Há uma ambiguidade na definição de derivada (temos que decidir se ela age pela direita ou esquerda):

$$\frac{\partial^L}{\partial\theta} f(\theta,\eta) = a_1 + a_3\eta \qquad \frac{\partial^R}{\partial\theta} f(\theta,\eta) = a_1 - a_3\eta$$

Definiremos: $\boxed{\frac{\partial}{\partial\eta} = \frac{\partial^L}{\partial\eta}}$ (quando for necessário usar a derivada pela direita indicaremos isto explicitamente)

A consequência é que a regra do produto também fica modificada:

$$\frac{\partial}{\partial\eta}(\eta f) = f - \eta\frac{\partial f}{\partial\eta}$$

os operadores diferenciais também são ímpares sobre a álgebra:

$$\boxed{\left\{\eta_i , \frac{\partial}{\partial\eta_j}\right\} = \delta_{ij}} \quad \text{(eq. 48.1)} \qquad \boxed{\left\{\frac{\partial}{\partial\eta} , \frac{\partial}{\partial\theta}\right\} = 0} \quad \text{(eq. 48.2)}$$

decorre que:

$$\frac{\partial}{\partial\theta_k} e^{\Sigma\theta_i\eta_i} = \eta_k \underbrace{e^{\Sigma\theta_i\eta_i}}_{\text{PAR}} \qquad \frac{\partial}{\partial\eta_k} e^{\Sigma\theta_i\eta_i} = -\theta_k e^{\Sigma\theta_i\eta_i}$$

Para definir integrais é natural assumir que os "infinitesimais" de Grassmann também anti-comutam:

$$\{\theta, d\eta\} = 0$$

$$\{d\theta, d\eta\} = 0$$

que resolve outra ambiguidade de sinal (se fizemos primeiro a integral de fora o sinal fica invertido)

$$\int d\theta\, d\eta\, f(\theta,\eta) \equiv \int d\theta \left[\int d\eta\, f(\theta,\eta)\right]$$

E para que esta integral tenha a propriedade de ser invariante por translações nesta variável:

$$\boxed{\int d\theta = 0} \quad \text{(eq. 48.3)} \qquad \boxed{\int d\theta\, \theta = 1} \quad \text{(eq. 48.4)}$$

$$\int d\theta\, f(\theta,\eta) = \int d\theta\,(a_0 + a_1\theta + a_2\eta + a_3\theta\eta) = a_1 + a_3\eta = \frac{\partial}{\partial\theta} f(\theta,\eta)$$

o que pode ser mostrado em geral, ou seja a integração e a diferenciação tem o mesmo efeito.

A função delta também pode ser definida:

$$\boxed{\delta(\eta-\rho)=\eta-\rho}$$ (eq. 49.1)

$$\int d\eta\,(\eta-\rho)=\underbrace{\int d\eta\,\eta}_{1}-\underbrace{\int d\eta\,\rho}_{0}=1$$

$$\int d\eta\,(\eta-\rho)\eta=\underbrace{\int d\eta\,\eta\eta}_{0}-\underbrace{\int d\eta\,\rho\eta}_{\rho}=\rho \qquad (-)$$

$$g(\eta)=a+b\eta$$

$$\int d\eta\,\delta(\eta-\rho)\,g(\eta)=\int d\eta\,(\eta-\rho)(a+b\eta)=$$

$$=a\underbrace{\int d\eta\,(\eta-\rho)}_{1}+b\underbrace{\int d\eta\,(\eta-\rho)\eta}_{\rho}=a+b\rho=g(\rho)$$

A mudança de variáveis multiplicativa (por um número complexo) na integração também parece mais com uma mudança em derivadas:

$$\int dx\,x=1 \qquad y=ax \qquad \int dy\,y=1=a\int dy\,x$$

$$\boxed{dy=\frac{1}{a}dx}$$ (eq. 49.2)

