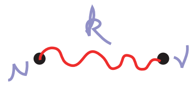
$$= \frac{1}{2}\int d^4k\, d^4k'\; \delta^4(k+k')\, A_\mu(k)\left[+\delta_{\mu\nu}\, k'^2 - \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)k'_\mu k'_\nu\right] A_\nu(k') =$$

$$\boxed{S_{EFF} = \frac{1}{2}\int d^4k\, A_\mu(-k)\underbrace{\left[\delta_{\mu\nu}\, k^2 - \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)k_\mu k_\nu\right]}_{G^{(0)\,-1}(k)_{\mu\nu}} A_\nu(k)}$$ (eq. 64.1)

Finalmente:

$$\left[\delta_{\mu\nu}\, k^2 - \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)k_\mu k_\nu\right] G^{(0)}_{\nu\rho}(k) = \delta_{\nu\rho}$$

$$\boxed{G^{(0)}_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{k^2}\left(\delta_{\mu\nu} - (1-\alpha)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)}$$



(Moment., Euclid.)

(eq. 64.2)

De onde vemos que o propagador de um bóson de Gauge depende deste parâmetro α (que está ligado a escolha de de Gauge). No chamado "Gauge" de Feynman $\alpha = 1$ e:

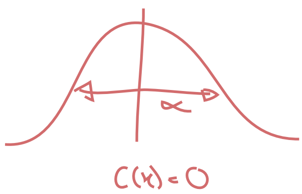
$$\boxed{G^{(0)}_{\mu\nu}(k;\alpha=1) = \frac{1}{k^2}\,\delta_{\mu\nu}}$$

(Moment., Euclid., Gauge de Feynman)

(eq. 64.3)

fixamos o Gauge e depois integramos sobre todas as fixações possíveis com a seguinte distribuição:

$$e^{-\frac{1}{2\alpha}\int d^4x\; C^2(x)}$$



Quantização de Teorias não-Abelianas

(Ryder 7.1-7.2, Peskin 16.1-16.2)

Queremos agora quantizar a teoria obtida para um campo de gauge não-abeliano:

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4}\left(F^a_{\mu\nu}\right)^2$$

Assim como no caso Abeliano, temos um problema com a soma sobre configurações equivalentes. Agora as configurações equivalentes estão ligadas por:

$$A^M_\mu = A^a_\mu t^a \longleftrightarrow A^{M\chi}_\mu \equiv (A^\chi_\mu)^a t^a = e^{i\chi^a t^a}\left[A^b_\mu t^b + \frac{i}{g}\partial_\mu\right] e^{-i\chi^c t^c}$$

SU(2)
$t^a = \sigma^a$

$$A^M_\mu = A^1_\mu \sigma^1 + A^2_\mu \sigma^2 + A^3_\mu \sigma^3 = \begin{pmatrix} A^3_\mu & A^1_\mu - iA^2_\mu \\ A^1_\mu + iA^2_\mu & -A^3_\mu \end{pmatrix}$$

Podemos definir uma identidade idêntica à 60.4:

$$1 = \int D\chi \, \delta\Big(\underbrace{G(A^{m\chi}_\nu)}_{\text{Vínculo: } G(A^{m\chi}_\nu)=0}\Big) \, \mathrm{DET}\left[\frac{\delta G(A^{m\chi}_\nu)}{\delta \chi}\right] \qquad \text{(eq. 65.1)}$$

Para o vínculo que lá usamos (pg 61):

$$\mathrm{DET}\left[\frac{\delta G(A^{\chi}_\nu)}{\delta\chi}\right] = \mathrm{DET}\left[-\partial^2\right]$$

Não precismos fixar o vínculo, apenas assumir que ele é linear em χ:

$$\boxed{\mathrm{DET}\left[\frac{\delta G(A^{m\chi}_\nu)}{\delta\chi}\right] \underset{\text{não dep. de } \chi}{\equiv} \Delta_G[A^m_\nu] = \Delta_G[A^{m\chi}_\nu] \quad \text{(invariante de gauge)}} \qquad \text{(eq. 65.2)}$$

e podemos tirar o determinante da integral em 65.1:

$$\boxed{\Delta_G^{-1}[A^m_\nu] = \int D\chi \, \delta\big(G(A^{m\chi}_\nu)\big)} \qquad \text{(eq. 65.3)} \quad \text{(compare com 60.4)}$$

