

O Grupo de Renormalização

(Peskin 8 & 12.1, Ryder 9.4)

Vimos que, fazendo a renormalização de uma teoria, podemos obter resultados que independem da dinâmica no ultravioleta. As divergências somem e conseguimos uma teoria que funciona. No entanto é um tanto misterioso como as excitações de maior energia da teoria podem ter tão pouco efeito. Vamos então tentar ter uma imagem mais clara de como isso pode ocorrer.

Começemos pensando no funcional gerador de $\lambda\phi^4$:

$$Z[J] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\phi e^{i \int [\mathcal{L} + \mathcal{J}\phi]} = \left(\prod_k \int d\phi(k) \right) e^{i \int [\mathcal{L} + \mathcal{J}\phi]}$$

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k e^{-i k x} \phi(k)$$

↑
unitária

$$\mathcal{D}\phi(x) = \prod_k d\phi(k)$$

fazer uma regularização por cut-off significa integrar somente sobre: $\phi(k) / |k| \leq \Lambda$
 $k > \Lambda \rightarrow \phi(k) = 0$

pensando desta forma podemos estudar especificamente o efeito dos momentos da ordem do cut-off: basta integrar só sobre eles. Para evitar valores de k que, apesar de pequenos, tem valores enormes de k_0 e \vec{k} , trabalharemos no espaço Euclideano.

$$|k_E| \leq \Lambda$$

Além disso, a teoria de campo no espaço Euclideano nos leva para perto de sistemas atômicos, onde podemos ter mais intuição do que significa o cut-off ultravioleta e a renormalização. Um bom exemplo de um sistema de mecânica estatística que é bem descrito por um campo escalar é um ferromagneto na teoria de Landau. A energia livre de Gibbs deste sistema é:

$$G = \int d^3x \left[\frac{1}{2} (\nabla s)^2 + b(T - T_c) s^2 + c s^4 - H s \right]$$

E a densidade de spin $s(x)$ faz o papel do campo escalar, ao passo que o campo externo H é a fonte. Nesse caso é bastante óbvio que existe um cut-off físico, não faz sentido falar em flutuações da densidade de spin em distâncias menores que o espaçamento entre os átomos que compõe o material.

Pensemos um pouco sobre este sistema em termos de temperatura: se estamos longe de qualquer ponto crítico, é de se esperar que hajam flutuações de spin na escala atômica. No entanto assim que nos afastamos para escalas maiores, da ordem de algumas dezenas de distâncias atômicas, o sistema já deve parecer uniforme e nenhuma flutuação é visível. Podemos descrever este comportamento usando teoria de campos. Mas primeiro vamos lembrar um pouco da física por trás do problema

Estamos imaginando, por simplicidade, que se trata de um material com um eixo preferencial de magnetização

$T \sim 0$
 $H = 0$ } \rightarrow Magnetização M paralela ou antiparalela a este eixo

$$M = \int d^3x S(x)$$

tanto o campo como os spins são definidos na direção deste eixo

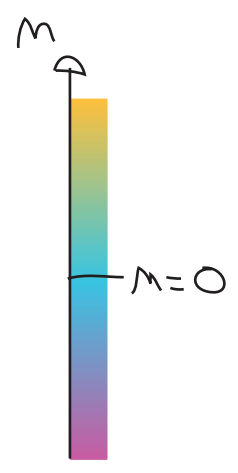
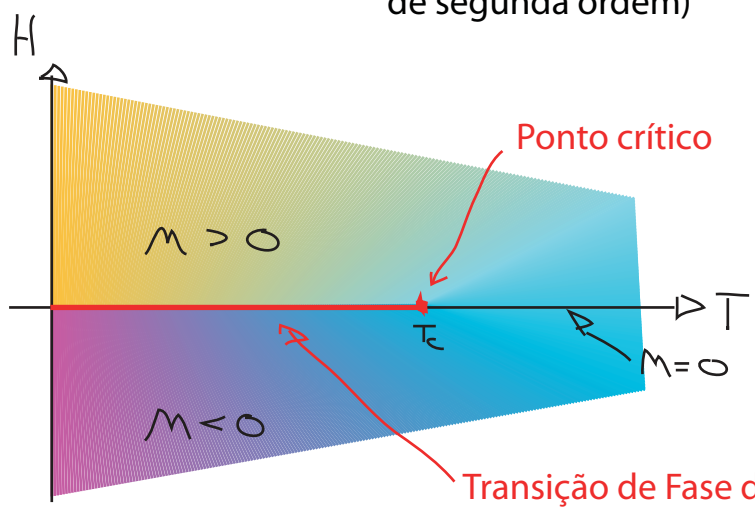
$T \sim 0$
 $H \neq 0$ } \rightarrow Favorece M paralelo ou antiparalelo

