Quantização de Campos de Gauge

(Nastase 16, Nastase II 11 e 12, Peskin 9.4, Ryder 7.1)

Voltaremos agora ao "mundo bosônico" para lidar com um tipo bastante especial de bóson, os Bósons de Gauge. Estes campos vetoriais são introduzidos em teorias toda vez que assumimos a existência de alguma simetria contínua e local (simetria de Gauge), em geral postulando que o conteúdo de matéria da teoria (escalares e férmions) se transformem sobre alguma representação de um grupo de Lie (embora seja também comum pensar em teorias de puro Gauge, onde temos apenas os campos vetoriais, comumente chamadas de teorias de Yang-Mills).

Neste caso, o campo vetorial deve, para manter a invariância da ação sobre as transformações do grupo em questão, se transformar da seguinte forma:

$$A_\mu(x) \longrightarrow A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu \lambda(x)$$

(no caso de uma simetria U(1), abeliana)

constantes de acoplamento

$$A^a_\mu(x) \longrightarrow A^a_\mu(x) + \frac{1}{g}\partial_\mu \lambda^a(x) + \underbrace{f^{abc}}_{\text{constantes de estrutura do grupo}} A^b_\mu\, \lambda^c(x)$$

$a, b, c \rightarrow$ indices da representação adjunta do grupo (vão de 1 até #Geradores do Grupo)

(no caso de uma simetria não-abeliana)

Estou pensando em uma teoria invariante sobre um grupo de transformações internas (que misturam graus de liberdade do campo e não são transformações do espaço tempo). Os elementos do grupo tem uma forma infinitesimal:

$$g(\alpha) = 1 + i\alpha^a \underbrace{T^a}_{\text{geradores}} + O(\alpha^2) \longrightarrow \underbrace{[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c}_{\text{álgebra do grupo}}$$

(= zero no caso abeliano)

Os férmions e escalares da teoria vão se transformar em alguma representação do grupo:

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha^a \underbrace{t^a}_{\text{matrizes que satisfazem álgebra do grupo, ex:}}}\psi$$

$$SU(2): \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(nucleons em física nuclear)

$$SU(2): \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(pions)

Vamos nos restringir ao caso abeliano, por enquanto, e comecemos tentando o caminho ingênuo, análogo ao que fizemos no campo escalar:

$$Z[J] = N\int D\phi\, e^{i\int(\mathcal{L} + J\phi)\,dx} = \frac{1}{N}\int D\phi\, e^{-i\int d^4x \left[\frac{1}{2}\phi(\Box + m^2)\phi - \phi J\right]} =$$

$$= \exp\left[-\frac{i}{2}\int d^4x\, d^4y\, J(x)\,\Delta_F(x-y)\,J(y)\right]$$

No caso do campo eletromagnético (sem interação com a matéria):

$$Z[J] = N\int DA_\mu\, e^{i\int(\mathcal{L} + J^\mu A_\mu)\,d^4x}$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$$

$$\int d^4x\, (\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) = \underbrace{\int d^4x\, \partial_\mu (A_\nu \partial^\mu A^\nu)}_{0} - \int d^4x\, A_\nu \partial_\mu \partial^\mu A^\nu = -\int d^4x\, g_{\mu\nu} A^\mu \Box A^\nu$$

$$\int d^4x\, (\partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu) = \underbrace{\int d^4x\, \partial_\nu (A_\mu \partial^\mu A^\nu)}_{0} - \int d^4x\, A_\mu \partial_\nu \partial^\mu A^\nu = -\int d^4x\, A^\mu \partial_\nu \partial_\mu A^\nu$$

$$\boxed{\mathcal{L}} = -\frac{1}{4}\left(\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu + \partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu \right) =$$

$$\boxed{= \frac{1}{2} A^\mu \left(g_{\mu\nu} \Box - \partial_\nu \partial_\mu \right) A^\nu} \qquad \text{(eq. 58.1)}$$

$$(g_{\mu\nu} \Box - \partial_\mu \partial_\nu) A^\nu = 0 \qquad \text{(eq. de Maxwell)}$$