Para números de Grassmann complexos:

$$(\theta\eta)^*=\eta^*\theta^*=-\theta^*\eta^* \qquad \left\{\int d\eta=\int d\eta^*=0 \quad \& \quad \int d\eta\,\eta=\int d\eta^*\eta^*=1\right\}$$

$$e^{-\eta^*\eta}=1-\eta^*\eta$$

$$\int d\eta^*d\eta\,e^{-\eta^*b\eta}=\int d\eta^*d\eta\,(1-\eta^*b\eta)=\int d\eta^*d\eta\,(1+\eta\eta^*b)=b$$

$$\boxed{\int d\eta^*d\eta\,e^{-\eta^*b\eta}=b}$$ (eq. 49.3)

$$\boxed{\int d\eta^*d\eta\,\eta\eta^*\,e^{-\eta^*b\eta}=\frac{1}{b}\cdot b}$$ (eq. 49.4)

ou $\left\{\int d\eta^*d\eta\,\eta\eta^*\,e^{-\eta^*b\eta}=\frac{d}{db}\int d\eta^*d\eta\,e^{-\eta^*b\eta}\right\}$

Isto é análogo ao que teríamos obtido para integral gaussiana de váriáveis complexas:

$$\boxed{\int\frac{dz^*}{(2\pi i)^{1/2}}\frac{dz}{(2\pi i)^{1/2}}\,e^{-z^*\cdot bz}=\frac{1}{b}}$$ (eq. 49.5)

$$\boxed{\int\frac{dz^*}{(2\pi i)^{1/2}}\frac{dz}{(2\pi i)^{1/2}}\,z^*z\,e^{-z^*\cdot bz}=\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{b}}$$ (eq. 49.6)

Suponha um caso bidimensional:

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \qquad \bar{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_1^* & \eta_2^* \end{pmatrix} \qquad d\bar{\eta}\, d\eta \equiv d\eta_1^*\, d\eta_1\, d\eta_2^*\, d\eta_2$$

$$(\bar{\eta}\eta)^2 = (\eta_1^*\eta_1 + \eta_2^*\eta_2)^2 = \eta_1^*\eta_1\eta_2^*\eta_2 + \eta_2^*\eta_2\eta_1^*\eta_1 = 2\eta_1^*\eta_1\eta_2^*\eta_2$$

$$e^{-\bar{\eta}\eta} = 1 - \eta_1^*\eta_1 + \eta_2^*\eta_2 + \eta_1^*\eta_1\eta_2^*\eta_2$$

$$\boxed{\int d\bar{\eta}\, d\eta\, e^{-\bar{\eta}\eta} = 1}$$ (eq. 50.1)

Fazendo uma mudança de variáveis,obtemos:

$$\eta = M\alpha \qquad M, N \in \mathbb{C}^{2\times 2}$$
$$\bar{\eta} = \bar{\alpha} N$$

$$\eta_1\eta_2 = (M_{11}\alpha_1 + M_{12}\alpha_2)(M_{21}\alpha_1 + M_{22}\alpha_2) =$$
$$= (M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21})\alpha_1\alpha_2 = \mathrm{DET}[M]\,\alpha_1\alpha_2$$

Então, se queremos que: $\int d\eta_1\, d\eta_2\, \eta_1\eta_2 = \int d\alpha_1\, d\alpha_2\, \alpha_1\alpha_2$

temos que exigir: $d\eta_1\, d\eta_2 = (\mathrm{DET}[M])^{-1}\, d\alpha_1\, d\alpha_2$

$$d\eta_1^*\, d\eta_2^* = (\mathrm{DET}[N])^{-1}\, d\alpha_1^*\, d\alpha_2^*$$

então:

$$1 = \int d\eta_1^*\, d\eta_1\, d\eta_2^*\, d\eta_2\, e^{-\bar{\eta}\eta} = \int \frac{d\alpha_1^*\, d\alpha_2^*}{\mathrm{DET}[N]} \frac{d\alpha_1\, d\alpha_2}{\mathrm{DET}[M]}\, e^{-\bar{\alpha}NM\alpha} =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{DET}[\underbrace{NM}_{A}]} \int d\alpha_1^*\, d\alpha_1\, d\alpha_2^*\, d\alpha_2\, e^{-\bar{\alpha}\overbrace{NM}^{A}\alpha}$$

$$\boxed{\int d^n\bar{\alpha}\, d^n\alpha\; e^{-\bar{\alpha}\cdot A\alpha} = \mathrm{DET}[A]}$$ (eq. 50.2)

Note que integração de Gaussiana com números de Grassmann está nos dando o Det ao invés de 1/Det que tínhamos com números complexos.