Inserindo a identidade 65.1 na integral do funcional gerador, temos:

$$Z = \int DA^m_\nu \, e^{i\int d^4x \, \mathcal{L}_{YM}} \int D\chi \, \delta\big(G(A^{m\chi}_\nu)\big) \, \Delta_G[A^{m\chi}_\nu] =$$

note que estamos em Minkowski

$$= \int D\chi \int DA^m_\nu \, \overbrace{e^{i\int d^4x \, \mathcal{L}_{YM}}}^{\text{(invariante de gauge)}} \, \delta\big(G(A^{m\chi}_\nu)\big) \, \Delta_G[A^{m\chi}_\nu]$$

Podemos então fazer uma mudança de variáveis em A, que é a transformação de gauge que leva

$$A^{m\chi}_\nu \longrightarrow A^m_\nu$$

A medida de integração não muda, a final de contas a transformação de A não passa de uma translação seguida por uma rotação (unitária) do vetor A^a, então:

$$Z = \underbrace{\left(\int D\chi\right)}_{} \int DA^m_\nu \, e^{i\int d^4x \, \mathcal{L}_{YM}} \, \delta\big(G(A^m_\nu)\big) \, \Delta_G[A^m_\nu]$$

Nada na integral em A depende de χ, isto não passa de um infinito multiplicativo.

É aqui que surge a diferença entre os casos abeliano e não-abeliano. No caso abeliano, para uma fixação de gauge genérica:

$$G(A_\mu) = \partial^\mu A_\mu(x) - \omega(x) \quad \Rightarrow \quad G(A_\mu^\chi) = \partial^\mu A_\mu + \partial^2 \chi - \omega$$

$$\Delta_G[A_\mu^\chi] = \frac{\delta G}{\delta \chi} = \frac{\delta}{\delta \chi}\left(\partial^2 \chi\right)$$

$\Delta_G[A_\mu]$ também independe de A
e pode ser tirado da integral e ignorado (outro fator multiplicativo)

Agora temos:

$$G(A_\mu^a) = \partial^\mu A_\mu^a(x) - \omega^a(x) \quad \Rightarrow \quad G(A_\mu^{a\chi}) = \partial^\mu \left(A_\mu^a + \frac{1}{g}\partial_\mu \chi^a + f^{abc} A_\mu^b \chi^c\right) - \omega^a(x)$$

$$\Delta_G[A_\mu^{a\chi}] = \frac{\delta G}{\delta \chi^d} = \frac{\delta}{\delta \chi^d}\left(\frac{1}{g}\partial^\mu \partial_\mu \chi^a + \partial^\mu f^{abc} \underbrace{A_\mu^b \chi^c}\right) = \frac{1}{g}\partial^\mu D_\mu^{ad}$$

Agora $\Delta_G[A_\mu^{a\chi}]$ depende de A

$$(A_\mu^\chi)^a = A_\mu^a + \frac{1}{g}\partial_\mu \chi^a + f^{abc} A_\mu^b \chi^c = A_\mu^a + \frac{1}{g}\left(\delta^{ac}\partial_\mu + g f^{abc} A_\mu^b\right)\chi^c \equiv A_\mu^a + \frac{1}{g} D_\mu^{ac} \chi^c$$

$\dfrac{\delta G(A_\mu^a)}{\delta \chi^b}$ é uma matriz quadrada (índices *a* e *b*) de dimensão N^2-1 (*a*,*b* são índices que numeram os geradores do grupo e estamos pensando em SU(N))

Podemos escrever o determinante como uma integral funcional de funções de números de Grassmann:

$$\mathrm{DET}\, M = \int \mathcal{D}\bar{c}\, \mathcal{D}c\; e^{-\int d^4x\, \bar{c} \cdot M \cdot c}$$

matriz nxn

campo de números de Grassmann. Multipleto com n componentes, no caso em questão isso significa campos se transformando na rep. adjunta de SU(N)

Finalmente:

$$\Delta_G[A_\mu^a] = \mathrm{DET}\left[\frac{\delta G(A_\mu^{a\chi})}{\delta \chi}\right] = \int \mathcal{D}\bar{c}\, \mathcal{D}c\; \mathrm{EXP}\left[i \int d^4x\; \bar{c}_a\left(-\partial^\mu D_\mu^{ac}\right) c_c\right]$$

fatores g e -i incluídos na definição de c

$\underline{c}$
- Adjunta de SU(N)
- Anti-comutam (estatística de férmions)
- Escalares de Lorentz (spin 0)

Relação spin-estatística errada!