Em princípio só precisaríamos inverter este operador, mas aí esbarramos em um problema: imagine uma configuração de campo específica (estamos somando sobre TODAS ELAS):

$$A^\mu(x) = \partial^\mu \alpha(x)$$

$$(g_{\mu\nu} \Box - \partial_\nu \partial_\mu)\partial^\nu \alpha = (\Box \partial_\nu - \partial_\nu \Box)\alpha = 0$$

O operador tem autovalores zero, e portanto é singular. De fato, a integral:

$$\int \mathcal{D}A_\mu \exp\left\{ \frac{i}{2} \int d^4x\, A_\mu(x) \left(g^{\mu\nu} \partial^2 - \partial^\mu \partial^\nu \right) A_\nu(x) \right\}$$

vai receber uma contribuição igual a "1" cada vez que considerarmos uma contribuição deste tipo. É divergente. Podemos ver que esta divergência é transmitida para o que seria a função de Green:

$$(g_{\mu\nu} \Box - \partial_\mu \partial_\nu) D^{\nu\lambda}(x-y) = \delta^\lambda_\mu \delta^4(x-y)$$

$$\partial^\mu \downarrow \qquad\qquad \downarrow \partial^\mu$$

$$(0 \cdot \partial_\nu) \overbrace{D^{\nu\lambda}}^{\text{(tem que ser realmente grande para satizfazer isto)}}(x-y) = \partial^\lambda \delta^4(x-y)$$

A raiz do problema está na invariância de gauge. Quando somamos sobre diversas configurações de A_μ, somamos inclusive aquelas equivalentes (ligadas por uma transformação de gauge) o que é uma forma de "multipla contagem".

$$A_\mu \longleftrightarrow \cancel{A_\mu + \partial_\mu \alpha_1}$$
$$\longleftrightarrow \cancel{A_\mu + \partial_\mu \alpha_2}$$
$$\longleftrightarrow \cancel{A_\mu + \partial_\mu \alpha_3} \ \ldots$$

já incluimos esta configuração

não devemos incluir estas

Temos que forçar a nossa integral de trajetória a considerar somente estados inequivalentes por uma transformação de gauge. Uma forma óbvia de fazê-lo é fixar o gauge, mas como fazemos isto em uma integral de trajetória?

Fixação de Gauge em Integrais de Trajetória, método de Fadeev-Popov

Começamos fazendo a rotação de Wick para o espaço Euclideano. É preciso atentar para o fato de que A_μ é um vetor de Lorentz e sua componente zero também deve ser rodada:

$$x_0 = x^0 = t = -i x_4 = -i x^4 \qquad \partial_0 = \frac{\partial}{\partial x^0} = i\frac{\partial}{\partial x^4} = i\partial_4$$

$$\boxed{A_0 = i A_4} \quad \text{(eq. 59.1)}$$

$$E_i^{(M)} = F_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 = i\partial_4 A_i - i\partial_i A_4 = i F_{4i} \equiv i E_i^{(E)} \qquad \boxed{F^{0i} = -i F^{4i}} \quad \text{(eq. 59.2)}$$

$$\mathcal{L}^{(M)}_{EM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}F_{0i}F^{0i} - \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} = -\frac{1}{4}F_{4i}F^{4i} - \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} = -\frac{1}{4}F^{(E)}_{\mu\nu}F^{(E)\mu\nu}$$

$$i\int \underbrace{d^4x}_{-i\,d^4x_E}\, \mathcal{L}^{(M)}_{EM} = \int d^4x_E\left(-\frac{1}{4}F^{(E)}_{\mu\nu}F^{(E)\mu\nu}\right) = -\underbrace{\int d^4x_E\, \underbrace{\left(F^{(E)}_{\mu\nu}\right)^2}_{\mathcal{L}^{(E)}_{EM}}}_{S^{(E)}_{EM}}$$

$$\boxed{\mathcal{L}^{(E)}_{EM} = \frac{1}{4}F^{(E)}_{\mu\nu}F^{(E)}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left[\left(E_i^{(E)}\right)^2 + \left(B_i^{(E)}\right)^2\right]} \quad \text{(eq. 75.3)}$$