Usando derivadas em a, podemos também mostrar que:

$$\boxed{\int d^n\bar{\alpha}\, d^n\alpha\, \alpha_i \bar{\alpha}_j\, e^{-\bar{\alpha}\cdot A\alpha} = (A^{-1})_{ij}\, \mathrm{Det}[A]}$$ (eq. 51.1)

Podemos definir uma "função de Grassmann" (que é ímpar, para cada valor x, fornece um a-number) como:

$$\psi(x) = \sum_i \underbrace{\psi_i}_{\text{coeficientes são números de Grassmann}}\; \underbrace{\phi_i(x)}_{\{\phi_i\}\text{ base de funções usuais } (\phi_i \in \mathbb{C})}$$

E generalizar as integrais funcionais Gaussianas para funções deste tipo:

$$\boxed{\int D\bar{\psi}\, D\psi\; e^{-\bar{\psi}\cdot A\psi} = \mathrm{Det}[A]}$$ (eq. 51.2)

O Campo Fermiônico

Conforme mostrado em exercício o oscilador harmônico fermiônico, na presença de fontes:

$$H(b^+, b; t) = \omega\, b^+ b - b^+ \eta(t) - \bar{\eta}(t)\, b \qquad \{\hat{b}, \hat{b}^+\} = 1$$

pode ser descrito via uma integral de trajetória em termos de números de Grassmann, e obtem-se:

$$\boxed{Z[\eta,\bar{\eta}] = F(0,\infty;0,-\infty) = \langle 0|0\rangle\, \exp\left\{-\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{\tau}^{+\infty} ds\; e^{iw(\tau - s)}\, \bar{\eta}(\tau)\,\eta(s)\right\}}$$ (eq. 51.3)

Isto é praticamente o mesmo que um campo em 0+1 dim., temos:

$$Z[\eta,\bar{\eta}] = \int D\bar{\psi}\, D\psi\, \exp\left\{i\int dt\left[\bar{\psi}(i\partial_t - w)\psi + \bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi\right]\right\} =$$

$$D_F^{-1} = -i(i\partial_t - w)$$

$$= \int D\bar{\psi}\, D\psi\, \exp\left\{\int dt\left[-\bar{\psi}\, D_F^{-1}\,\psi\right] + i\int dt\left[\bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi\right]\right\}$$

$$\therefore \boxed{Z[\eta,\bar{\eta}] = Z[0,0]\, \exp\left\{-\int ds\, d\tau\; \bar{\eta}(s)\, D_F(s,\tau)\, \eta(\tau)\right\}}$$ (eq. 51.4)

$$D_F(s,\tau) = \left[-i\left(i\partial_t - \omega\right)\right]^{-1} = i\int \frac{dE}{2\pi}\,\frac{e^{-iE(s-\tau)}}{E-\omega+i\epsilon} = \Theta(s-\tau)\,e^{-i\omega(s-\tau)}$$ (eq. 52.1)

Note que: (1) Temos apenas um polo, em $E = \omega - i\epsilon$

(2) Isso significa que se fizemos a integral no hemisfério superior (*Im E > 0*) ela dá zero, e somos forçados a fazer isso se ($s<\tau$), portanto a integral é zero para ($s<\tau$). No outro hemisfério (obrigatório se $s>\tau$) pegamos o polo e obtemos o resultado não nulo acima.

$$-iE(s-\tau) \sim Im(E)(s-\tau)$$

(3) Basta substituir a última expressão em 52.1 para obter 51.3 (incluindo o limite de integração, que impõe $s>\tau$)

Passando para o espaço Euclideano: $t = -it_E$

$$Z_E[\eta,\bar{\eta}] = \int D\bar{\psi}D\psi\,\mathrm{Exp}\left\{\int dt_E\,\bar{\psi}_E\left(-\partial_{t_E}-\omega\right)\psi_E + \int dt_E\,\bar{\psi}_E\eta_E + \bar{\eta}_E\psi_E\right\}$$

suprimindo o "E"

$$= Z[0,0]\,\mathrm{Exp}\left\{\int d\tau\,ds\,\bar{\eta}(s)D(s,\tau)\eta(\tau)\right\}$$

$$-S_E = -\bar{\psi}\cdot D^{-1}\psi + \bar{\psi}\cdot\eta + \bar{\eta}\cdot\psi$$ (eq. 52.2)

$$D[s,\tau] = \left(\partial_t+\omega\right)^{-1} = i\int\frac{dE}{2\pi}\,\frac{e^{-iE(s-\tau)}}{E+i\omega}$$ (eq. 52.3)

E rodando de volta para Minkowski com $E_E = (-i+\epsilon)E$ (para evitar o polo), voltamos ao propagador em 52.1

Agora basta aumentar o número de coordenadas espaciais para obter uma teoria de campo.