Fantasmas (Ghosts) de Faddeev-Popov

$$\mathcal{L}_{FPG} \equiv \bar{c}_a(-\partial^\mu D_\mu^{ac})c_c = \bar{c}_a(-\delta^{ac}\partial^2 - g f^{abc}\partial^\mu A_\mu^b)c_c =$$

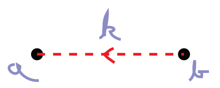
$$= -\bar{c}_a \Box c_a - g f^{abc}\bar{c}_a\partial^\mu(A_\mu^b c_c) \quad \text{(eq. 67.1)}$$

Termo cinético: $\partial_\mu \bar{c}_a \partial^\mu c_a$

Interação Ghost-Gauge

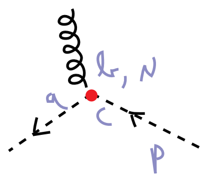
$$\langle c^a(x)\bar{c}^b(y)\rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{k^2}\delta^{ab}e^{-ik(x-y)}$$

$$g f^{abc}(\partial^\mu \bar{c}_a)A_\mu^b c_c$$



$$= \frac{i\delta^{ab}}{p^2} \quad \text{(eq. 67.2)}$$

(Espaço dos momentos, Mink)



$$= \underbrace{g f^{abc}}_{\text{Acoplamento de gauge}} p^\mu \quad \text{(eq. 67.3)}$$

(Espaço dos momentos, Mink)

Com isso em mente, temos:

$$Z[J] = \frac{1}{N}\int DA_\mu^a\, D\bar{c}\, Dc\; e^{i\int d^4x\, \mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_{FPG}}\; \delta(G(A_\mu^a))$$

Esta δ é tratada da mesma forma que o caso abeliano, e temos para uma fixação genérica:

$$\delta(G(A_\mu^a)) = \delta(\partial^\mu A_\mu^a - \omega)$$

Basta multiplicar Z pela identidade $\underbrace{N(\xi)}_{\text{Escolhido de forma a garantir a ident.}}\int D\omega\, e^{-i\int d^4x\, \frac{\omega^2}{2\xi}} = 1$

E fazer a integral em ω usando a delta:

$$Z[J] = \underbrace{\frac{1}{N'}}_{\text{Absorve as normalizações}} \int DA_\mu^a \, D\bar{c} \, Dc \; e^{i\int d^4x \, \mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_{FPG}} \; \mathrm{EXP}\left[i\int d^4x \underbrace{\left(-\frac{(\partial^\mu A_\mu^a)^2}{2\xi} \right)}_{\mathcal{L}_{GF}} \right]$$

$\mathcal{L}_{GF}$
(Gauge Fixing)

Podemos inclusive incluir os férmions para a lagrangeana final:

$$\boxed{\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\left(F_{\mu\nu}^a\right)^2 - \frac{1}{2\xi}\left(\partial^\mu A_\mu^a\right)^2 + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi + \bar{c}_a\left(-\partial^\mu D_\mu^{ac}\right)c_c}$$ (eq. 68.1)

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

$$\not{D} = \gamma^\mu\left(\partial_\mu - ig A_\mu^a t^a\right)$$

$$D_\mu^{ac} = \left(\delta^{ac}\partial_\mu + g f^{abc} A_\mu^b\right)$$

Depende da rep. em que os ψ se transformam
(esta forma é para a fundamental)

Lembrando que ainda restam índices escondidos nos férmions:

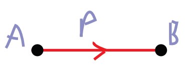
$$\bar{\psi}\not{D}\psi \to \bar{\psi}\gamma^\mu t^a \psi = \bar{\psi}_{iA}\,\gamma^\mu_{ij}\, t^a_{AB}\, \psi_{jB}$$

Índices spinoriais (i, j)

Índices da representação em que os férmions se transformam (neste caso a fundamental de SU(N) (A,B = 1... N)) (A, B)

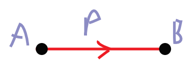
As regras de Feynman da parte fermiônica não mudam muito, basta lembrar que temos um número de férmions igual à dimensão da representação do grupo. O progador só muda para incluir o índice da simetria interna:

$$\langle \psi_{iA}(x)\,\bar{\psi}_{jB}(y)\rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left(\frac{i}{\not{k} - m}\right)_{ij} \delta_{AB}\, e^{-ik(x-y)}$$



$$= \frac{i(\not{p}+m)\delta_{AB}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$ (eq. 68.2)