Mudança de H pequeno e negativo para pequeno e positivo } \rightarrow Mudança descontínua em M
 $T \sim 0$ } **Transição de fase de primeira ordem**

$T_c > T > 0 \rightarrow$ Spins cada vez mais desordenados $|M|$ vai diminuindo

$T = T_c$
 $H = 0$ } $\rightarrow M = 0$

\hookrightarrow Valores grandes de H ainda induzem magnetização, mas a descontinuidade perto de $H = 0$ desaparece. Este é o ponto crítico (ou transição de fase de segunda ordem)



Ao longo da linha da transição de fase os dois estados ($M > 0$ e $M < 0$) coexistem em equilíbrio. A energia livre de Gibbs só depende de M e T e é dada por:

$$\left. \frac{\partial G}{\partial M} \right|_T = H$$

Perto do ponto crítico M é pequeno e podemos expandir $G(M)$ como:

$$G(M) = A(T) + B(T)M^2 + C(T)M^4$$

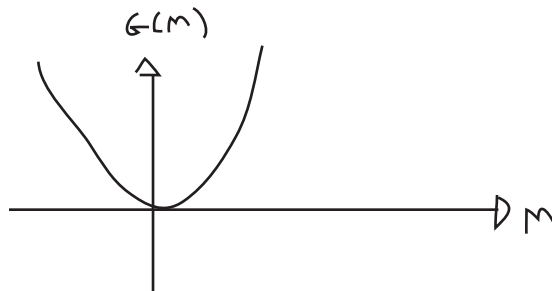
o sistema é simétrico por mudança no sinal de M , então $G(M)$ tem que ser par

Para encontrar o estado do sistema em $H = 0$, devemos minimizar G :

$$H = 0 \Rightarrow \frac{\partial G}{\partial M} = 2B(T)M + 4C(T)M^3 = 0$$

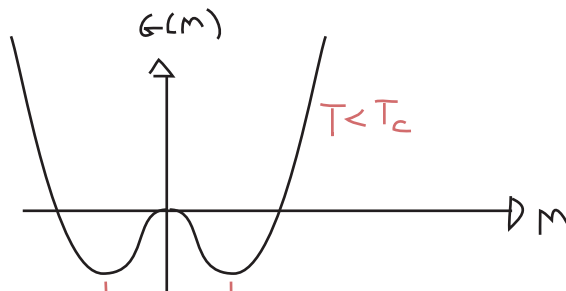
Resta fixar B e C , suponha que:

$$B, C > 0 \Rightarrow M = 0$$



No entanto se B puder ser negativo (digamos, abaixo de uma dada temperatura) então temos uma solução menos trivial:

$$\left. \begin{array}{l} C > 0 \\ B(T < T_c) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$



dois mínimos com magnetizações opostas

Fica claro que podemos modelar o sistema definindo:

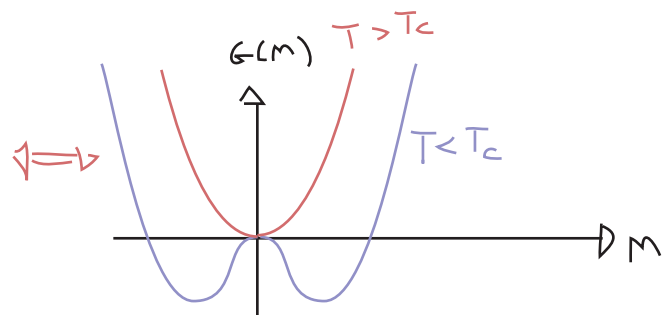
$$B(T) = b_5 (T - T_c) \quad C(T) = c \quad b_5, c > 0$$