Como já vimos em 46.8, no espaço Euclideano temos: $\mathcal{L}_F^{(E)} = \bar{\psi}_E(\not{\partial}+m)\psi_E$

A função de partição obtida é:

$$Z_F^{(0)}[\bar{\eta},\eta] = \int D\bar{\psi}D\psi\,\exp\left\{-\int d^4x\,\bar{\psi}(\not{\partial}+m)\psi + \int d^4x\left(\bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta\right)\right\} =$$ (eq. 52.4)

Atenção para o índice Espinorial:

$$\int d^4x\, \bar{\eta}\psi = \int d^4x\, \bar{\eta}_\alpha(x)\psi_\alpha(x) \qquad \alpha = 1,2,3,4$$

$$\bar{\eta}(\not{\partial}+m)^{-1}\eta = \int d^4x\, d^4y\, \bar{\eta}_\alpha(x)\,(\not{\partial}+m)^{-1}_{\alpha\beta}\,\eta_\beta(y)$$

$$Z_F^{(0)}[\bar{\eta},\eta] = Z(0,0)\, e^{\bar{\eta}(\not{\partial}+m)^{-1}\eta}$$

$$\boxed{S_F(x,y) = (\not{\partial}_x+m)^{-1} = i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{ip\cdot(x-y)}}{-\not{p}+im}} \quad \text{(eq. 53.1)}$$

$$(\not{\partial}_x+m)\,S_F(x,y) = \delta^4(x-y)$$

Usaremos com frequência a seguinte relação:

$$\frac{1}{-\not{p}+im} = \frac{-\not{p}-im}{p^2+m^2} = \frac{-\not{p}_{\alpha\beta}-im\,1_{\alpha\beta}}{p^2+m^2} \qquad p^2 = \not{p}\not{p}$$

Voltando para Minkwoski, obtemos:

$$S_F^{(E)}(x,y) = i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{ip\cdot(x-y)}}{-\not{p}+im} = i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{-\not{p}-im}{p^2+m^2}\,e^{ip\cdot(x-y)}$$

$$p_E^0 x_E^0 = -ip^0\, ix^0 = p^0 x_0$$

$$t_E = it \qquad p_E^0 = (-i+\epsilon)p^0 \qquad p_E^2+m^2 = -p^2+m^2-i\epsilon$$

$$\not{p}^E = \gamma_E^4 p_E^0 + \gamma_E^i p^i = \gamma^0(-i+\epsilon)p^0 - i\gamma^i p^i = -i\gamma^0 p_0 - i\vec{\gamma}\cdot\vec{p} + \epsilon\gamma^0 p_0$$

$$\boxed{S_F^{(M)}(x,y)} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, e^{i[p^0(x^0-y^0)+p^i(x^i-y^i)]}\,\frac{+i\gamma^0 p_0 + i\vec{\gamma}\cdot\vec{p} - im}{-p^2+m^2-i\epsilon} =$$

$$p_0 \to -p_0$$

$$= \boxed{\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, e^{-ip(x-y)}\,\frac{i(\not{p}+m)}{p^2-m^2+i\epsilon}} \quad \text{(eq. 53.2)}$$

Teorema de Wick para Campos Fermiônicos

Como um exemplo, consideremos uma teoria com um escalar ϕ (com fonte J) e um férmion ψ, interagindo por meio de um termo $S_I[\bar{\psi},\psi,\phi]$, neste caso poderíamos escrever:

$$\boxed{Z[\bar{\eta},\eta,J] = e^{-S_I\left[-\frac{\delta}{\delta\eta},\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}},\frac{\delta}{\delta J}\right]} Z_F^{(0)}[\bar{\eta},\eta]\, Z_\phi^{(0)}[J]}$$ (eq. 54.1)

que é obtida segundo exatamente o mesmo procedimento usado na pag 33. A única diferença está no termo $-\frac{\delta}{\delta\eta}$ que tem este sinal pois o termo de fonte tem a forma: $\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta$