Esquecendo o índice (E) e fazendo uma integração por parte (análogo ao que fizemos para obter 58.1, mas aqui não há termos de borda por definição):

$$S_{EM}[A] = \int d^4x\left[-\frac{1}{2}A_\mu\left(\delta_{\mu\nu}\partial^2 - \partial_\nu\partial_\mu\right)A_\nu\right]$$

A idéia agora é que em: $Z = \int DA_\mu(x)\, e^{-S_{EM}[A]}$

temos duas "somas":

(1) uma desejável, sobre todas as configurações fisicamente inequivalentes do campo A_μ que criam o comportamento quântico do campo

(2) uma soma igual a anterior só que com todos as configurações levadas em outras fisicamente equivalentes por meio de uma transformação de Gauge, para um parâmetro de Gauge λ específico. Claramente temos uma "cópia" desta para cada escolha de λ, o que acaba virando uma integral em λ.

Se conseguirmos fatorar a integral acima em duas: $\int DA_\mu(x) = \int d\lambda \int DA^{GF}_\mu(x)$

integral para os diversos "Gauges"

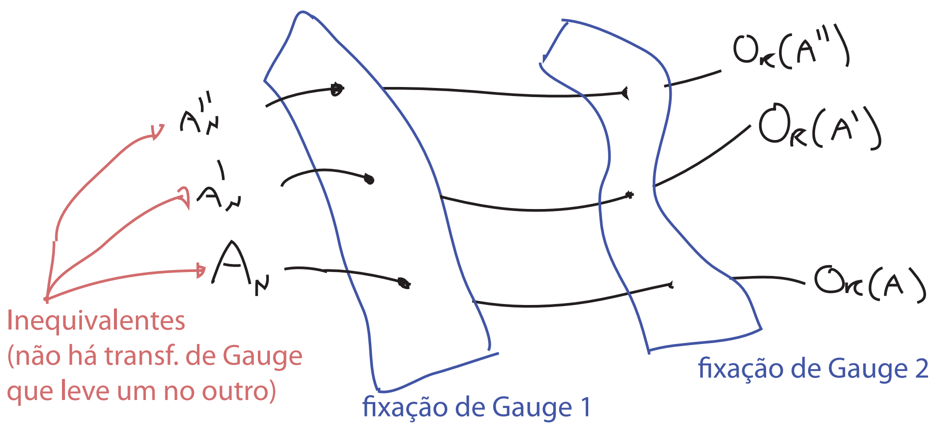
integral sobre os campos fisicamente relevantes (Gauge-fixados) e eliminarmos toda dependencia em λ da integral de trajetória, então a integral em λ vira um fator multiplicativo em Z, completamente irrelevante (é o "volume" do espaço interno definido pelo grupo de Gauge). Essa é nossa meta nas próximas páginas.

Para começar, consideremos uma fixação de Gauge covariante mais geral do que a de Lorenz:

$$\boxed{\partial_\mu A_\mu = C(x)} \quad \text{(eq. 60.1)}$$

Dada uma configuração de campo específica A_μ, definamos a órbita de A_μ, *Or(A)*, como o conjunto de todas as outras configurações que podem ser obtidas a partir de A_μ por meio de uma transformação de Gauge.

Agora imagine também o espaço de todas as possíveis condições de fixação de Gauge. Se estas são "boas" fixações de Gauge, deve haver apenas um ponto de intersecção entre este espaço e *Or(A)* (para cada configuração inequivalente):



Vamos assumir que a intersecção é única, mas existe um problema conhecido em teorias não Abelianas com esta suposição, as chamadas cópias de Gribov (outras intersecções, uma infinidade delas de fato). Não nos preocuparemos com elas pois (1) só aparecem no caso não Abeliano e (2) mesmo nas teorias não Abelianas, só são importantes no regime não perturbativo destas.