Neste caso temos:

$$M = \begin{cases} 0 \\ \pm \left[\frac{b_5}{2c} (T_c - T) \right]^{1/2} \end{cases}$$

$$T > T_c$$

$$T < T_c$$



Para obter o comportamento para H não nulo precisamos resolver

$$\frac{\partial G}{\partial M} \Big|_T = H \quad G = A(T) + B(T)M^2 + C(T)M^4$$

ou podemos minimizar (em relação a M): $G(M, H) = A(T) + B(T)M^2 + C(T)M^4 - HM$

Só temos o duplo mínimo para $H = 0$ e $T < T_c$. Substituindo a definição de M , e as expressões para $B(T)$ e $C(T)$ na energia de Gibbs, obtemos a expressão que comparamos com o campo escalar:

$$G = \int d^3x \left[\frac{1}{2} (\nabla s)^2 + b(T - T_c) s^2 + c s^4 - H s \right] \quad H = H(x)$$

este termo adicional inclui a física microscópica, é o jeito mais simples de introduzir a tendência dos spins de se alinhar

Suponha que: $H(x) = H_0 \delta^{(3)}(x)$ } Vamos ver qual é a resposta em pontos longe de x . Procurando o mínimo de G em relação a configurações do campo s obtemos:

$$0 = \delta G[S(x)] = -\nabla^2 s + 2b(T - T_c) s + 4c s^3 - H$$

$$\left. \begin{array}{l} T > T_c \Rightarrow \kappa \neq 0 \\ M \sim 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} S < 1 \\ S^3 \sim 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (-\nabla^2 + 2b(T - T_c)) S(x) = H(x)$$

$$H(x) = H_0 \delta^{(3)}(x) \Rightarrow (-\nabla^2 + 2b(T - T_c)) D(x) = H_0 \delta^{(3)}(x)$$

Função de Green!

Configuração do campo $s(x)$ que surge quando o spin em $x = 0$ é forçado a se alinhar com H

$$D(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{H_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{|\mathbf{k}|^2 + 2b(T - T_c)} = \frac{H_0}{4\pi} \frac{1}{r} e^{-r/\xi}$$

comprimento de correlação $\rightarrow \xi = [2b(T - T_c)]^{-1/2}$

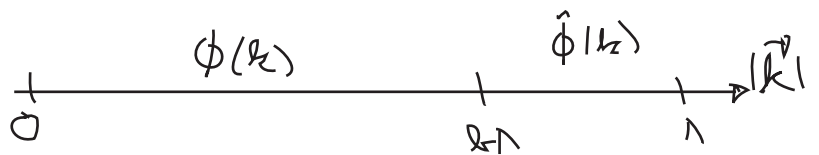
É importante perceber que, apesar do resultado depender dos coeficientes b e c , que são dados pela física no UV (física atômica), a lei de potência em $(T - T_c)$ só depende de podermos expandir G em série, e da simetria que o torna par. De fato, obteríamos o mesmo resultado para qualquer sistema com esta simetria (existem vários exemplos). O fato de que podemos usar teoria de campos para descrever certas propriedades de sistemas de mecânica estatística perto do ponto crítico **independentemente de detalhes na escala atômica** (a chamada **universalidade**) está intimamente ligado ao fato de podermos construir TQCs **independentes de cut-off**.

Note que o valor de $s(x)$ estará ligado ao valor em $x=0$ dependendo de quão longe ele está de $x=0$. A escala de "longe" é dada por ξ , note que este diverge quando chegamos perto da temperatura crítica - o sistema fica fortemente correlacionado. Voltando para nossa analogia com teoria quântica de campos, estamos falando de uma partícula escalar que carregaria a informação da existência da fonte em $x=0$, e que a "massa" desta partícula (ξ^{-1}) é da ordem de $[b(T-T_c)]^{-1/2}$. Se estivermos longe da temperatura crítica $|T| \gg |T_c|$, então o único parâmetro que determina a massa é $B(T)$, que vem da **escala ultravioleta da teoria**. O tamanho de m é então fixado pela única escala natural do sistema, portanto esperamos que $m \sim \Lambda$ (que no exemplo seria o inverso do típico tamanho atômico).

No cálculos que fizemos até agora, estávamos interessados justamente no caso em que $m \ll \Lambda$, e ajustamos os parâmetros da teoria para obter esta situação. Com isso em mente, vamos ver como fica a separação de escalas na integral de trajetória.