Logo: $\psi\, e^{\int d^4x\, \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta} = -\frac{\delta}{\delta\eta} e^{\int d^4x\, \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta}$

O lema de Coleman (eq. 38.2) também ganha um sinal pelo mesmo motivo:

$$\boxed{F\left(-\frac{\delta}{\delta\eta},\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}}\right) Z[\bar{\eta},\eta] = Z\left[-\frac{\delta}{\delta\psi},\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}}\right]\left(F(\bar{\psi},\psi)\, e^{\bar{\psi}\eta+\bar{\eta}\psi}\right)_{\bar{\psi}=\psi=0}}$$ (eq. 54.2)

$$Z[\bar{\eta},\eta,J] = e^{-S_I\left(-\frac{\delta}{\delta\eta},\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}},\frac{\delta}{\delta J}\right)} e^{\bar{\eta}S_F\eta}\, Z_\phi^{(0)}[J] =$$

$$\boxed{\begin{aligned} &= e^{-\frac{\delta}{\delta\psi}S_F\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}}} e^{-S_I\left(\bar{\psi},\psi,\frac{\delta}{\delta J}\right)+\bar{\psi}\cdot\eta+\bar{\eta}\cdot\psi} Z_\phi^{(0)}[J]\Big|_{\psi=\bar{\psi}=J=0} = \\ &= e^{-\frac{\delta}{\delta\psi}S_F\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}}}\, e^{\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\phi}\cdot\Delta\cdot\frac{\delta}{\delta\phi}}\left\{e^{-S_I(\bar{\psi},\psi,\phi)+\bar{\psi}\cdot\eta+\bar{\eta}\cdot\psi+J\cdot\phi}\right\}_{\psi=\bar{\psi}=\phi=0}\end{aligned}}$$

(eq. 54.3)

Regras de Feynman para Férmions (Interação de Yukawa)

$$\mathcal{L}_Y = g\bar{\psi}\psi\phi$$

As funções de Green da teoria serão nomeadas:

$$G^{(N)}_{(n,m)}$$

ordem na expansão perturbativa

numero de pontos externos bosônicos

numero de pontos externos fermiônicos

A regra para o vértice vem trivialmente da função de três pontos:

$$G^{(1)}_{(2,1)} = \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)_\alpha}\left(-\frac{\delta}{\delta\eta(y)_\beta}\right)\frac{\delta}{\delta J(z)}\, e^{-\frac{\delta}{\delta\psi}S_F\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}}}\, e^{\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\phi}\cdot\Delta\cdot\frac{\delta}{\delta\phi}}\left\{e^{-g\int d^4w\,\bar{\psi}\psi\phi+\bar{\psi}\cdot\eta+\bar{\eta}\cdot\psi+J\cdot\phi}\right\}_{\substack{\psi=\bar{\psi}=\phi=0\\ \bar{\eta}=\eta=J=0}} =$$

índice espinoriais subentendidos

$$= e^{-\frac{\delta}{\delta\psi} S_F \frac{\delta}{\delta\bar\psi}}\, e^{\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\phi}\cdot\Delta\cdot\frac{\delta}{\delta\phi}} \left\{ \phi(z)\,\psi_\alpha(x)\,\bar\psi_\beta(y)\, e^{\underbrace{-g\int d^4w\,\bar\psi\psi\phi}} \right\} =$$

só quero o termo O(g¹)

$$= e^{-\frac{\delta}{\delta\psi} S_F \frac{\delta}{\delta\bar\psi}}\, e^{\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\phi}\cdot\Delta\cdot\frac{\delta}{\delta\phi}}\, (-g)\,\phi(z)\,\psi(x)\,\bar\psi(y)\int d^4w\; \bar\psi_\delta(w)\,\psi_\delta(w)\,\phi(w) =$$