Considere então que estamos percorrendo a órbita fazendo a transformação:

$$A_\mu(x) \rightarrow \boxed{{}^{\chi}A_\mu(x) \equiv A_\mu(x) + \partial_\mu \chi(x)} \quad \text{(eq. 60.2)}$$

a forma:

$$\boxed{\chi^{(C)}(x) \,/\, \partial^2 \chi^{(C)}(x) = -\partial_\mu A_\mu(x) + C(x)} \quad \text{(eq. 60.3)}$$

$$\partial^\mu\, {}^{\chi}A_\mu = \partial^\mu A_\mu + \partial^\mu \partial_\mu \chi^{(C)}$$

$$\partial^\mu\, {}^{\chi}A_\mu = C$$

É a transformação que nos coloca exatamente na intersecção de *Or(A)* com a fixação 60.1.

Queremos então provar o seguinte:

$$\boxed{\int \prod_{x\in\mathbb{R}^4} d\chi(x) \prod_{y\in\mathbb{R}^4} \delta\left(-\partial_\mu\left({}^{\chi}A_\mu(y)\right) + C(y)\right) = \frac{1}{\mathrm{Det}(-\partial^2)}} \quad \text{(eq. 60.4)}$$

porque se isso for verdade, teremos encontrado uma identidade:

$$1 = \mathrm{Det}(-\partial^2)\int \overbrace{\prod_{x\in\mathbb{R}^4} d\chi(x)}^{\int \mathcal{D}\chi}\ \overbrace{\prod_{y\in\mathbb{R}^4} \delta\left(-\partial_\mu\left({}^{\chi}A_\mu(y)\right) + c(y)\right)}^{\delta\left[-\partial_\mu {}^{\chi}A + c\right]} \qquad \text{(eq. 61.1)}$$

"δ funcional" no sentido em que a derivada de ${}^{\chi}A$ tem que ser c para qualquer ponto y

que pode ser inserida dentro da integral de trajetória de A e impõe, por meio desta δ, a condição 60.1 para qualquer valor de χ.

Demonstração

$$-\partial_\mu\left({}^{\chi}A_\mu\right) + c = -\partial^2\chi - \partial_\mu A_\mu + c = -\partial^2\chi + \partial^2\chi^{(c)}$$

Podemos fazer uma mudança de variáveis na integral em χ: $\chi \to \chi' = \chi - \chi^{(c)}$

$$d\chi' = d\chi \qquad -\partial^2\left(\chi - \chi^{(c)}\right) = -\partial^2\chi'$$

$$\int \prod_{x\in\mathbb{R}^4} d\chi(x) \prod_{y\in\mathbb{R}^4} \delta\Big[\underbrace{-\partial_\mu\left({}^{\chi}A_\mu(y)\right) + c(y)}_{G({}^{\chi}A_\mu)}\Big] = \int \prod_{x\in\mathbb{R}^4} d\chi'(x) \prod_{y\in\mathbb{R}^4} \delta\left[-\partial^2\chi'(y)\right]$$

Note que, dado o vínculo:

$$G\left({}^{\chi}A_\mu(y)\right) \equiv -\partial_\mu {}^{\chi}A_\mu + c = -\partial^2\chi(y) - \partial_\mu A_\mu(y) + c(y)$$

$$\frac{\delta G\left({}^{\chi}A_\mu(y)\right)}{\delta\chi(x)} = -\partial^2\delta(x-y) \equiv -\partial^2(x,y)$$

Mostrando que este operador $-\partial^2(x,y)$ age como elemento de matriz do Jacobiano de uma mudança de váriáveis:

$$\chi \to G\left({}^{\chi}A_\mu\right)$$

O que é uma versão contínua de:

$$\int \prod_{i=1}^{n} d\chi_i \prod_{j=1}^{n} \delta(\Delta_{ij}\chi_j) = \int d^n\chi\ \delta^n(\underbrace{\Delta\vec{\chi}}_{\vec{\eta}=\Delta\vec{\chi}}) = \int d^n\eta\ \frac{\delta^n(\vec{\eta})}{\mathrm{Det}(\Delta)} = \frac{1}{\mathrm{Det}(\Delta)}$$

$$\eta_i = \Delta_{ij}\chi_j \to d^n\eta = \mathrm{Det}(\Delta)\, d^n\chi$$

Portanto:

$$\int \prod_{x \in \mathbb{R}^4} d\chi(x) \prod_{y \in \mathbb{R}^4} \delta\left[-\partial^2 \chi(y)\right] = \frac{1}{\mathrm{Det}(-\partial^2)}$$

que é o que queríamos demonstrar

Podemos então, a partir da identidade 61.1, obter uma outra, integrando sobre as condições de Gauge (com um peso gaussiano):

$$\underbrace{N(\alpha)}_{\text{garante a identidade}} \int \mathcal{D}c \; e^{-\frac{1}{2\alpha}\int d^4x \, c^2(x)} = 1$$

$$N(\alpha) \int \mathcal{D}c \; e^{-\frac{1}{2\alpha}\int d^4x \, c^2(x)} \mathrm{Det}(-\partial^2) \int \mathcal{D}\chi \, \delta\left[-\partial_\mu {}^{\chi}A_\mu + c(y)\right] = 1$$

$$\boxed{\int \mathcal{D}\chi \, N(\alpha) \, e^{-\frac{1}{2\alpha}\int d^4x \left(\partial_\mu {}^{\chi}A_\mu(x)\right)^2} \mathrm{Det}(-\partial^2) = 1}$$

(eq. 62.1)

Podemos então inserir a identidade 62.1 dentro de qualquer integral de trajetória em A:

$$\int \mathcal{D}A \, e^{-S[A]} \mathcal{O}[A] = \int \mathcal{D}A \, e^{-S[A]} \mathcal{O}[A] \, \mathrm{Det}(-\partial^2) \int \mathcal{D}\chi \, N(\alpha) \, e^{-\frac{1}{2\alpha}\int d^4x \left(\partial_\mu {}^{\chi}A_\mu(x)\right)^2}$$

Não depende de A. Este passo, aparentemente inofensivo, é onde está uma das grandes diferenças entre teorias abelianas e não abelianas. Para uma teoria não abeliana este $\mathrm{Det}\left[\delta G / \delta \chi\right]$ vai depender de A e não poderá ser tirado da integral de trajetória. Neste caso seríamos forçados a reescrevê-lo como uma integral de gaussiana, ou seja, mais um termo quadrático seria adicionado a ação. É dessa forma que nascem os fantasmas de Fadeev-Popov (como veremos em breve)

$$\int \mathcal{D}A \, e^{-S[A]} \mathcal{O}[A] = \mathrm{Det}(-\partial^2) N(\alpha) \int \mathcal{D}\chi \int \mathcal{D}A \, e^{-S[A] - \frac{1}{2\alpha}\int d^4x \left(\partial_\mu {}^{\chi}A_\mu(x)\right)^2} \mathcal{O}[A]$$

Fazemos uma mudança de variáveis em A: $A \to A - \partial_\mu \chi$

$$\partial_\mu {}^{\chi}A_\mu \to \partial_\mu A_\mu$$

Já sabemos que a ação é invariante de Gauge, então: $S[A] \to S[A]$

e vamos assumir que *O[A]* também tenha esta propriedade (o que é obrigatório para qualquer observável: $\mathcal{O}[A] \to \mathcal{O}[A]$

$$\boxed{\therefore \int \mathcal{D}A \, e^{-S[A]} \mathcal{O}[A] = \mathrm{Det}(-\partial^2) N(\alpha) \underbrace{\left(\int \mathcal{D}\chi\right)} \int \mathcal{D}A \, e^{-S[A] - \frac{1}{2\alpha}\int d^4x (\partial_\mu A_\mu(x))^2} \mathcal{O}[A]}$$ (eq. 63.1)

Não há mais nada dependendo de χ, logo esta integral é só um número (infinito).

