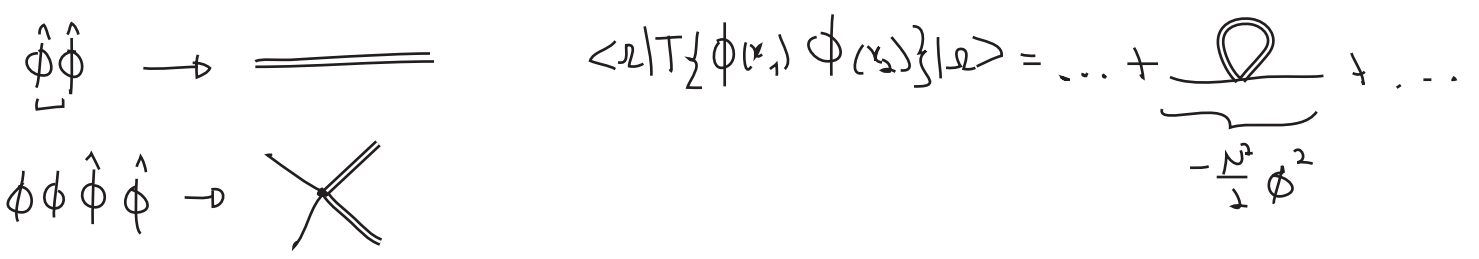


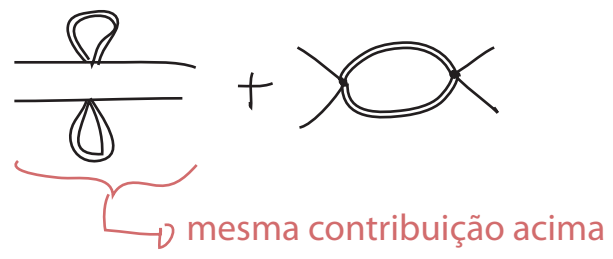
$$N = \frac{\lambda_0}{2} \int_{k-\Lambda \leq |k| < \Lambda} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2} = \frac{\lambda_0}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(d/2)} \frac{1 - b^{d-2}}{d-2} \Lambda^{d-2}$$

O importante a ser notado aqui é que este termo também seria obtido de um termo $-\frac{N}{2} \phi^2$ na lagrangeana

Para ver o que ocorre em ordens superiores, é útil definir diagramas:



Em ordem λ_0^2 temos, para a função de 4 pontos:



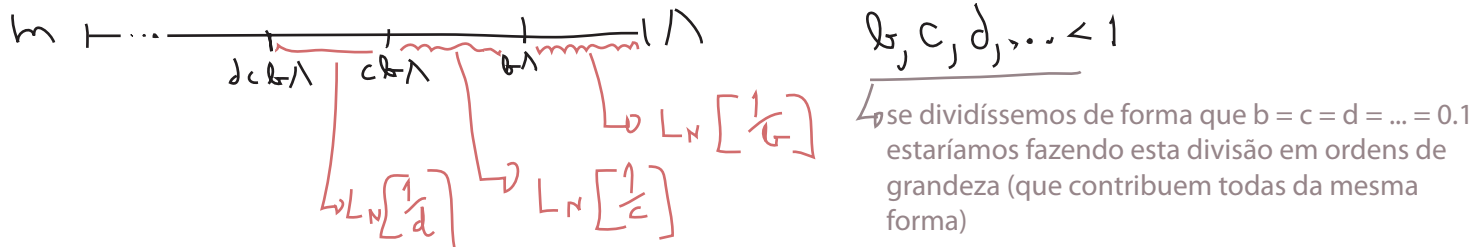
assumindo que o momento das pernas externas é muito pequeno comparado com $b\Lambda$, podemos ignorá-los e obter

$$L_0 = -\frac{1}{4!} \int d^d x \zeta \phi^4 \quad \text{equivale a} \quad \text{contact diagram} \quad -i\zeta$$

