

$$\left\{\cancel{2}\,\delta(x - w_j)\phi(x)\phi(y)\phi(y) + \cancel{2}\,\delta(y - w_j)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\right\} =$$

ignoro os termos em que $\frac{\delta}{\delta\phi(z_j)}$ age em no mesmo campo em que agiu $\frac{\delta}{\delta\phi(w_j)}$ pois este contribuem para (



)

$$= \frac{1}{\cancel{4}_{\,2}}\int\cdots\int\Delta\Delta\frac{\delta}{\delta\phi(z_i)}\frac{\delta}{\delta\phi(w_i)}\left\{\cancel{2}\,\delta(x - w_j)\delta(z_j - y)\phi(x)\phi(y) + \cancel{2}\,\delta(y - w_j)\delta(z_j - x)\phi(x)\phi(y)\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\cdots\int\Delta\Delta\frac{\delta}{\delta\phi(z_i)}\times$$

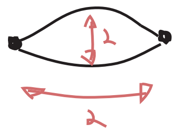
$$\times\left\{\delta(x - w_j)\delta(z_j - y)\left[\delta(x - w_i)\phi(y) + \delta(y - w_i)\phi(x)\right] + \delta(y - w_j)\delta(z_j - x)\left[\delta(w_i - x)\phi(y) + \delta(w_i - y)\phi(x)\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\cdots\int \Delta\Delta \Big\{ \delta(x-w_j)\,\delta(z_j-y)\,\delta(x-w_i)\,\delta(y-z_i) + \delta(x-w_j)\,\delta(z_j-y)\,\delta(y-w_i)\,\delta(x-z_i) +$$

$$+ \delta(y-w_j)\,\delta(z_j-x)\,\delta(w_i-x)\,\delta(y-z_i) + \delta(y-w_j)\,\delta(z_j-x)\,\delta(w_i-y)\,\delta(z_i-x) \Big\} =$$

$$= \frac{1}{2}\int d^4x\, d^4y\; 4\,\Delta^2(x-y) = 2\int d^4x\, d^4y\; \Delta^2(x-y)$$

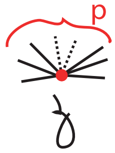
O que é 4 vezes menos termos iguais do que esperávamos. O fator de simetria aqui é 4. De fato:



(mais uma vez há uma outra forma de olhar diagramas para obter o fator de simetria na pg 94 do Nastase)

Vemos que estamos obtendo as mesmas regras do formalismo canônico (só que no espaço Euclideano):

(1) para cada propagador: x_1 x_2 $= \Delta(x_1 - x_2) = \displaystyle\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{e^{ip(x_1-x_2)}}{p^2+m^2}$

(2) para cada vértice: 

$= (-\lambda_p)\displaystyle\int d^4y$

(3) para cada ponto externo: x_1 $= 1$

(4) divida tudo pelo fator de simetria

(eq. 42.1)

Regras de Feynman no espaço dos momentos

Conforme visto na pg 30:

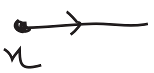
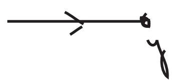
$$\tilde{G}(p_1,\ldots,p_n) = (2\pi)^4\,\delta^4(p_1+\ldots+p_n)\,\underbrace{G(p_1,\ldots,p_n)}$$

satisfazem conserv. de momento

O propagador Euclideano é:

$$\Delta(y-x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{e^{ip(y-x)}}{p^2+m^2} \quad \therefore \quad \boxed{\Delta(p) = \frac{1}{p^2+m^2}}$$ (eq. 42.2)

E adotamos novamente a convenção para direção de momento (lembrando que estamos no Euclideano e $p_\mu \cdot x^\mu = -p_E \cdot x_E$):

 $= e^{-ipx}$  e^{ipy}

Como derivamos as regras no espaço dos momentos a partir das regras no espaço das posições, e já mostramos que estas são as mesmas obtidas na quantização canônica, não há novidade alguma aqui.