$$Z = \int [D\phi]_{\Lambda} \text{Exp} \left\{ - \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial_{\mu} \phi)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 + \frac{\Delta_0}{4!} \phi^4 \right] \right\} \quad (\text{eq. 76.1})$$

$$[D\phi]_{\Lambda} \equiv \prod_{|k| < \Lambda} d\phi(k)$$



$$\phi(k) \begin{cases} \hat{\phi}(k) = \begin{cases} \phi(k) & k-1 \leq |k| < \Lambda \\ 0 & |k| < k-1 \text{ ou } |k| \geq \Lambda \end{cases} \\ \phi(k) = \begin{cases} \phi(k) & |k| < k-1 \\ 0 & |k| \geq k-1 \end{cases} \end{cases} \quad k < 1$$

$$\phi(k) \rightarrow \phi(k) + \hat{\phi}(k)$$

$$Z = \int D\phi \int D\hat{\phi} \text{Exp} \left\{ - \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial_{\mu} \phi + \partial_{\mu} \hat{\phi})^2 + \frac{1}{2} m_0^2 (\phi + \hat{\phi})^2 + \frac{\Delta_0}{4!} (\phi + \hat{\phi})^4 \right] \right\} =$$

Todos os termos do tipo $\phi(k_1) \hat{\phi}(k_2)$ são iguais a zero (ortogonalidade para $k \neq k'$)

$$= \int D\phi e^{-\int \mathcal{L}(\phi)} \int D\hat{\phi} \text{Exp} \left\{ - \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial_{\mu} \hat{\phi})^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \hat{\phi}^2 + \lambda \left(\frac{1}{6} \phi^3 \hat{\phi} + \frac{1}{4} \phi^2 \hat{\phi}^2 + \frac{1}{6} \phi \hat{\phi}^3 + \frac{1}{4!} \hat{\phi}^4 \right) \right] \right\}$$

Queremos então integrar em $\hat{\phi}$, se tratarmos todos os termos (com exceção do cinético) como interações (incluindo o termo de massa), podemos escrevê-los como derivadas agindo em $\text{Exp}[-\int \mathcal{L}_0(\hat{\phi})]$

Onde:

$$\int \mathcal{L}_0 = \int d^d x \partial_\nu \hat{\phi}(x) \partial^\nu \hat{\phi}(x) = \int_{|\mathbf{k}| \leq \Lambda} d^d k \int_{|\mathbf{k}'| \leq \Lambda} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{d^d k'}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}} \hat{\phi}(\mathbf{k}) \hat{\phi}(\mathbf{k}') =$$

$$= \int_{|\mathbf{k}| \leq \Lambda} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} k^2 \underbrace{\hat{\phi}(-\mathbf{k})}_{\hat{\phi}^*(\mathbf{k})} \hat{\phi}(\mathbf{k})$$

condição para que $\phi(x)$ seja real, ver Peskin pg 285

Isso nos leva a um propagador (no espaço dos momentos):

$$\hat{\phi}(\mathbf{k}) \hat{\phi}(\mathbf{p}) = \frac{\int \mathcal{D}\hat{\phi} \hat{\phi}(\mathbf{k}) \hat{\phi}(\mathbf{p}) e^{-\int \mathcal{L}_0}}{\int \mathcal{D}\hat{\phi} e^{-\int \mathcal{L}_0}} = \frac{1}{k^2} (2\pi)^d \delta(\mathbf{k} + \mathbf{p}) \Theta(k)$$

$\Theta(k) = \begin{cases} 1 & |\mathbf{k}| \leq \Lambda \\ 0 & \text{quer outro } k \end{cases}$

Os outros termos da lagrangeana de $\hat{\phi}$ são tratados como interações em teoria de perturbação. Tomemos como exemplo o termo $\hat{\phi}^2$:

$$\text{Exp} \left\{ - \int d^d x \lambda_0 \left(\frac{1}{4} \hat{\phi}^2 \right) \right\} \simeq - \int d^d x \frac{\lambda_0}{4} \hat{\phi}^2 \hat{\phi} \hat{\phi}$$

Em princípio poderíamos calcular funções de dois pontos com quaisquer combinações de ϕ e $\hat{\phi}$:

$$\langle \phi \phi e^{-\int \mathcal{L}_I} \rangle, \langle \hat{\phi} \hat{\phi} e^{-\int \mathcal{L}_I} \rangle, \langle \phi \hat{\phi} \phi \hat{\phi} e^{-\int \mathcal{L}_I} \rangle, \dots$$

Mas se considerarmos que momentos próximos ao cut-off só aparecerão em integrais de loop e nunca nas linhas externas dos diagramas, então os campos $\hat{\phi}$ só aparecem em loops. Em termos do teorema de Wick temos:

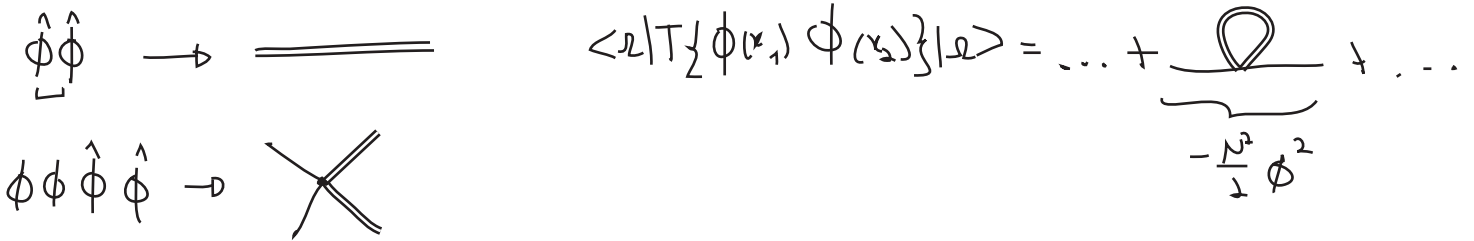
$$\left\langle \mathcal{O}_n(\phi) \left[- \int \frac{\lambda_0}{4} \phi^2 \hat{\phi} \hat{\phi} \right] \right\rangle = \left\langle \mathcal{O}_n(\phi) \left[- \int \frac{\lambda_0}{4} \phi^2 \underbrace{\hat{\phi} \hat{\phi}} \right] \right\rangle = \left\langle \mathcal{O}_n(\phi) \left[- \int \frac{\lambda_0}{2} \phi^2 \right] \right\rangle$$

↙ operador com n campos ϕ ↘ estamos assumindo que os campos externos serão ϕ e não $\hat{\phi}$

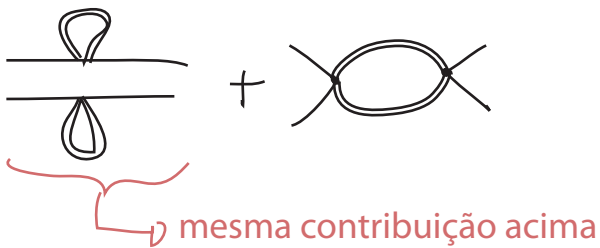
$$N = \frac{\lambda_0}{2} \int_{k-\Lambda \leq |k| < \Lambda} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2} = \frac{\lambda_0}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(d/2)} \frac{1 - b^{d-2}}{d-2} \Lambda^{d-2}$$

O importante a ser notado aqui é que este termo também seria obtido de um termo $-\frac{N}{2} \phi^2$ na lagrangeana

Para ver o que ocorre em ordens superiores, é útil definir diagramas:



Em ordem λ_0^2 temos, para a função de 4 pontos:



assumindo que o momento das pernas externas é muito pequeno comparado com $b\Lambda$, podemos ignorá-los e obter

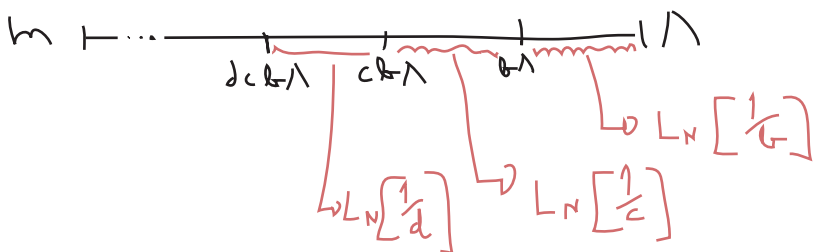
$$L_0 = -\frac{1}{4!} \int d^d x \zeta \phi^4 \quad \text{equivale a} \quad \text{X diagram} \quad -i\zeta$$

$$\zeta \equiv -4! \frac{2}{2!} \left(\frac{\lambda_0}{4}\right)^2 \int_{k-\Lambda \leq |k| < \Lambda} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left(\frac{1}{k^2}\right)^2 = \frac{-3\lambda_0^2}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(d/2)} \frac{(1 - b^{d-4})}{d-4} \Lambda^{d-4}$$

$$\stackrel{d \rightarrow 4}{=} -\frac{3\lambda_0^2}{16\pi^2} L_N \left[\frac{1}{b} \right]$$

(eq. 78.1)

Note que se fizessemos mais subdivisões (multiplicativamente), cada intervalo teria uma contribuição similar:



$$b, c, d, \dots < 1$$

se dividíssemos de forma que $b = c = d = \dots = 0.1$ estaríamos fazendo esta divisão em ordens de grandeza (que contribuem todas da mesma forma)