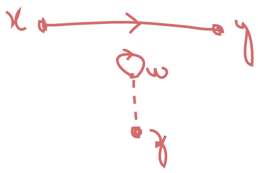
índice espinoriais subentendidos

$$= -g\int d^4w\; \Delta(z-w)\,\frac{1}{2}\left(-\frac{\delta}{\delta\psi}\cdot S_F\cdot\frac{\delta}{\delta\bar\psi}\right)\left(-\frac{\delta}{\delta\psi}\, S_F\, \frac{\delta}{\delta\bar\psi}\right)\psi(x)\,\bar\psi(y)\;\bar\psi(w)\,\psi(w) =$$

$$\left(-\frac{\delta}{\delta\psi}\cdot S_F\cdot\frac{\delta}{\delta\bar\psi}\right)\psi_\alpha(x)\,\bar\psi_\beta(y)\;\bar\psi_\delta(w)\,\psi_\delta(w) =$$

$$= \int d^4z_1\, d^4z_2 \left(-\frac{\delta}{\delta\psi_\xi(z_1)}\, S_F(z_1-z_2)_{\xi\chi}\right)\Big[-\psi_\alpha(x)\,\delta(z_2-y)\,\delta_{\chi\beta}\,\bar\psi_\delta(w)\,\psi_\delta(w) + \psi_\alpha(x)\,\bar\psi_\beta(y)\,\delta(w-z_2)\,\delta_{\chi\delta}\,\psi_\delta(w)\Big] =$$

Não quero o diagrama de bolha no vácuo:



$$= \int d^4z_1\, d^4z_2 \left(-S_F(z_1-z_2)_{\xi\chi}\right)\Big[-\psi_\alpha(x)\,\delta(z_2-y)\,\bar\psi_\delta(w)\,\delta(z_1-w)\,\delta_{\chi\beta}\,\delta_{\xi\delta} + \delta(x-z_1)\,\bar\psi_\beta(y)\,\delta(w-z_2)\,\psi_\delta(w)\,\delta_{\alpha\xi}\,\delta_{\chi\delta}\Big] + \text{BOLHAS}$$

$$= +S_F(w-y)_{\delta\beta}\,\psi_\alpha(x)\,\bar\psi_\delta(w) - S_F(x-w)_{\alpha\delta}\,\bar\psi_\beta(y)\,\psi_\delta(w) + \text{BOLHAS}$$

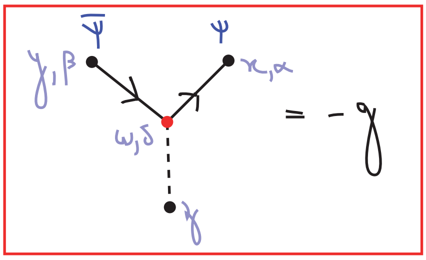
$$= -g\int d^4w\; \Delta(z-w)\,\frac{1}{2}\int d^4z_3\, d^4z_4 \left(-\frac{\delta}{\delta\psi(z_3)}\cdot S_F(z_3-z_4)\cdot\frac{\delta}{\delta\bar\psi(z_4)}\right)\Big[+S_F(w-y)\,\psi(x)\,\bar\psi(w) - S_F(x-w)\,\bar\psi(y)\,\psi(w)\Big] =$$

$$= -g\int d^4w\; \Delta(z-w)\,\frac{1}{2}\int d^4z_3\, d^4z_4 \left(-\frac{\delta}{\delta\psi(z_3)}\cdot S_F(z_3-z_4)\right)\Big[-S_F(w-y)\,\psi(x)\,\delta(w-z_4) - S_F(x-w)\,\delta(y-z_4)\,\psi(w)\Big] =$$

$$= -g\int d^4w\; \Delta(z-w)\,\frac{1}{2}\int d^4z_3\, d^4z_4 \left(-S_F(z_3-z_4)\right)\Big[-S_F(w-y)\,\delta(x-z_3)\,\delta(w-z_4) - S_F(x-w)\,\delta(y-z_4)\,\delta(w-z_3)\Big] =$$

$$= -g\int d^4w\; \Delta(z-w)\,\frac{1}{2}\Big[S_F(x-w)_{\alpha\delta}\, S_F(w-y)_{\delta\beta} + S_F(w-y)_{\delta\beta}\, S_F(x-w)_{\alpha\delta}\Big] =$$