Regras de Feynman para uma teoria Bosônica em geral

Suponha agora uma teoria mais geral composta de um número arbitrário de campos bosônicos (veremos adiante que a quantização de campos fermiônicos é mais complicada), que agruparemos usando um índice *r*:

$$\phi_r \qquad \text{EX: } \phi = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3 = A_0, \phi_4 = A_1, \phi_5 = A_2, \phi_6 = A_3\} = \{\phi_1, \phi_2, A_\mu\}$$

Com a ação livre dada por:

$$S_0 = \frac{1}{2}\int d^4x \sum_{r,s} \phi_r(x)\, \Delta^{-1}_{r,s}\, \phi_s(x)$$

$$\text{Ex: } \Delta^{-1} = \begin{pmatrix} -\partial_\mu\partial^\mu + m_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\partial_\mu\partial^\mu + m_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(g_{\mu\nu}\Box - \partial_\mu\partial_\nu\right)_{4\times4} \end{pmatrix}$$

Este operador deve ser invertido para podermos encontrar os propagadores. Quando ele não é inversível, em geral existem problemas na definição dos campos. Vamos assumir que conseguimos resolver estes problema e encontrar uma base apropriada, aonde ele pode ser invertido (mais tarde veremos um exemplo específico, o campo do fóton). A interação também pode ser escrita em um forma genérica:

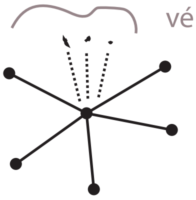
$$S_{r_1,\dots,r_p} = \int d^dz\, A_{r_1,\dots,r_p}\, \phi_{r_1}(z)\cdots\phi_{r_p}(z)$$

não há soma subentendida!

pode conter constantes (acoplamentos) ou operadores diferenciais agindo em um ou mais campos (o que torna isso bem mais geral que ϕ^n)

Interação envolvendo *p* campos (r_i e r_j são genéricos, não necessariamente iguais nem diferentes)

Independentemente da forma de $A_{\{r_j\}}$, esta interação colocará *p* campos agindo no mesmo ponto, o que leva a um vértice com *p* linhas saindo. A forma mais simples de ver a regra para o vértice é considerar a função com *p* pontos externos, especificamente o diagrama abaixo:



Podemos então seguir o raciocínio usado para passar de 40.1 para 40.2. A generalização de 40.1, agora que temos vários campos, é:

$$G_n\left(\{\pi_1,x_1\}\dots\{\pi_n,x_n\}\right) = e^{\frac{1}{2}\sum_{\pi,s}\frac{\delta}{\delta\phi_\pi}\Delta_{\pi s}\frac{\delta}{\delta\phi_s}}\left\{\phi_{\pi_1}(x_1)\dots\phi_{\pi_n}(x_n)\, e^{-\int d^4z\, A_{\pi_1\dots\pi_p}\phi_{\pi_1}\dots\phi_{\pi_p}}\right\}_{\phi=0}$$

a função depende das coordenadas dos pontos externos mas também de qual campo age ali

Especializando para o caso com apenas um vértice (N = 1) e número (e tipo) de pontos externos iguais aos da interação temos (n = p):

$$G_p^{(1)}\left(\{\pi_1,x_1\}\dots\{\pi_p,x_p\}\right) = e^{\frac{1}{2}\sum_{\pi,s}\frac{\delta}{\delta\phi_\pi}\Delta_{\pi s}\frac{\delta}{\delta\phi_s}}\left\{\phi_{\pi_1}(x_1)\dots\phi_{\pi_p}(x_p)(-)\overbrace{\int d^4z\, A_{\pi_1\dots\pi_p}\phi_{\pi_1}\dots\phi_{\pi_p}}^{S_{\pi_1\dots\pi_p}}\right\}_{\phi=0}$$

o produto escalar tem integrais: $\int dy_1\, dy_2 \frac{\delta}{\delta\phi(y_1)}\frac{\delta}{\delta\phi(y_2)}$