(Espaço dos momentos, Mink., $g_{\mu\nu}$ = Diag{1,-1,-1,-1})



$$= -i\frac{(-i\not{p}+m)\delta_{AB}}{p^2 + m^2 - i\epsilon}$$

(Espaço dos momentos, Mink., $g_{\mu\nu}$ = Diag{-1,1,1,1})

Uma vez fixado o Gauge, podemos obter o propagador para os bósons de Gauge a partir dos termos:

$$\overbrace{(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)(\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu})}$$

$$\int d^4x \left[\frac{1}{2} A^{a\mu}(g_{\mu\nu}\Box - \partial_\nu \partial_\mu) A^{a\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^{a\mu})^2\right] =$$

$$= \int d^4x \left[\frac{1}{2} A^{a\mu}(g_{\mu\nu}\Box - \partial_\nu \partial_\mu) A^{a\nu} + \frac{1}{2\xi} A^{a\mu}(\partial_\mu \partial_\nu) A^{a\nu}\right]$$

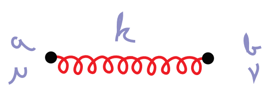
$$= \int d^4x \; \frac{1}{2} A^{a\mu} \underbrace{\left[g_{\mu\nu}\Box + \left(\frac{1}{\xi} - 1\right)\partial_\mu \partial_\nu\right]}_{\text{temos que inverter este operador}} A^{a\nu} =$$

$$= \int d^4x \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \tilde{A}^{a\mu}(k_1) e^{-ik_1x} \left[g_{\mu\nu}\Box + \left(\frac{1}{\xi} - 1\right)\partial_\mu \partial_\nu\right] \tilde{A}^{a\nu}(k_2) e^{-ik_2x} =$$

$$= \int d^4x \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \tilde{A}^{a\mu}(k_1) e^{-ik_1x} \left[-g_{\mu\nu}(k_2)^2 - \left(\frac{1}{\xi} - 1\right) k_{2\mu} k_{2\nu}\right] \tilde{A}^{a\nu}(k_2) e^{-ik_2x} =$$

$$= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \tilde{A}^{a\mu}(k)\, \delta_{ab} \left[\left(1 - \frac{1}{\xi}\right) k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu} k^2\right] \tilde{A}^{b\nu}(-k)$$

Este operador tem inverso e podemos mostrar que este é:

$$\boxed{\tilde{D}(k)^{ab}_{\mu\nu} = \frac{-i}{k^2 - i\epsilon}\left[g_{\mu\nu} + (\xi - 1)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2 - i\epsilon}\right]\delta_{ab} \quad \Longleftrightarrow}$$ 

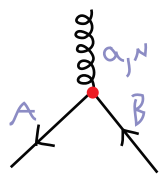
(eq. 69.1)

(Mink., Momento)

Notando que temos N^2-1 propagadores idênticos.

A interação dos férmions vem de (assumindo que se transformem na rep. fundamental):

$$\bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi \Rightarrow g\, \bar{\psi}_A \gamma^\mu A^a_\mu t^a_{AB} \psi_B$$



$$= i g \gamma^\mu t^a_{AB}$$ (eq. 69.2)

(Mink., Momento)

Temos ainda alguns termos provenientes de $-\frac{1}{4}(F^a_{\mu\nu})^2$:

$$-\frac{1}{4}(F^a_{\mu\nu})^2 = -\frac{1}{4}\left(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu\right)\left(\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu} + g f^{ab'c'} A^{b'\mu} A^{c'\nu}\right) =$$

$$= -\frac{1}{4}\Big[\overbrace{\cdots}^{\text{termos com } A^2\text{, já levados em conta no propagador}} + \underbrace{(\partial_\mu A^a_\nu)\, g f^{ab'c'} A^{b'\mu} A^{c'\nu}}_{\mu\leftrightarrow\nu;\ b'\to c;\ c'\to b} \underbrace{- (\partial_\nu A^a_\mu)\, g f^{ab'c'} A^{b'\mu} A^{c'\nu}}_{b'\to b;\ c'\to c} + \underbrace{g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu (\partial^\mu A^{a\nu})}_{\mu\leftrightarrow\nu;\ b\leftrightarrow c} +$$

$$\underbrace{- g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu (\partial^\nu A^{a\mu})} + g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu\, g f^{ab'c'} A^{b'\mu} A^{c'\nu}\Big] =$$