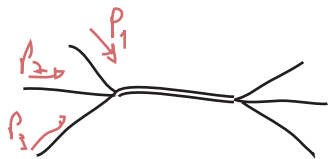
$$\zeta \equiv -4! \frac{2}{2!} \left(\frac{\lambda_0}{4}\right)^2 \int_{k-\Lambda \leq |k| < \Lambda} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left(\frac{1}{k^2}\right)^2 = \frac{-3\lambda_0^2}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(d/2)} \frac{(1 - b^{d-4})}{d-4} \Lambda^{d-4}$$

$$\stackrel{d \rightarrow 4}{=} -\frac{3\lambda_0^2}{16\pi^2} L_N \left[\frac{1}{b} \right] \quad \text{(eq. 78.1)}$$

Note que se fizessemos mais subdivisões (multiplicativamente), cada intervalo teria uma contribuição similar:

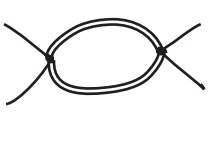


Este procedimento gera contribuições não só a ϕ^2 e ϕ^4 , mas também a ordens superiores. O termo $\phi^3 \hat{\phi}$ por exemplo:



$$\sim \frac{\lambda_0^2}{(p_1 + p_2 + p_3)^2} \oplus (p_1 + p_2 + p_3)$$

Obtemos acoplamentos com derivadas também. Para o diagrama abaixo por exemplo, desprezamos o momento das linhas externas. Se ao invés disso fizermos uma expansão para o momento externo pequeno, o próximo termo seria:



$$= -\frac{1}{4!} \int d^d x \zeta \phi^4 - \frac{1}{4} \int d^d x \eta \phi^2 (\partial_\mu \phi)^2 + \dots$$

De forma geral obteremos todas as interações possíveis (de potências arbitrariamente altas) entre o campo ϕ e suas derivadas. Temos diversas contribuições desconectadas que acabam sendo eliminadas pela normalização de qualquer correlator, então podemos finalmente escrever

$$Z = \frac{1}{N} \int \left[\mathcal{D}\phi \right] e^{-\int d^d x \mathcal{L}_{EFF}}$$

$$\mathcal{L}_{EFF} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 + \frac{1}{4!} \lambda_0 \phi^4 + \left(\text{contribuições conectadas de } \hat{\phi} \right) \quad (\text{eq. 79.1})$$

Este processo de excluir um campo das linhas externas da teoria fazendo seu momento (ou massa) muito grande comparado com as outras é chamado de "integrate out" o campo (não conheço uma tradução para o português melhor do que "integrar" o campo). Façamos então uma comparação entre a lagrangiana original e a que obtivemos após a integração

$$k' = \frac{k}{\Lambda} \quad \kappa' = \kappa \Lambda$$

$$0 < k < \Lambda \rightarrow 0 < |k'| < 1$$

$$\int d^d x \mathcal{L}_{EFF} = \int d^d x \left[\frac{1}{2} (1 + \Delta z) (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} (m_0^2 + \Delta m^2) \phi^2 + \frac{1}{4!} (\lambda_0 + \Delta \lambda) \phi^4 + \Delta C (\partial_\mu \phi)^4 + \Delta D \phi^6 + \dots \right]$$

contribuições da "out-integration" de $\hat{\phi}$

$$= \int d^d x' \Lambda^{-d} \left[\frac{1}{2} (1 + \Delta z) \Lambda^2 (\partial'_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} (m_0^2 + \Delta m^2) \phi^2 + \frac{1}{4!} (\lambda_0 + \Delta \lambda) \phi^4 + \Delta C \Lambda^4 (\partial'_\mu \phi)^4 + \dots \right]$$