Agora basta lembrar que a exponencial com as derivadas deve ser expandida e o único termo que sobrevive é aquele que tem o número (e tipo) de derivadas que coincide com o que está dentro das chaves. O efeito destas chaves vai ser conectar pontos externos e internos de todas as formas possíveis, mas só estamos interessados no diagrama acima, onde cada ponto externo é conectado ao vértice. Neste caso cada par de derivadas vai produzir um propagador, assim como vimos na página 40, mas pode haver uma outra contribuição, dependendo de A. O resultado será da forma:

$$G_p^{(1)}\left(\{\pi_1,x_1\}\dots\{\pi_p,x_p\}\right) = \int d^4y_1\dots d^4y_p\,\Delta_{\pi s}(x_1-y_1)\dots\Delta_{\pi s}(x_p-y_p)\,\times$$

$$\times\,\underbrace{(-)\frac{\delta}{\delta\phi_{\pi_1}(y_1)}\dots\frac{\delta}{\delta\phi_{\pi_p}(y_p)}S_{\pi_1\dots\pi_p}}$$

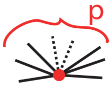
estou ignorando estes índices que seriam fixados por deltas de Kronecker, assim como as deltas de Dirac fixam as coordenadas

Isso é o que chamamos de “regra do vértice” e no caso de teorias $\lambda\phi^p$, obtemos (veja pag 40)

$$\int d^4z\;\lambda\;\delta(y_1-z)\dots\delta(y_p-z)$$

Mas para uma teoria mais geral pode ser mais complicado. Passando para o espaço dos momentos temos:

p linhas



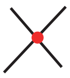
$$= -\int d^4x_1\dots d^4x_p\, e^{i(k_1x_1+\dots+k_px_p)}\frac{\delta}{\delta\phi_{r_1}(x_1)}\dots\frac{\delta}{\delta\phi_{r_p}(x_p)}S_{r_1\dots r_p}$$

a menos de um fator $(2\pi)^4\delta^4(k_1+\dots+k_4)$

(eq. 45.1)

Um exemplo trivial seria:

$$S_I = \frac{\lambda_4}{4!}\int d^4x\, \phi^4(x)$$



$$= -\int d^4x_1\dots d^4x_4\; e^{i(k_1x_1+\dots+k_4x_4)}\frac{\delta}{\delta\phi(x_1)}\dots\frac{\delta}{\delta\phi(x_4)}\left[\frac{\lambda_4}{4!}\int d^4x\,\phi^4(x)\right] =$$

$$\bullet = \frac{\lambda_4}{3!}\int dx\, \frac{\delta}{\delta\phi(x_1)}\dots\frac{\delta}{\delta\phi(x_3)}\phi^3(x)\,\delta(x-x_4) = \frac{\lambda_4}{2!}\int dx\,\frac{\delta}{\delta\phi(x_1)}\frac{\delta}{\delta\phi(x_2)}\phi^2(x)\,\delta(x-x_4)\,\delta(x-x_3) = \dots$$

$$= -\int dx_1\dots dx_4\, dx\, e^{i(k_1x_1+\dots+k_4x_4)}\,\lambda_4\,\delta(x-x_1)\delta(x-x_2)\delta(x-x_3)\delta(x-x_4) =$$

$$= -\lambda_4\int d^4x\, e^{ix(k_1+\dots+k_4)} = -(2\pi)^4\delta^4(k_1+\dots+k_4)\,\lambda_4$$

Quantização de um campo fermiônico

(Nastase 12 e 13; Peskin 9.5; Ryder 6.7; Ramond 5.2-5.3)