Esta é de fato a expressão que buscávamos, pois conseguimos fatorar a integração sobre o parâmetro de Gauge. Todos as constantes fora da integral em A são irrelevantes pois qualquer correlator vai ser obtido via:

$$\langle \mathcal{O}[A] \rangle = \frac{\int \mathcal{D}A \, \mathcal{O}(A) \, e^{-S[A]} \hat{1}}{\int \mathcal{D}A \, e^{-S[A]} \hat{1}} = \frac{\int \mathcal{D}A \, \mathcal{O}(A) \, e^{-S_{EFF}[A]}}{\int \mathcal{D}A \, e^{-S_{EFF}[A]}}$$

Onde:

$$\boxed{S_{EFF}[A] \equiv \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^2 + \underbrace{\frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A_\mu)^2}_{S_{GF} \text{ (Gauge Fixing)}}}$$ (eq. 63.2)

O propagador do Fóton:

Podemos agora usar a nova Lagrangeana para obter o propagador do fóton. Integrando por partes podemos escrever:

$$\boxed{\begin{aligned} S_{EFF} &= \int d^4x \left[-\frac{1}{2} A_\mu (\delta_{\mu\nu}\partial^2 - \partial_\mu \partial_\nu) A_\nu\right] \underbrace{- \frac{1}{2\alpha} A_\mu \partial_\mu \partial_\nu A_\nu}_{\text{parte nova}} = \\ &= \frac{1}{2}\int d^4x \, A_\mu(x) \underbrace{\left(-\delta_{\mu\nu}\partial^2 + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\partial_\mu \partial_\nu\right)}_{(G^{(0)})^{-1}_{\mu\nu}(x) \text{ (que agora é inversível)}} A_\nu(x) \end{aligned}}$$ (eq. 63.3)

$$S_{EFF} = \frac{1}{2}\int d^4x \int d^4k \, A_\mu(k) e^{ikx} \left(-\delta_{\mu\nu}\partial^2 + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\partial_\mu \partial_\nu\right) \int d^4k' \, A_\nu(k') e^{ik'x} =$$

$$= \frac{1}{2}\int d^4k\, d^4k'\; \delta^4(k+k')\; A_\mu(k)\left[+\delta_{\mu\nu}\, k'^2 - \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)k'_\mu k'_\nu\right] A_\nu(k') =$$

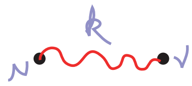
$$\boxed{S_{EFF} = \frac{1}{2}\int d^4k\; A_\mu(-k)\underbrace{\left[\delta_{\mu\nu}\, k^2 - \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)k_\mu k_\nu\right]}_{G^{(0)-1}(k)_{\mu\nu}} A_\nu(k)}$$

(eq. 64.1)

Finalmente:

$$\left[\delta_{\mu\nu}\, k^2 - \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)k_\mu k_\nu\right] G^{(0)}_{\nu\rho}(k) = \delta_{\nu\rho}$$

$$\boxed{G^{(0)}_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{k^2}\left(\delta_{\mu\nu} - (1-\alpha)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)}$$



(Moment., Euclid.)

(eq. 64.2)

De onde vemos que o propagador de um bóson de Gauge depende deste parâmetro α (que está ligado a escolha de de Gauge). No chamado "Gauge" de Feynman $\alpha = 1$ e:

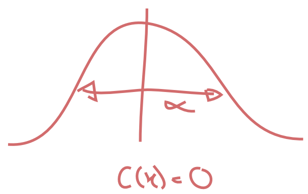
$$\boxed{G^{(0)}_{\mu\nu}(k;\alpha = 1) = \frac{1}{k^2}\,\delta_{\mu\nu}}$$

(Moment., Euclid., Gauge de Feynman)

(eq. 64.3)

fixamos o Gauge e depois integramos sobre todas as fixações possíveis com a seguinte distribuição:

$$e^{-\frac{1}{2\alpha}\int d^4x\; C^2(x)}$$



Quantização de Teorias não-Abelianas

(Ryder 7.1-7.2, Peskin 16.1-16.2)

Queremos agora quantizar a teoria obtida para um campo de gauge não-abeliano:

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4}\left(F^a_{\mu\nu}\right)^2$$

Assim como no caso Abeliano, temos um problema com a soma sobre configurações equivalentes. Agora as configurações equivalentes estão ligadas por:

$$A^M_\mu = A^a_\mu t^a \longleftrightarrow A^{M\chi}_\mu \equiv \left(A^\chi_\mu\right)^a t^a = e^{i\chi^a t^a}\left[A^b_\mu t^b + \frac{i}{g}\partial_\mu\right] e^{-i\chi^c t^c}$$