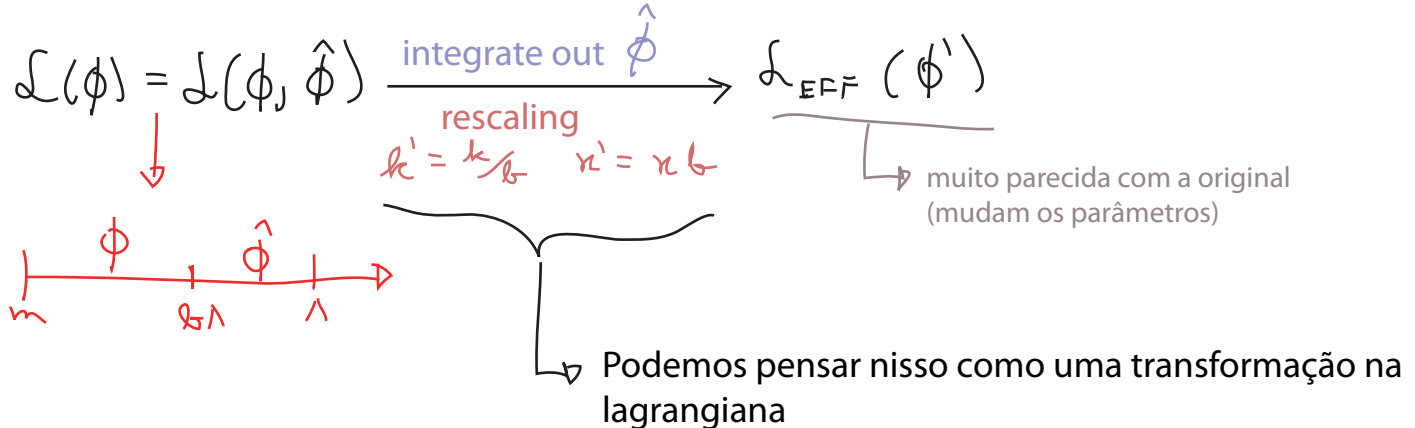
Podemos voltar a uma forma muito parecida com a lagrangeana original fazendo as seguintes definições:

$$\begin{aligned} \phi' &= [b^{2-d} (1 + \Delta z)]^{1/2} \phi \\ m'^2 &= (m_0^2 + \Delta m^2) (1 + \Delta z)^{-1} b^{-2} \\ \lambda' &= (\lambda_0 + \Delta \lambda) (1 + \Delta z)^{-2} b^{d-4} \\ c' &= (c_0 + \Delta c) (1 + \Delta z)^{-2} b^d \\ \mathcal{D}' &= (\mathcal{D}_0 + \Delta \mathcal{D}) (1 + \Delta z)^{-3} b^{2d-6} \\ &\vdots \end{aligned}$$

(eq. 80.1)

$$\int d^d x \mathcal{L}_{EFF} = \int d^d x' \left[\frac{1}{2} (\partial'_\mu \phi')^2 + \frac{1}{2} m'^2 \phi'^2 + \frac{1}{4} \lambda' \phi'^4 + c' (\partial'_\mu \phi')^4 + \mathcal{D}' \phi'^6 + \dots \right]$$

Pensando em todo o processo, o que fizemos foi:



Podemos, de fato, repetir o processo para uma nova "fatia" do espaço de momentos ($cb\Lambda < |k| < b\Lambda$). Cada transformação sucessiva resulta em uma nova transformação dos coeficientes dos termos na lagrangeana (como em 80.1). Se fizermos todos os parâmetros desta transformação (b, c, \dots) infinitesimalmente próximos de 1 (o que equivale a fazer as "fatias" tenderem a zero) temos uma transformação contínua. Neste caso vemos que podemos descrever o resultado de integrar sobre os graus de liberdade com momentos grandes como uma trajetória ou caminho (em inglês é comum usar "flow") sobre o espaço das possíveis lagrangeanas. O conjunto destas transformações é chamado de **Grupo de Renormalização (RG)** (embora não formem verdadeiramente um grupo, pois não são inversíveis).