Passaremos rapidamente pela quantização de campos fermiônicos, uma vez que as principais ideias já foram cobertas na lista de exercícios. Estamos usando as seguintes convenções:

$$\boxed{\gamma^0 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ \underbrace{1}_{\mathbb{1}_{2\times2}} & 0\end{pmatrix} \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix}0 & \sigma^i\\ -\sigma^i & 0\end{pmatrix}}$$

Representação Quiral ou de Weyl

(eq. 45.2)

$$\boxed{\begin{aligned}(\gamma^0)^\dagger &= \gamma^0\\ (\gamma^i)^\dagger &= -\gamma^i\end{aligned}}$$

(eq. 45.3)

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$$

E podemos definir 4-vetores, para as matrizes 2x2:

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma^\mu &= (1, \sigma^i) \\ \bar{\sigma}^\mu &= (1, -\sigma^i)\end{aligned}} \quad \text{(eq. 46.1)}$$

De forma a re-escrever 45.2 na forma compacta:

$$\boxed{\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}} \quad \text{(eq. 46.2)}$$

$$\boxed{\gamma^5 = i\,\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3} \quad \text{(eq. 46.3)} \quad \longrightarrow \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0} \quad \text{(eq. 46.4)}$$

Com isto podemos construir uma ação:

$$\boxed{S_\psi = \int d^4x\, \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi} \quad \text{(eq. 46.5)} \qquad \boxed{\displaystyle{\not}\partial = \gamma^\mu \partial_\mu}$$

Cuja solução clássica é dada pela equação de Dirac:

$$\boxed{(i{\not}\partial - m)\psi = 0} \quad \text{(eq. 46.7)}$$

basta fazer a variação em relação a $\bar{\psi}$, também podemos obter a equação conjugada, para $\bar{\psi}$, variando ψ.

queremos prosseguir da mesma forma que no caso escalar, rodando para o espaço Euclideano e fazendo a integral de trajetória.

Tomando o cuidado de manter a álgebra de Clifford funcionando: $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$

$$(\gamma^0)^2 = 1 \qquad (\gamma^i)^2 = -1$$

$$\boxed{\gamma^4_E = \gamma^0} \qquad \hookrightarrow (\gamma^i_E)^2 = 1 \Rightarrow \gamma^i_E = -i\gamma^i$$

$$\rightarrow \bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger \gamma^4$$

$$\psi_E(x_E) = \psi(-it_E, \vec{x})$$

E, nesta representação: $\gamma_\mu = \gamma^\mu = (\gamma^\mu)^\dagger$

$$x^0 = -i x^4 \qquad \partial_0 = \frac{\partial}{\partial x^0} = \frac{\partial}{-i\,\partial x^4} = i\,\partial_4$$

$$S = i\int d^4x\, \bar{\psi}(i{\not}\partial - m)\psi = i\int d^4x\, \psi^\dagger\gamma^0(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi =$$

$$= \cancel{i}\int \cancel{(-i)}\, d^4x_E\, \psi^\dagger(-it_E, \vec{x})\, \gamma^4\left(i\,\gamma^4_E (i)\partial_4 + i(i\gamma^i_E)\partial_i - m\right)\psi(-it_E, \vec{x}) =$$

$$= \int d^4x_E\, \psi^\dagger(-it_E, \vec{x})\, \gamma^4(-\gamma^4_E\partial_4 - \gamma^i_E\partial_i - m)\psi(-it_E, \vec{x}) =$$

$$= \int d^4x_E\, \underbrace{\psi^\dagger(-it_E, \vec{x})}_{\psi^\dagger_E(x_E)}\, \gamma^4(-\gamma^\mu_E\partial_\mu - m)\underbrace{\psi_E(-it_E, \vec{x})}_{\psi_E(x_E)} = -\int d^4x_E\, \underbrace{\bar{\psi}_E(\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi_E}_{\to\, \mathcal{L}^{(E)}_F}$$

$$\boxed{\mathcal{L}^{(E)}_F = \bar{\psi}_E({\not}\partial + m)\psi_E} \quad \text{(eq. 46.8)}$$

Temos que tomar um cuidado adicional, pois queremos preservar a anticomutação entre campos fermiônicos na integral de trajetória:

$$\underbrace{\langle 0|T\{\hat{\psi}(x_1)\hat{\psi}(x_2)\hat{\psi}(x_3)\ldots\hat{\psi}(x_n)\}|0\rangle}_{\int D\bar{\psi} D\psi\, e^{iS}\, \psi(x_1)\psi(x_2)\psi(x_3)\ldots\psi(x_n)} \overset{(-)}{=} -\underbrace{\langle 0|T\{\hat{\psi}(x_2)\hat{\psi}(x_1)\hat{\psi}(x_3)\ldots\hat{\psi}(x_n)\}|0\rangle}_{\int D\bar{\psi} D\psi\, e^{iS}\, \psi(x_2)\psi(x_1)\psi(x_3)\ldots\psi(x_n)}$$

$$\int \underbrace{D\bar{\psi} D\psi}\, e^{iS}\, \psi(x_1)\psi(x_2)\psi(x_3)\ldots\psi(x_n) = -\int D\bar{\psi} D\psi\, e^{iS}\, \underbrace{\psi(x_2)\psi(x_1)}\psi(x_3)\ldots\psi(x_n)$$

(tem duas integrais pois o campo é complexo, no caso do campo escalar complexo teríamos $\int D\phi^* D\phi$)

não há como essa igualdade funcionar se estes cara forem funções complexas.

Fica claro que as funções que aparecem dentro das integrais fermiônicas não são as funções ou números usuais, pois têm que anticomutar (seguem a chamada Álgebra de Grassmann). Podemos dividir o conjunto destes Números de Grassmann em dois:

Parte ímpar da álgebra: $a\ ,\ a^+ : \{a, a^+\} = \{a, a\} = \{a^+, a^+\} = 0$

Parte par da álgebra: $aa^+ : [aa^+, aa^+] = 0$

De forma que o produto de duas funções fermiônicas (ímpar) vai ser bosônica (par)

(e é fácil ver que [par . par = par] e [ímpar . par = ímpar])

Números de Grassmann, definições e propriedades

(O mesmo raciocínio esta mais detalhado no curso de campos I de 2017 - pgs 132 em diante)

Precisamos de funções definindas em um espaço de números complexos que anti-comutem, o que já havia sido proposto antes por Grassmann. Os números de Grassmann satisfazem a seguinte propriedade:

$$\boxed{\{\theta, \eta\} = \theta\eta + \eta\theta = 0}$$

O que tem diversas consequências:

$$\boxed{\theta^2 = 0} \quad \text{(eq. 47.1)}$$

elemento "par" da álgebra (commutative-number)

elemento "ímpar" (anticommutative-number)

$$\eta_1\eta_2\eta_3 = -\eta_1\eta_3\eta_2 = \eta_3\eta_1\eta_2$$

um par de números de Grassmann se comporta como um c-number

$$f(\theta,\eta) = a_0 + a_1\theta + a_2\eta + a_3\theta\eta + a_4\underbrace{\theta^2}_{0}\eta + a_5\theta\underbrace{\eta^2}_{0}$$

se a função tiver paridade definida ela é a-number ou c-number

assim, se $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$ então $a_0 = a_3 = 0$ ou $a_1 = a_2 = 0$ (ou então os próprios a's devem ser Grassmann)

Na maior parte do segue, vamos assumir coeficientes pares, o que significa que estamos tomando a álgebra de Grassmann finita, o que quer dizer que, no exemplo abaixo, não há outros ímpares além de θ, η e ρ para aparecer nos coeficientes:

$$f(\theta,\eta,\rho) = a_0 + a_1\theta + a_2\eta + a_3\rho + a_4\theta\eta + a_5\theta\rho + a_6\eta\rho + a_7\theta\eta\rho$$

e considerando funções mais gerais (sem paridade, ou supernumbers)