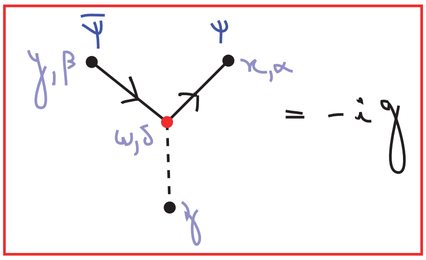
$$\boxed{G^{(1)}_{(2,1)} = -g\int d^4w\, \Delta(z-w)\, S_F(x-w)_{\alpha\delta}\, S_F(w-y)_{\delta\beta}}$$ (eq. 56.1)



(Espaço das posições, Euclid.)

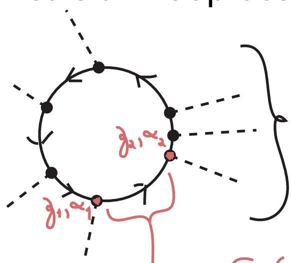
(eq. 56.2)

$\longleftrightarrow$



(Mink.)

A importância do ordamento do campo fermiônico cria uma importante diferença entre um loop fermiônico e um loop bosônico, pense no seguinte diagrama:



total de N linhas saindo do loop

$$\to S_F(z_2-z_1)_{\alpha_2\alpha_1} = -\frac{\delta}{\delta\psi}\cdot S_F\cdot\frac{\delta}{\delta\bar\psi}\left(\psi_{\alpha_2}(z_2)\bar\psi_{\alpha_1}(z_1)\right)$$

Temos vários termos deste tipo:

$$\left(-\frac{\delta}{\delta\psi}\cdot S_F\cdot\frac{\delta}{\delta\bar\psi}\right)\cdots\left(-\frac{\delta}{\delta\psi}\cdot S_F\cdot\frac{\delta}{\delta\bar\psi}\right)\left(\underbrace{(\bar\psi\psi)_1\cdots(\bar\psi\psi)_N}\right) \longleftrightarrow (\bar\psi\psi)_i = \bar\psi(z_i)\psi(z_i)$$

note que estes vêm todos da interação, por isso a ordem $\bar\psi\psi$

Para obter a combinação cíclica (já que é um loop):

$$S_F(z_N-z_1)_{\alpha_N\alpha_1}\, S_F(z_1-z_2)_{\alpha_1\alpha_2}\cdots S_F(z_{N-1}-z_N)_{\alpha_{N-1}\alpha_N} = \mathrm{Tr}\left[S_F(z_1-z_2)\cdots S_F(z_{N-1}-z_N)\right]$$

(loops de férmions geram traços)

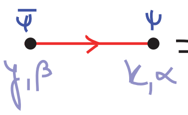
temos que trazer o último campo para a primeira posição e então aplicar as derivadas:

$$\left((\bar\psi\psi)_1\cdots(\bar\psi\psi)_N\right) = -\psi(z_N)(\bar\psi\psi)_1\cdots(\bar\psi\psi)_{N-1}\psi_N(z_N)$$

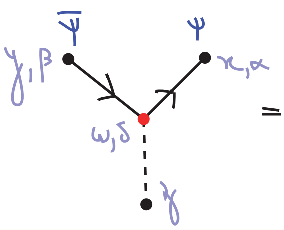
passo por 2N-1 campos

De onde vemos que, além de qualquer sinal que venha dos vértices $(-g)^N$, temos uma regra de Feynman nova, devemos multiplicar por sinal total negativo toda vez que aparecer um loop fermiônico. Você pode checar, por exemplo que o mesmo loop gerado em uma teoria $\lambda\phi^3$: não tem sinal algum além do que vem dos vértices.

Regras de Feymnan para interação de Yukawa:

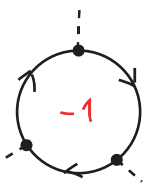


$$= S_F(x-y)_{\alpha\beta} = i\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\left(\frac{e^{ip(x-y)}}{-\not p + im}\right)_{\alpha\beta}$$ (direção é importante)



$= -g$

$$= \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{ip(x-y)}}{p^2+m^2}$$



(multiplico por -1^L, onde L = # loops fermiônicos)

(a contração dos índices espinoriais vai produzir um traço)

(Espaço das posições, Euclid.)

(eq. 56.3)