Notem que temos então duas formas de atacar o mesmo problema. Suponha que estejamos interessados em um processo qualquer em que os momentos típicos (da partículas reais) sejam muito menores que uma escala qualquer Λ (usemos a teoria escalar para ilustrar):

Método 1: $\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 + \frac{\lambda_0 \phi^4}{4!}$

Calculamos a função de n-pontos

Surgem divergências assim que consideramos loops (porque é neles que entra a dinâmica de altas energias)

↓ Renormalização

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + \text{contratermos}$$

$m^2 = m_0^2 \pm \delta m$
 $\lambda = \lambda_0 \pm \delta \lambda$

as divergências aqui (nos δ 's) nos forçam assumir que os parâmetros nús (m_0, λ_0) eram infinitos, o que parece criar problemas para a série perturbativa

→ resultados finitos

Método 2: $\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 + \frac{\lambda_0 \phi^4}{4!}$

Diversas transformações sucessivas em que "integramos" os modos de alto momento, embutindo o seu efeito de volta na lagrangeana. Em cada passo temos só **integrais finitas** e os parâmetros da lagrangeana são também sempre assumidos pequenos.

$(m_0 \ll \Lambda)$ $(\lambda \text{ perturbativo})$

m_0, λ_0 finitos!

há de se tomar cuidado, pois λ vai mudando e por enquanto assumimos que ele nunca vai ficar forte o bastante para invalidar a teoria de perturbação.

$$\mathcal{L}_{\text{EFF}} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda \phi^4}{4!} + \text{ todos os termos possíveis (de qualquer dim.)}$$

→ resultados finitos (o campo que sobra é zero para qualquer momento um pouco acima dos momentos externos considerados)

Os dois métodos devem nos fornecer os mesmos resultados, mas o segundo deixa diversas ideias mais claras. Para começar a teoria de perturbação é válida em qualquer ponto do cálculo, desde que a constante de acoplamento não evolua para valores grandes (o que de fato acontece em algumas teorias). Além disso fica claro que todas as grandezas vão depender da escala que estamos considerando (aquela que sobra no final, depois de integrarmos tudo acima dela).

Vejamos como a lagrangeana tende a variar sobre as transformações do grupo de renormalização. As lagrangeanas são definidas no espaço dos coeficientes de seus termos (que são operadores compostos dos campos), no caso escalar, por exemplo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4} \phi^4 + c (\partial_\mu \phi)^4 + \mathcal{D} \phi^6 + \dots$$

parâmetros que definem o espaço de lagrangeanas escalares

da forma que definimos as transformações do RG este termo fica sempre igual.

O ponto $\{m^2, \lambda, C, D, \dots\} = \{0, 0, 0, 0, \dots\}$ é o que chamamos de **ponto fixo** para as transformações do RG, uma vez que nele temos apenas:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2$$

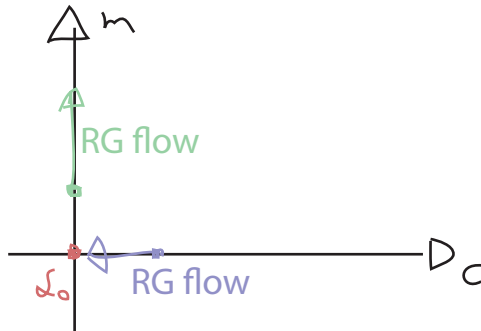
e portanto não há interações que vão corrigir os outros parâmetros e tirá-los de zero. Perto deste ponto podemos ignorar as correções superiores na perturbação e simplificar as transformações 80.1:

(eq. 80.1)

$$\left. \begin{aligned} b m'^2 &= (m_0^2 + \Delta m^2) (1 + \Delta z)^{-1} b^{-2} \\ \lambda' &= (\lambda_0 + \Delta \lambda) (1 + \Delta z)^{-2} b^{d-4} \\ C' &= (C + \Delta C) (1 + \Delta z)^{-2} b^d \\ D' &= (D + \Delta D) (1 + \Delta z)^{-3} b^{2d-6} \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} m'^2 \simeq m_0^2 b^{-2} + \mathcal{O}(\Delta \dots) \\ \lambda' \simeq \lambda_0 b^{d-4} + \mathcal{O}(\Delta \dots) \\ C' \simeq C b^d + \mathcal{O}(\Delta \dots) \\ D' \simeq D b^{2d-6} + \mathcal{O}(\Delta \dots) \\ \vdots \end{cases}$$

$\{m^2, \lambda, C, D, \dots\} \sim \{0, 0, 0, 0, \dots\}$

Como $b < 1$, os parâmetros com **potências negativas de b crescem**, e os com **potências positivas de b diminuem** quando aplicamos a transformação.