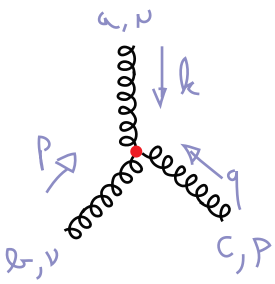
$$= -\frac{1}{4}\left[-4 g f^{abc} (\partial_\nu A^a_\mu) A^{b\mu} A^{c\nu} + g^2 f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu f^{ab'c'} A^{b'\mu} A^{c'\nu}\right]$$

$$\langle p^\nu_b, q^\rho_c | (\partial_\alpha A^{a'}_\beta) A^{b'\beta} A^{c'\alpha} | k^\mu_a \rangle \Rightarrow (ig) f^{a'b'c'} (-i k_\alpha) g_\beta{}^\mu \delta_{a'a}\, g^{\nu\beta} \delta_{b'b}\, g^{\rho\alpha} \delta_{c'c} =$$

$$= g f^{abc} k^\rho g^{\nu\mu}$$

$$\langle p^\nu_b, q^\rho_c | (\partial_\alpha A^{a'}_\beta) A^{b'\beta} A^{c'\alpha} | k^\mu_a \rangle \Rightarrow (ig) f^{a'b'c'} (-i k_\alpha) g_\beta{}^\mu \delta_{a'a}\, g^{\rho\beta} \delta_{b'c}\, g^{\nu\alpha} \delta_{bc'}$$

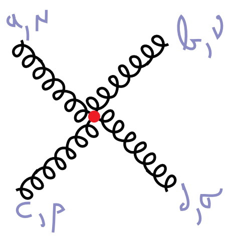
$$= g f^{acb} k^\nu g^{\rho\mu} = -g f^{abc} k^\nu g^{\rho\mu}$$



$$= g f^{abc}\left[g^{\mu\nu}(k-p)^\rho + g^{\nu\rho}(p-q)^\mu + g^{\rho\mu}(q-k)^\nu\right]$$

(Mink., Momento)
(eq. 70.1)

Seguindo a mesma lógica, obtemos o acoplamento quártico (são 4! contrações, mas somente 6 delas são diferentes e se repetem 4 vezes, o que some com o fator 1/4 da Lagrangeana):

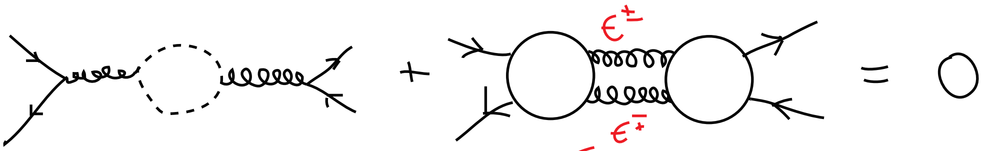


$$= -ig^2\Big[f^{abe} f^{cde}\left(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}\right) + f^{ace} f^{bde}\left(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}\right) +$$

$$+ f^{ade} f^{bce}\left(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}\right)\Big]$$

(Mink., Momento)
(eq. 70.2)

A introdução dos Ghosts de Fadeev-Popov pode ser incômoda, mas não leva a nunhum resultado observável que contrarie o estabelecido experimentalmente. Em especial, não introduz nenhum grau de liberdade adicional na teoria (que continua sendo uma teoria de bósons de gauge, férmions e escalares, conforme o caso), e portanto não há escalar com a estatística errada. Não faremos isto em detalhes, mas é possível mostrar que:



polarizações longitudinais dos bósons de Gauge

o que nos indica que os Ghosts agem como graus de liberdade "negativos" e sua única função é cancelar as polarizações não físicas dos bósons de Gauge.

Este cancelamento nos loops deve estar ligado ao mesmo tipo de cancelamento nas pernas externas, fazendo com que não seja possível observar nem Ghosts nem bósons de gauge com a polarização indesejada. É possível usar as transformações BRST para definir os estados físicos da teoria e então mostrar que estes estados (que incluem apenas as polarizações transversais dos bósons de Gauge) nunca são levados nos estados não físicos (Ghosts e Bósons Longitudinais) pela evolução temporal do sistema. Para mais detalhes veja as notas do curso de campo de 2013, pgs 153 a 165 em

http://www.ift.unesp.br/users/matheus/files/courses/2013tqc2/tudo_TQC2.pdf