Os operadores cujos coeficientes crescem com as transformações sucessivas são chamados de **relevantes** e os que desaparecem são chamados de **irrelevantes**. Os operadores cuja potência em b é zero são chamados de **marginais**, e precisamos das correções perturbativas de ordem mais alta para saber se eles crescem ou decrescem.

no caso escalar: ϕ^2 é relevante sempre (independentemente do numero de dimensões)

ϕ^4 $\begin{cases} d < 4 & \text{relevante} \\ d = 4 & \text{marginal} \\ d > 4 & \text{irrelevante} \end{cases}$

De uma forma geral, o coeficiente de um operador com N potências de ϕ (escalar) e M derivadas vai se transformar conforme (veja pg 79-80, note que queremos manter o termo cinético normalizado):

$$C'_{N,M} = \underbrace{b^{-d}}_{\text{scaling da integral}} \underbrace{b^{\left(\frac{d-2}{2}\right)N}}_{\text{transf. do campo (eq. 80.1)}} \underbrace{b^M}_{\text{scaling das derivadas}} C_{N,M} = b^{N\left(\frac{d}{2}-1\right)+M-d} C_{N,M}$$

(eq. 82.1)

Note que a dimensão do operador é:

$$Dim [\hat{O}_{N,M}] = N \left(\frac{d-2}{2} \right) + M = d_{N,M}$$

↳ dimensão do campo escalar
↳ cada derivada aumenta a dimensão em 1

Como a lagrangeana deve ter dimensão d, a dimensão do coeficiente deste operador deve ter dimensão:

$$Dim [C_{N,M}] \equiv D_c = d - d_{N,M} = d - \left[N \left(\frac{d-2}{2} \right) + M \right]$$

que é justamente o que aparece no expoente de b (com sinal trocado). Comparando isto com o que sabemos da conexão entre renormalizabilidade e a dimensão dos acoplamentos, vemos que operadores **relevantes** ($D_c > 0$) equivalem a interações **super-renormalizáveis**, operadores **marginais** ($D_c = 0$) equivalem a interações **renormalizáveis** e os **irrelevantes** ($D_c < 0$) equivalem a interações **não-renormalizáveis**.

Uma outra forma de relacionar o comportamento dos coeficientes com a dimensão do operador consiste em pensar que o coeficiente é naturalmente da ordem de:

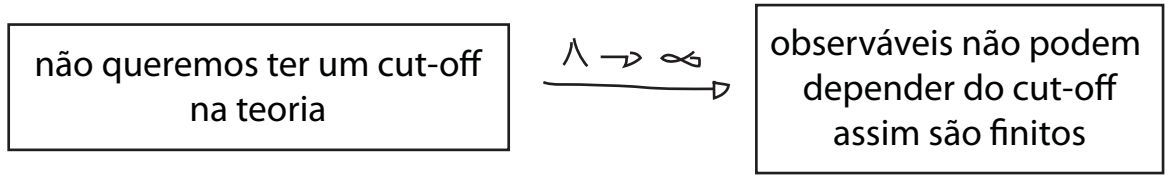
$$C_{OEF.} \sim (massa)^{d - d_{N,M}} \sim (\Lambda)^{d - d_{N,M}}$$

$$d < d_{N,M} \Rightarrow C_{OEF.} \sim \frac{1}{\Lambda^{|d - d_{N,M}|}} \left\{ \begin{array}{l} \text{irrelevante para momentos pequenos} \\ |p| \ll \Lambda \Rightarrow \left(\frac{|p|}{\Lambda} \right)^{d_{N,M} - d} \sim 0 \end{array} \right.$$

$$d > d_{N,M} \Rightarrow C_{OEF.} \sim \Lambda^{|d - d_{N,M}|} \quad \text{importante mesmo em pequenos momentos porque } \Lambda \text{ é grande}$$

Este é um resultado importante porque nos diz que, pelo menos em regiões próximas ao ponto fixo da lagrangeana livre, qualquer lagrangeana, não importa o quão complicada, acabará se tornando uma lagrangeana com um numero finito de interações renormalizáveis.

Isto muda um pouco nosso ponto de vista sobre teorias renormalizáveis, anteriormente seguimos o seguinte raciocínio:

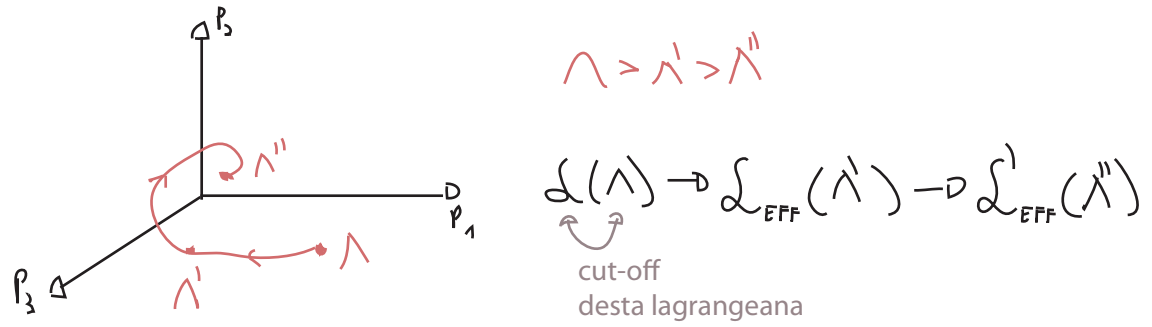


Só consigo uma teoria preditiva se não houver termos não-renormalizáveis

↳ Só teorias renormalizáveis são boas (é uma "sorte" que a QED o seja)

sorte no sentido que, nesta visão, não há motivo para uma teoria independente do cut-off ter sido realizada na natureza ↴

Agora temos uma outra perspectiva, suponha que qualquer teoria de campo tenha um cut-off - mesmo que não saibamos onde ele fica ou qual teoria começa ali (gravidade quântica?) - e que ele esteja bem acima do nosso alcance experimental. O que fazemos é usar as transformações do RG para "trazer" o cut-off para perto da escala em que estamos calculando o espalhamento, e incluímos os efeitos das altas energias na lagrangeana efetiva.



Se neste processo as interações não-renormalizáveis forem suprimidas, então as equações do RG nos dão **uma razão para que a QED seja renormalizável**: qualquer teoria com acoplamentos suficientemente fracos se comportará como uma teoria renormalizável em baixas energias.

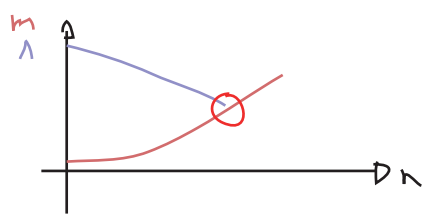
É claro que temos que tomar cuidado com os casos em que os acoplamentos crescem, ou que estamos um pouco mais longe do ponto fixo, vamos ver isso com um pouco mais de detalhe:

$\lambda \phi^4$
 $\mathcal{L} \sim \mathcal{L}_0$
 $d > 4$

⇒ Apenas o termo de massa é relevante, começamos com $m_0 \ll \Lambda_0$

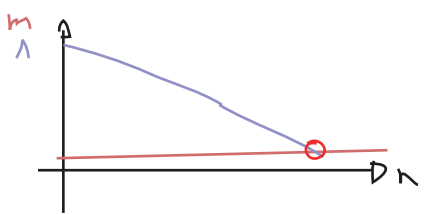
$$m_0^2 \xrightarrow{n \text{ integrações}} m'^2 = m_0^2 g^{-2n}$$

$$\Lambda_0 \longrightarrow \Lambda'$$



Em algum ponto $m'^2 \sim \Lambda'^2$ e temos que parar aí. Exigir que m' seja uma massa "pequena" significa exigir que a massa:

(a) comece perto do ponto fixo da teoria livre e mude muito pouco com as transformações do RG, e somente o cut-off é que vai baixando;



ou: (b) se ela começar longe de \mathcal{L}_0 , então ela flue para lá e então se comporta como em (a)

A situação (a) exige que a m passe extremamente perto do ponto fixo, e para conseguir (b) precisamos escolher o ponto onde começa a trajetória com muita precisão. Caso consigamos fazer isso, então a previsão é de que mesmo lagrangeanas com operadores altamente não lineares (longe de \mathcal{L}_0) terão correlatores a baixas energias que se comportam como teorias praticamente livres de escalares leves. No caso de sistemas magnéticos (onde podemos de fato ajustar as "condições iniciais") este comportamento aparece em modelos com mais de 4 dimensões. Perto da transição de fase de segunda ordem destes modelos temos exatamente esta situação.

$\lambda\phi^4$
 $d \sim d_0$
 $d = 4$

Neste caso temos que ficar atentos ao operador ϕ^4

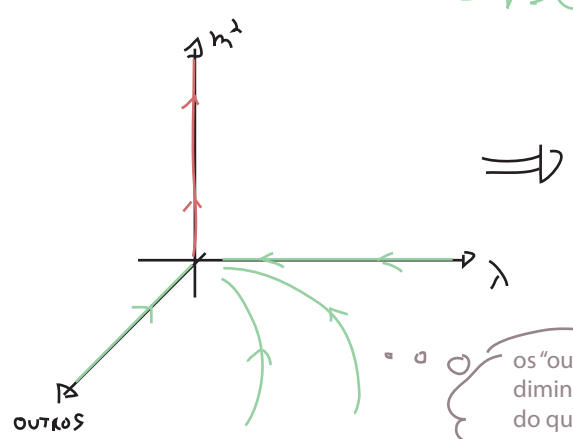
$$\lambda' = (\lambda + \Delta\lambda)(1 + \Delta z)^{-1} \mu^{d-4}$$

eq. 78.1

$\Delta z \sim \frac{1}{\mu^2} + \mathcal{O}(\lambda^2)$
 só corrige a massa

$$\lambda' \approx \lambda - \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \ln\left(\frac{1}{\mu}\right)$$

λ' diminui lentamente conforme "integramos"



isso quer dizer que $\lambda\phi^4$ acaba sempre se tornando livre muito longe do cut-off (ou quando fazemos o cut-off ir para infinito). Esta é a trivialidade de $\lambda\phi^4$ sem cut-off (é claro que a teoria continua útil se temos um cut-off)

os "outros" coeficientes diminuem mais rápido do que λ

$\lambda\phi^4$
 $d \sim d_0$
 $d < 4$

O operador ϕ^4 agora é relevante. Mesmo que comecemos perto da teoria livre o valor de λ vai fluir para valores maiores. Assim que nos afastamos da origem, temos que considerar as correções de ordem λ (da eq. 78.1). Para $d < 4$ temos:

$$\lambda' = \left(\lambda - \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(d/2)} \frac{(1 - \mu^{d-4})}{d-4} \mu^{d-4} \right) \mu^{d-4}$$

$\lambda' \sim \lambda \mu^{d-4}$

este sinal sugere que em algum ponto o crescimento causado pelo scaling vai ser cancelado pela contribuição do termo não-linear, neste ponto λ pára de mudar - há um segundo ponto fixo. Este ponto se funde como o ponto da lagrangeana livre se fazemos $d \rightarrow 4$, e os dois vão ter a mesma propriedade em relação ao crescimento da massa. Então, perto de $d = 4$ temos o diagrama abaixo:

